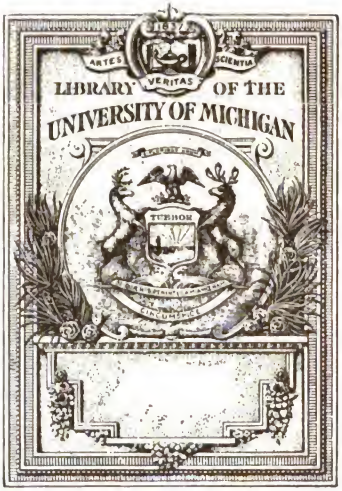
Archiv der Mathematik und Physik


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TURBOR

Mathematics
QA
1
.A67

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Elfter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Bongbusch.

1892.

gen.

Inhalts-Verzeichniss

des elften Teils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Methode und Principien.		
XI.	Ueber die Verwendung des Rechenbrettes zur Darstellung beliebiger Zahlensysteme. Von Georg von der Gabelentz	II	213
XV.	Die Willensfreiheit und der physische Determinismus. Von R. Hoppe	III	336
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
II.	Die Nullwerte höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen. Von Franz Rogel	I	14
III.	Arithmetische Entwicklungen. Von Franz Rogel	I	77
V.	Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik. Von V. Schlegel	I	93
IX.	Zur Theorie der quadratischen Reste. Von Karl Reich	II	176
XI.	Asymptotischer Wert der Facultätencoefficienten. Von Franz Rogel	II	210
XIV.	Ueber Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen. Von Karl Reich	III	225
XIV.	Einige Aufgaben aus der Combinatorik. Von Alfred Holtze	III	284

424969

№ der Abhandlung		Heft.	Seite.
XX.	Ueber die Reihe der reciproken Binomial-Coeffi-cieten. Von Franz Rogel	IV	412
XXI.	Zur Zahlentheorie. Von G. Speckmann . . .	IV	439

Integralrechnung.

VIII.	Zur Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Integrale. Von Emil Oekinghaus	II	132

Geometrie der Ebene.

XI.	Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Neoidé mittelst eines Kegelschnittes. Von Wilhelm Rulf	II	197
XI.	Ueber harmonische Strahlen. Von Rudolf Skutsch	II	206
XI.	Zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels. Von A. v. Frank	II	207
XIII	Lösung des Problems über den Schnitt von Curven 2ter Ordnung. Von Carl Laab	II	262
XVII.	Dreiteilung jedes Winkels mittelst fester Kegelschnitte. Von W. Panzerbieter. (Fortsetzung von T. X. Nr. XVIII. u. XXIII.)	III	349
XIX	Fortsetzung	IV	408
XVII.	Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken. Von R. Hoppe .	IV	351
XXI.	Geometrische Bestimmung der Tangente der Cassini'schen Linie. Von Wilhelm Rulf	IV	438
XXI.	Zur Cassini'schen Linie. Von Emil Oekinghaus	IV	441

Geometrie des Raumes.

I.	Neue Construction der Perspective. Von Ludwig Leib	I	1
IV.	Das Tetraeder bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen. Von R. Hoppe	I	85

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite
VI.	Curven von constanter Krümmung, Torsion, Totalkrümmung und Krümmungsverhältniss. Von R. Hoppe	I	101
X.	Curve gegebener Krümmung auf gegebener Fläche. Von R. Hoppe	II	193
XI.	Zur Theorie der Regelflächen. Von R. Hoppe.	II	218
XVI.	Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie. Von R. Hoppe	III	345
XVIII.	Beitrag zur Lehre von der n fachen Mannigfaltigkeit. Von H. Kühne	IV	353
XXI.	Zur Durchdringung der Kugel mit dem geraden Kreiskegel, Satz über das Kegelschnittbüschel und die Parabel. Von Wilhelm Rulf	IV	433
XXI.	Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien. Von R. Hoppe	IV	442

Optik.

VII.	Neue Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, im allgemeinen und für Flächen II. Grades im besonderen. Von Josef Bazala	II	113

Erd- und Himmelskunde.

XI.	Ueber den Einfluss der Excentricität der Erdbahn auf die mittlere Umlaufszeit des Mondes. Von C. Benz	II	199

Litterarische Berichte.

XLI. Piper (Bew. d. Unsterblk.) Grassmann (Ausdehnungsl.)

XLII. Gauss (übs. Wangerin) (Flächenth.) Michalitschke (Spiralen). Emmerich (Brocard. Geb.) Hanner (anal. Geom.) Waege (Netze II) Breuer (Dispers.) Roscoe (Spectr.-Anal.) Konkoly (Spectrosk.) Steiner u. Auster-

litz (Musikth.) Glinzer (Fest.) Bebber (Wett.) Kleinstück (Zeitgl.) Napoli (Rend. IV.) Newcomb (Am. J. XIII.) Amsterdam (N. Arch. XVIII. XIX.) Bur. Long. (Ann. 1892).

XLIII. Scheffler (Kreisteil.) Mansion (übs. Maser) (part. Diff. Gl.) Picard (anal.) Dini (übs. Lüroth u. Schepp) (Th Funct.) Teixeira (diff. — int. II.) Weber (ell. F.) Molenbroek (Quat.) Divic (7 Oper.) Bergbohm (Int.) Hagen (Synops.) Foerster (Mitt. I.) Klein (astr. Ab.) Payne u. Hale (astr.) Poincaré (méc. cél.) Günther (ph. Geogr.)

XLIV. Iselin (Geom.) Preyer (Zahl). Schlichting (Gravit.) Pietzker (Raum). Lipps (ästh. Fact.) Secchi (übs. Schulze) (Naturkr.)

Berichtigungen

im 11. Teile:

Seite	1	Zeile	9 v. o.	statt	Curven	setze	Centrum
		„	13	„	Schwerpunkt	„	Spurpunkt
		„	14	„	P_1	„	P_0
„	2	„	4	„	P_5	„	P_0
		„	14 v. u.	„	parallele	„	Parallel-
„	3	„	14 v. o.	„	$\mathfrak{P}_2$	„	$\mathfrak{P}_1$
		„	10 v. u.	„	X	„	H
		„	5	„	P_{11}	„	für P_{11}
„	4	„	14	„	centum	„	centrum
	„	„	12	„	5_1	„	a_2
„	5	„	5 v. o.	„	Mir	„	Wir
		„	11 v. u.	„	fm	„	im
		„	6	„	une	„	und
		„	5	„	$p5$	„	$p4$
„	7	„	5 v. o.	„	$\mathfrak{S}_3$	„	$\mathfrak{P}_3$
		„	12 v. u.	„	ps	„	$\mathfrak{P}_5$
„	8	„	19 v. o.	„	entsprechen	„	entstehen
		„	14 v. u.	„	11	„	16
		„	6	„	r_{31}, r_{31}	„	r_{31}, r_{32}
„	9	„	4 v. o.	„	$s_1 s_2$	„	$s_1' s_2'$
		„	19	„	$s_1 s_1$	„	$s_2 s_1$
		„	25	„	auf	„	aus
		„	32	„	C_{13}	„	C_{31}
„	11	„	12 v. u.	„	$a_1 a_2 a_3$	„	$a_{11} a_{21} a_{31}$
		„	4	„	C_{21}	„	C_{23}
„	12	„	13 v. o.	„	C_{11}	„	C_{31}
„	177	„	9 v. u.	nach	$\frac{1}{2}(p-1)$	„	Zahlen
„	178	„	16 v. o.	statt	b	„	$c\ c$
		„	7 v. u.	„	$p+1$	„	$p-1$

Seite	180	Zeile	13 v. u.	statt	3	setze	5
„	181	„	4 v. o.	„	k^2	„	h^2
		„	6 v. u.	„	Wir	„	III. Wir
„	183	„	5 v. o.	„	$x-2y-2$	„	$x-2y-3$
		„	2 v. u.	„	$\frac{1}{2}$	„	1
		„	1	„	$=\binom{1x+1}{x}^{2\alpha}$	„	$+\binom{2x+1}{x}^{2x}$
„	184	„	5	„	a_k	„	a_h
„		„	2		fehlt der Coefficient $\frac{2}{k-h}$		
„	185	„	10 v. o.	statt	$(4k-2)(4k-3)$	setze	$(4k-3)(4k-1)$
„	185	„	8 v. u.	„	R_h	setze	R_k
„	186	„	6 v. o.	„	$k-2$	„	$k-1$
„		„	15	„	Identität	„	Identität (2)
„		„	4 v. u.	„	$i-2$	„	$i-1$
„	188	„	14	„	$2k-19$	„	$8k-19$
„	189	„	8 v. o.	„	$\binom{2}{3}$	„	$\frac{2}{3}$
„	190	„	1	„	$((k+1(x$	„	$((k+1)x$
		„	10	„	Primzahlen	„	Primzahl'
		„	13		nach Producte ist einzuschalten: ihrer Elemente und bezeichne die Summe dieser Producte		
„	191	„	2 u. 7	statt	$\frac{c}{p}$	setze	$\frac{c}{p}$
			5	„	$p-3k-2$	„	$p-3k-1$
„	192	„	1 v. u.	„	a^m	„	a_m
„	184	„	14 v. o.	In der Determinante			

$$R_k = \left| (-1)^{\lambda-\mu}\binom{2\lambda-2\mu+1}{\lambda-\mu} \right| (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots k-1)$$

sind nur die 3 ersten Verticalreihen ausgeschrieben; diese genügen indes die übrigen leicht zu erkennen.

I.

Neue Constructionen der Perspective.

Von

Ludwig Leib.

In Folgendem werden 2 Sätze angegeben, mittelst deren sich neue Constructionen perspectivischer Bilder ausführen lassen.

I. Satz: „Wird ein Punkt im Raume von 2 Projectionscentren „aus auf 1 Ebene projicirt, so liegen seine beiden Projectionen auf „1 geraden Linie mit dem Punkte, in welchem die Verbindungslinie „der zwei Curven die Ebene schneidet, dem sogenannten Kern-„punkt“ [1]).

Denn nennen wir die Ebene $\mathfrak{P}_1$, die Projectionen des Punktes P_0 von den Centren O_1 und O_2 aus P_{11} und P_{12} — der erste Index bezeichne die Projectionsebene, der zweite das Centrum — , und nennen wir ferner den Kernpunkt K_{12}, so ist durch die Strahlen $O_1P_0P_{11}$ und $O_2P_0P_{12}$ eine Ebene bestimmt, welcher auch die Gerade O_1O_2 angehört; der Schwerpunkt der Geraden O_1O_2 in $\mathfrak{P}_1$ liegt also in der Spurlinie der Ebene $O_1O_2P_1$ in $\mathfrak{P}_1$, d. h. K_{12} liegt auf $P_{11}P_{12}$.

Zweitens besteht bekanntlich folgender Satz: Wird ein Punkt P_0 von einem Centrum O_1 aus auf 2 Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ projicirt, und wird dann $\mathfrak{P}_2$ durch Drehung um seine Spurgerade mit $\mathfrak{P}_1$, s_2 in Ebene $\mathfrak{P}_1$ gelegt, so liegen die beiden Projectionen P_{11} und P_{21} auf einer geraden Linie mit dem Collineationscentrum [2]).

1) Hauck. neue Constr. der Persp. u. Photogrammetrie im 95. Jahrgang d. Journals f. reine u. angew. Mathematik.

2) Desargues.

Wir bezeichnen dasselbe mit C_{12}, sodass die Indices die zwei Ebenen angeben, und zwar der erste derselben das zugehörige Centrum.

Construiren wir noch die Projection des Punktes P_0 von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$, P_{22}, und bringen O_1O_2 in K_{21} auch mit $\mathfrak{P}_2$ zum Schnitt, so folgt aus Satz I., dass auch K_{21}, P_{21} und P_{22} auf einer geraden Linie liegen. (Fig. 1.)

Fassen wir K_{21} auf als Projection des Punktes O_2 von O_1 auf $\mathfrak{P}_2$, und K_{12} als Projection desselben Punktes von demselben Centrum auf $\mathfrak{P}_1$, so folgt aus Satz II., dass C_{12}, K_{21} und K_{12} auf 1 Geraden liegen. Construiren wir noch aus O_2 für $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ das Collineationscentrum, C_{21}, und betrachten wir K_{21} als Projection des O_1 von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$, K_{12} als Proj. des O_1 von O_2 auf $\mathfrak{P}_1$, so folgt auf gleiche Weise, dass C_{21}, K_{21} und K_{12} auf einer Geraden liegen. Es besteht also die Beziehung:

III. Satz: „Die beiden Kernpunkte und die beiden Collineations-„centren für zwei gegebene Projectionsebenen und ihre zugehörigen „Centren liegen auf einer Geraden".

Die Geraden $K_{12}P_{11}P_{12}$ und $K_{21}P_{21}P_{22}$ sind aufzufassen als die Spurlinien der Ebene $O_1O_2P_0$ in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Es folgt daraus die 4te Beziehung, dass $K_{12}P_{11}P_{12}$ und $K_{21}P_{21}P_{22}$ sich auf s_3 schneiden. Der Schnittpunkt heisse S_3.

Die angegebenen Beziehungen sind ersichtlich in (Fig. 1) die eine parallele Perspective des Systems vorstellt. In (Fig. 2) ist $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_1$ gedreht und es liegt dann auf 1 Geraden:

1) $K_{12}K_{21}C_{12}C_{21}$
2) $K_{12}P_{11}P_{12}$ 3) $K_{21}P_{21}P_{22}$
4) $C_{12}P_{11}P_{21}$ 5) $C_{21}P_{12}P_{22}$

Ausserdem liegt der Schnitt von $K_{12}P_{11}$ und $K_{21}P_{22}$ auf s.

Construction des persp. Grundrisses.

Obige Beziehungen lassen sich zur Construction des persp. Grundrisses verwerten, wenn wir durch das Centrum O_1 senkrecht zur gegebenen Projectionsebene $\mathfrak{P}_1$ eine Ebene $\mathfrak{P}_2$ derart legen, dass $\mathfrak{P}_2$ auch senkrecht zur Ebene $\mathfrak{E}$ des gegebenen geometrischen Grundrisses ist. Die Spur von $\mathfrak{E}$ sei a_1 in $\mathfrak{P}_1$, a_2 in $\mathfrak{P}_2$. P_0 sei ein Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$, die wir um a_2 in $\mathfrak{P}_2$ gedreht haben (Fig. 3.) Wir nehmen nun ein zu $\mathfrak{P}_2$ gehöriges Centrum O_2 an, und zwar im

Unendlichen in der Richtung der Linie a_1, so erhalten wir den Kernpunkt K_{21} in dem Punkt O_1 selbst, während K_{12} im Unendlichen in Richtung von a_1 liegt. Die Projection des P_0 von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$, P_{22}, erhalten wir (s. Fig. 3.) indem wir von P_0 auf a_2 ein Lot fällen. Ziehen wir nun $K_{21}P_{22}$, bringen diese Linie in S_3 mit s_3 zum Schnitt, und legen durch S_3 zu a_1 eine Parallele, so liegt auf derselben P_{11}, da diese Linie die Richtung zum Kernpunkt K_{12} anzeigt, und mithin die 4te oben abgeleitete Beziehung stattfindet. Wir haben also für P_{11} einen geom. Ort.

Einen zweiten finden wir folgendermassen:

Unter derselben Bezeichnung wie bei der vorangegangenen Construction nehmen wir O_2 im Unendlichen in Richtung von a_2 an, nicht, wie vorher, von a_1. K_{12} ist dann der Hauptpunkt, d, h. der Fusspunkt des von O_1 auf $\mathfrak{P}_2$ gefällten Lotes. P_{12} ist der Fusspunkt des von P_0 auf a_1 gefällten Lotes. Nach Satz (1) liegt auf der Linie $K_{12}P_{12}$ auch der Punkt P_{11}, und wir haben mithin einen zweiten Ort für die gesuchte Projection. In Fig. (4) ist die Construction ausgeführt, nachdem $\mathfrak{E}$ um a_1 in $\mathfrak{P}_1$ gedreht ist.

Denken wir eine Ebene $\mathfrak{P}_0$ durch P_0 senkrecht a_1 gelegt, so lässt sich auch Satz (2) anwenden, wenn wir $\mathfrak{P}_2$ mit O_1 um s_3 in $\mathfrak{P}_1$ drehen; das in $\mathfrak{P}_1$ gedrehte Centrum O_1 fällt dann mit dem Collineationscentrum C_{12} zusammen. Gleichzeitig muss auch P_0 gedreht werden um die Spurlinie der durch P_0 senkrecht zu a_1 gelegten Ebene, sodass P_0 die Lage P annimmt, $C_{12}P$ ist dann 1 Ort für P_{11} nach Satz (2). In Fig. (5) ist $\mathfrak{E}$ um a_1 in $\mathfrak{P}_1$ gedreht und P wird aus P_0 erhalten, indem durch P_0 1 Lot auf a_1 gefällt und dessen Länge auf a_1 abgetragen wird, oder einfacher, indem durch P_0 unter 45^0 zu a_1 eine Linie gezogen wird.

Satz (2) ergiebt noch einen andern Ort für P_{11}: Nehmen wir nämlich an, dass $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{E}$ die Ebenen wären, auf die P_0 von O_1 aus projicirt wird, und drehen $\mathfrak{E}$ mit P_0 um a_1 in $\mathfrak{P}_1$, und gleichzeitig O_1 um eine durch X parallel a_1 gelegte Linie in $\mathfrak{P}_1$, so nimmt C_{12} die Lage an, wie in Fig. (6) angegeben, und die Linie $C_{12}P_0$ ist ein Ort für P_{11}.

Bei der zuletzt angegebenen Construction muss der geometr. Grundriss auf demselben Blatt wie die auszuführende Zeichnung liegen, während bei den drei andern geometrischen Oertern P_{11} nur die Punktreihen auf a_1 oder a_2 erforderlich sind, die auf einem besondern Grundriss gefunden werden können. Von den sechs Combinationen aus den vier Oertern, — denn zur Bestimmung von P_{11} sind stets 2 der letzteren nötig — scheiden also 3 aus, und es bleiben

noch die 3 in Fig. (7), (8) und (9) dargestellten Constructionen. Da die Lösung Fig. (7 und 8) drei Hilfslinien erfordert, Fig. (9) deren aber nur 2 für die Projection jedes Punktes, so ist letztere vorzuziehen. Wir wenden sie an in der Aufgabe, ein regelmässiges Achteck in Perspective zu setzen (vgl. Fig. 10a und b).

Constr. des persp. Grundrisses aus den Linien desselben.

Wir projiciren die einzelnen Linien des geometrischen Grundrisses auf $\mathfrak{P}_1$. Sei g_0 eine Gerade der Grundrissebene $\mathfrak{E}$, welche a_1 in S_1, a_2 in S_2 schneide. Die Projection von O_1 aus, g_1, hat mit g_0 Punkt S_1 gemeinsam und um g_1 zu erhalten, haben wir nur noch einen zweiten Punkt von g_0 zu projiciren.

Wir wählen hierzu S_2, construiren g_1 also aus den 2 Spurpunkten. Die Projection des S_2 von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$ erhalten wir, wenn wir O_1 mit S_2 verbinden und diese Linie mit s_3 zum Schnitt bringen in A. AS_1 ist dann g_1.

Diese Construction erfordert, abgesehen von den notwendigen Verlängerungen der Grundrisslinien bis zum Schnitt mit a_1 und a_2, für jede Grade nur eine Constructionslinie, welche auch noch in der Nebenfigur des gegebenen Grundrisses ausgeführt werden kann. In Fig. (11a/b) ist diese Construction zur perspectivischen Darstellung eines Quadrates benutzt. In Fig. (11a) ist a_1 und a_2 ausgezeichnet und die Spurpunkte construirt; diese sind auf a_1 und a_2 der Fig. (11b) übertragen, welche letztere die in die Zeichenebene gedrehten Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ darstellt. Von dem Collineationscentum C_{12} aus wird die Punktreihe auf a_2 nach s_3 projicirt und entsprechende Punkte von s_1 und s_3 verbunden. Die Projection der Punktreihe a_2 nach s_3 kann auch in der Hilfsfigur vollzogen werden, wie die punktirten Linien andeuten.

Tritt der Fall ein, dass der auf s_3 liegende Punkt von g_1 ausserhalb der Zeichenebene fällt, so wird die gebräuchliche Construction mit Spur- und Fluchtpunkt anzuwenden sein. Dasselbe gilt für den Fall, dass die Punkte auf a_1 zu weit entfernt sind.

Constr. des persp. Bildes aus dem Grundriss.

Ist der perspectivische Grundriss construirt, so erhalten wir für die Punkte des Objectes selbst Oerter, wenn wir durch die entsprechenden Grundrisspunkte Verticale legen. Es ist noch ein zweiter Ort der Punkte zu bestimmen.

Im Folgendem ist die Aufgabe behandelt, ein durch Grundriss und Aufriss gegebenes Haus in Perspective zu setzen. Wir construiren nach einer der oben angegebenen Methoden den perspectivischen Grundriss, aus dem geometrischen und errichten in seinen Punkten Lote. Mir bilden auf gleiche Art das perspect. Bild des Aufrisses von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$ und construiren aus diesem die perspectivischen Bilder der parallelen Strahlen, welche den geometrischen Aufriss erzeugt haben; hierzu genügt offenbar der Fluchtpunkt F des zur Aufrissebene senkrechten Parallelstrahlenbüschels. Um die Construction zu vereinfachen, legen wir die Aufrissebene durch O_1, so dass die Perspective des Aufrisses in die Spurlinie b der Aufrissebene in $\mathfrak{P}_1$ fällt, und haben demnach folgende Construction:

Wir zeichnen zunächst den perspectivischen Grundriss und nehmen hierbei die Grundrissebene im Horizont an, sodass der Grundriss in die Linie a_1 fällt. In den so erhaltenen Punkten errichten wir auf a_1 Lote. Aus der Hilfsfigur übertragen wir nach der Hauptfigur die Linie b und projiciren von dem gleichfalls in die Figur eingetragenen Centrum O_1 die Aufrisspunkte auf b. Aus den 2 Hilfsfiguren wird der Fluchtpunkt F, sowie die zwei Punktreihen auf a_1 und b übertragen, und wir erhalten dann die Projection des Hauses als Schnitt entsprechender Strahlen des Strahlenbüschels Fb und des Parallelstrahlenbüschels auf a_1. Die 3 Figuren können auch in eine vereinigt werden, wenn Ebene $\mathfrak{E}$ um a_1 und Ebene $O_1 b$ um b in $\mathfrak{P}_1$ gedreht gedacht wird.

Axonometrische Construction.

Die angegebene Construction führt uns zur axonometrischen Behandlung unserer Aufgabe. Wir denken jeden Punkt des Objects bestimmt durch seine Coordinaten in einem rechtwinkligen, räumlichen Coordinatensystem, dessen Mittelpunkt A_0, dessen Axen x_0, y_0, z_0 seien, und projiciren das System von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$. Die Projectionen seien A, x, y, z. Ein Punkt P_0, der im Coordinatensystem durch die Coordinatenendpunkte X_0, Y_0, Z_0 gegeben ist, ist es in der Projection durch die Projectionen X, Y, Z. Es sind zunächst die Axen zu projiciren, und dann die auf ihnen liegenden Punktreihen. Zur Vereinfachung der Construction legen wir die $z_0$axe in s_3, sodass y_0 une x_0 bei verticalem s_3 horizontal sind. Die Projectionen x und y werden nach der $p\,5$ angegebenen Construction hergestellt aus Spur- und Fluchtpunkten. In Fig. (12a) ist die $x_0 y_0$ ebene dargestellt mit der Projection des Punktes O_1 auf dieselbe. Parallele durch O_1 zu x_0 und y_0 ergeben die Fluchtpunkte F_x und F_y, welche in die Ausführungsfigur (12b) auf den Horizont

übertragen werden. AF_x und AF_y ergeben die x und $y$axe, s_3 ist $z$axe. Die Punktreihen der x und $y$axe erhalten wir aus denen der x_0 und $y_0$axe mittelst Satz (2). Wir drehen $\mathfrak{E}$ mit x_0 und y_0 um a_1 und O_1 um seinen Horizont in $\mathfrak{E}$ und erhalten dadurch C_{12}, von dem wir die Punktreihe der umgeklappten x_0 und y_0 auf x und y projiciren (vgl. Fig. 12b).

Aus 2 gegebenen Centralprojectionen eine dritte zu finden.

Ein Punkt P_0 sei von einem Centrum O_1 auf Ebene $\mathfrak{P}_1$ im Punkte P_{11} und von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$ in P_{22} projicirt — wir wählen die Indices wieder derart, dass der erste Index die Ebene, der zweite das Centrum angiebt —; es ist von einem Centrum O_3 auf eine Ebene $\mathfrak{P}_3$ die Projection P_{33} zu finden. Wir verfahren derart, dass wir zunächst für die Projectionen von O_3 auf $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, P_{13} und P_{23}, in jeder der Ebenen einen geom. Ort darstellen, und dann denselben nach $\mathfrak{P}_3$ von O_3 aus projiciren, wodurch wir zwei Orte für P_{33} erhalten und damit diesen Punkt selbst.

Wie vorher gezeigt, liegen $P_{11}P_{13}K_{13}$ auf einer Geraden; wir erhalten also einen Ort für P_{13}, wenn wir K_{13} construiren, und $P_{11}K_{13}$ ziehen; ebenso ergiebt $K_{23}P_{22}$ einen Ort für P_{23}.

Der Schnitt von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ heisse s_3, von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ s_2, von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ s_1, der Schnitt von s_2 und $P_{11}K_{13}$ sei S_2, von $P_{22}K_{23}$ mit s_1 sei S_1. Dann ist S_2 ein Punkt der nun zu construirenden Projection von $P_{11}K_{13}$ in $\mathfrak{P}_3$, ebenso S_1 ein Punkt der Projection von $P_{22}K_{23}$ auf P_3. Wir haben demnach nur noch von einem Punkt von $P_{11}K_{13}$ resp. $P_{22}K_{23}$ die Projection in $\mathfrak{P}_3$ zu bestimmen, und je nach der Wahl desselben erhalten wir verschiedene Constructionen.

I. Die einfachste Construction tritt ein, wenn wir K_{13} und K_{23} hierzu wählen; es ist die im 95. Band des Journ. f. r. u. angw. Math. angegebene in der Abhandl.: Hauck, neue Constr. der Persp. und Photogr. Die Projectionen von K_{13} und K_{23} auf $\mathfrak{P}_3$ sind die Kernpunkte K_{31} und K_{32} und werden gleichzeitig mit den ersten beiden Kernpunkten gefunden, wie folgende Constr. der Kernpunkte zeigt.

Fig. (13) stelle die Projection der Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ auf eine zu s_2 senkrechte Ebene dar. O_1 und O_3 seien die Orthogonalprojectionen der Centren O_1 und O_3, so sind $\mathfrak{K}_{13}$ und $\mathfrak{K}_{31}$ die Kernpunktprojectionen. Sind h_1 und h_3 die Höhen der Centren über der Zeichenebene, so erhalten wir das in letztere geklappte Trapez

$O_1O_3O_2O_3$, wenn wir in O_1 und O_3 auf O_1O_3 Lote von der Länge h_1 resp. h_3 errichten, und die Endpunkte O_1 und O_3 verbinden. Errichten wir dann in $\mathfrak{R}_{13}$ und $\mathfrak{R}_{31}$ Lote auf O_1O_3, die O_1O_3 in K_{13} und K_{31} schneiden, so sind $\mathfrak{R}_{13}K_{13}$ und $K_{31}\mathfrak{R}_{31}$ die Entfernungen der Kernpunkte von der Zeichenebene. Wir klappen nun $\mathfrak{R}_3$ in $\mathfrak{P}_1$ (Fig. 14), ziehen in $\mathfrak{P}_3$ senkrecht zu s_2 eine Linie, welche den Schnitt a der Zeichenebene der Fig. (13) vorstelle, und in den Entfernungen $\mathfrak{R}_{13}K_{13}$ und $\mathfrak{R}_{31}K_{31}$ von derselben Parallele. In der Entfernung der Kernpunkte von s_2, die sich aus Fig. (13) ergiebt, ziehen wir zu s_2 Parallele, welche die zuerst zu a gezogenen Parallelen in K_{13} und K_{31} treffen.

Aus der Eigenschaft, dass $C_{13}C_{31}K_{13}K_{31}$ auf einer Geraden liegen, ergiebt sich folgende Modification: in den Entfernungen h_1 und h_3 vom Schnitt a ziehe Parallele, Fig. (14), und trage auf denselben von s_2 aus die Punkte C_{13} und C_{31} auf, deren Entfernungen von s_2 sich aus Fig. (13) ergeben. Die Schnitte von $C_{13}C_{31}$ mit den Parallelen zu s_2 sind dann die Kernpunkte.

Sind umgekehrt die Kernpunkte bekannt, so erhält man die Collineationscentren aus dem Schnitte von $K_{31}K_{13}$ mit den Horizontlinien von O_1 und O_3. Man bedarf also nicht mehr eine Hilfsfigur für die Construction der Collineationscentren.

II. Wie schon erwähnt, können wir $P_{11}K_{13}$ resp. $P_{22}K_{23}$ auch dadurch auf P_3 projiciren, dass wir nicht den Kernpunkt, sondern irgend einen andern Punkt der Linie auf $\mathfrak{P}_3$ projiciren, und dies wird besonders dann angebracht sein, wenn K_{31} und K_{32} nicht mehr auf dem Zeichenblatte liegen.

Nehmen wir hierzu einen beliebigen Punkt R_{13} von $P_{11}K_{13}$ an, dessen Projection R_{31} von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$ zu construiren wäre, so wäre $R_{31}S_2$ die Projection von $K_{13}P_{11}$ in ps und mithin 1 Ort für P_{33}.

Um nun aus $R_{13}-R_{31}$ zu finden, benutzen wir Satz 2, indem wir C_{31} mit R_{13} verbinden. Einen zweiten Ort finden wir aus der Hilfsfigur (13), indem wir den daraus ersichtlichen Abstand des R_{31} von s_2 als Parallele r_{31} zu s_2 in die Ausführungsfigur eintragen. Der Schnitt dieser Parallelen mit $C_{31}R_{13}$ ist R_{31}. Um immer dieselbe Linie r_{31} zu erhalten, ziehen wir im Abstand des R_{13} von s_2 eine Parallele r_{13} zu s_2, und wählen von allen Linien $P_{11}K_{13}$ stets den auf r_{13} liegenden Punkt. Dasselbe wird für $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ durchgeführt.

Wir nehmen R_{13} im Unendlichen an; R_{31} liegt dann auf einer Parallelen r_{31} zu s_2 die (Fig. 13) gefunden wird, indem man durch

O_3 zu $\mathfrak{P}_1$ eine parallele Ebene legt. Es ergiebt sich also folgende Construction:

Nimm die orthognale Projection der Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ und der Centren O_1 und O_3 auf eine zu s_2 senkrechte Ebene an, Fig. (13), und construire daraus, wie in Fig. (13/14) angegeben ist, den Kernpunkt K_{13} und noch C_{31}. Ist P_{11} die Projection des P_0 von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$, so zieh $P_{11}K_{13}$, und bringe diese Linie in S_3 mit s_3 zum Schnitt. Nachdem P_3 in Ebene $\mathfrak{P}_1$ gedreht ist, und r_{31} aus Fig. (13) in die Ausführungsfigur (14) übertragen ist, zieh durch C_{31} zu $K_{13}P_{11}$ eine Parallele, welche Linie $C_{31}R_{13}$ vorstellt, so ist nach Satz 2 ihr Schnitt mit r_{31} der Punkt R_{31}, und die Linie $R_{31}S_2$ ist ein Ort für P_{33}. Einen zweiten Ort erhalten wir, wenn wir Ebene $\mathfrak{P}_2$ um s_1 in $\mathfrak{P}_3$ drehen und auf gleiche Art verfahren.

Werden mehr Punkte auf diese Art nach $\mathfrak{P}_3$ projicirt, so entstehen bei K_{13} und C_{31} Strahlenbüschel mit parallelen Strahlen; sie schneiden also parallele Linien in ähnlichen Punktreihen; mithin sind die auf r_{31} und s_2 entstehenden Punktreihen ähnlich. Ziehen wir zu s_2 eine Parallele p_{31}, die von K_{13} denselben Abstand hat wie r_{31} von C_{31}, so ist die auf p_{31} durch Büschel K_{13} entsprechende Punktreihe congruent der auf r_{31} durch C_{31} entstehenden, und es ist demnach nicht nötig, das Büschel C_{31} zu zeichnen, sondern nur, die Punktreihe p_{31} nach r_{31} zu übertragen (Fig. 16). Die Projection jedes Punktes P_0 bedarf dann nur 4 Hilfslinien. Dies ist besonders dann von Vorteil, wenn die 2 gegebenen Projectionen mit den Strahlenbüscheln $P_{11}K_{13}$ und $P_{22}K_{23}$ auf 1 besondern Blatte gezeichnet sind. —|Es ist klar, dass die 2 Punktreihen auf s_2 und r_{31} perspectivisch liegen, und dass der Mittelpunkt der Projection der Kernpunkt K_{31} ist (vgl. Fig. 11), sodass diese Constr. auf die erste zurückzuführen ist. Wir führen sie an einem Beispiele durch:

Aufg.: Ein Haus ist in Längsriss und Aufriss gegeben, die Perspective für eine Ebene $\mathfrak{P}_3$ und ein Centrum O_3 zu construiren (Fig. 16).

Wir klappen wieder die Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ der gegebenen Projectionen in $\mathfrak{P}_3$, construiren aus der Hilfsfigur (15) die Kernpunkte K_{13} und K_{23}, ferner C_{31}, C_{32} und r_{31}, r_{31} und finden daraus die Abstände der r_{31} und r_{32} von C_{31} resp. C_{32}, sodass wir nach Eintragung der Linien r_{31} und r_{32} in Fig. (16) auch die Parallelen p_{31} und p_{32} in dieser ziehen können. Indem wir K_{13} mit den Punkten des Aufrisses verbinden, erhalten wir die Punktreihen s_2 und p_{31}, ebenso aus K_{23} und dem Längsriss die Punktreihen s_1 und p_{32}. Die Punkt-

reihen p_{31} resp. p_{32} werden nach r_{31} resp. r_{32} übertragen, darauf zugehörige Punkte von s_2 und r_{31}, ebenso von s_1 und r_{32} verbunden. Die Schnittpunkte entsprechender Verbindungslinien geben dann die perspectivische Ansicht. Die Linien s_1 und s_2 bleiben vorläufig unberücksichtigt.

Wir können die Linien p_{31} und p_{32} auch auf der andern Seite von K_{13} resp. K_{23} annehmen, je nach dem vorhandenen Platze, müssen dann aber die Punktreihen bei der Uebertragung nach s_2 resp. s_1 umkehren, sodass nur der Punkt auf $C_{31}K_{13}$ seine Lage auf dieser Linie behält. Fällt s_1 und s_2 nicht in die Zeichenebene, so können wir diese Constr. mit der ersten vereinigen und das perspect. Bild aus K_{31} und r_{32} resp. K_{32} und r_{31} construiren.

III. 3te Construction. Wir legen durch O_3 eine Ebene parallel $\mathfrak{P}_3$, die $\mathfrak{P}_1$ in t_{13}, $\mathfrak{P}_2$ in t_{23} schneidet, und projiciren von $P_{11}K_{13}$ und $P_{22}K_{23}$ die auf t_{13} resp. t_{23} liegenden Punkte, die in $\mathfrak{P}_3$ ins Unendliche fallen. Wir erhalten dann folgende Construction zu der wieder Fig. (13 und 14) benutzt ist. Suche, wie vorher, die Kernpunkte K_{13} und K_{23} und ferner die Linien t_{13} und t_{23} und drehe $\mathfrak{P}_1$ um s_1 und $\mathfrak{P}_2$ um s_1 mit den Linien t_{13} und t_{23} in Ebene $\mathfrak{P}_3$. Bringe $P_{11}K_{13}$ in S_2 mit s_2 und in T_{13} mit t_{13} zum Schnitt und zieh $T_{13}C_{31}$ so liegt nach Satz 2 T_{31} auf dieser Linie, im Unendlichen. Eine Parallele hierzu durch S_2 ist also ein Ort für P_{33} Ein zweiter ergiebt sich aus $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$.

In Fig. (17) ist diese Construction an 1 Beispiel durchgeführt; es ist dort auf Grund- und Aufriss die perspect. Ansicht hergestellt, nachdem $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit t_{13} und t_{23} um s_2 resp. s_1 in Ebene $\mathfrak{P}_3$ gedreht sind. Die Punktreihe auf t_{23} fällt in einen Punkt zusammen, da K_{23} ein Punkt der Linie wird. Das Strahlenbüschel von C_{32} aus fällt mithin weg, und das von s_1 ausgehende Strahlenbüschel wird ein paralleles. Die 6 Constructionslinien eines Punktes fallen demnach in 5 zusammen. Im Fall der Frontansicht geht auch das Strahlenbüschel C_{13} in 1 Linie über, sodass auch das zweite Strahlenbüschel s_2 parallel wird und jeder Punkt durch 4 Constructionslinien gefunden wird. — Es ist klar, dass diese Construction identisch ist mit der $p6$ gegebenen Construction.

4te Construction. Wir projiciren von $P_{11}K_{13}$ den in s_3 liegenden Punkt nach P_3 und erhalten für diese Projection einen geom. Ort in der Proj. s der Linie s_3 auf $\mathfrak{P}_3$, einen zweiten mit

Hilfe von C_{31}. Wir erhalten dann folgende Construction: Klappe $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ wieder in $\mathfrak{P}_3$ und trag die Punkte $K_{13}K_{23}C_{31}C_{32}$, sowie die Linie s aus der Hilfsfigur (18) in die Ausführungsfigur (19) ein. Zieh S_3C_{31} und verbind den Schnitt dieser Linie mit s mit dem Punkte S_3, so ergiebt dies einen geometrischen Ort für P_{33}, der andere ergiebt sich wieder aus $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$.

In Fig. 15, 16 ist mit dieser Construction die Aufgabe gelöst, aus Aufriss und Längsriss ist die perspectivische Ansicht eines Hauses zu finden.

Die Construction ist folgendermassen vereinfacht: Verschieb eine der Ebenen $\mathfrak{P}_1$ oder $\mathfrak{P}_2$ solange parallel sich selbst, bis s_3 mit s in Bezug auf auf O_3 symmetrisch liegt. Dann werden die Punktreihen auf s_3 und s congruent, man hat also nicht nötig, das Strahlenbüschel C_{31} zu zeichnen, sondern überträgt mittelst eines Papierstreifens die Punktreihe von s_3 nach s und verfährt dann wie oben.

In Fig. 16 sind in die Strahlenbüschel K_{13} und K_{23} Parallele eingezeichnet, s_2' und s_1', auf denen die Punkte erzeugt werden. Jeder Punkt bedarf hierbei nur 4 Constructionslinien.

V. 5te Construction. Wir legen durch O_1 und O_2 eine Ebene parallel s_3, die $\mathfrak{P}_1$ in t_1, $\mathfrak{P}_2$ in t_2, $\mathfrak{P}_3$ in t_3 treffe, ziehen wieder wie vorher die Linien $P_{11}K_{13}$ und $P_{22}K_{23}$, fassen dieselben aber diesmal auf als Projectionen der Linie O_3P_0 von O_1 auf P_1 und von O_2 auf P_2. Von dem Schnittpunkt T_{11} von t_1 und $P_{11}K_{13}$ construiren wir die Projection T_{31} von O_1 auf $\mathfrak{P}_3$ und ebenso von dem Schnittpunkt T_{22} von t_2 mit $P_{22}K_{23}$ die Projection T_{32} von O_2 auf $\mathfrak{P}_3$, und zwar wieder mit Hilfe der Collineationscentren C_{13} und C_{23}, $T_{31}S_2$ und $T_{32}S_1$ sind dann die Projectionen der Linie P_0O_3 von O_1 und von O_2 auf $\mathfrak{P}_3$; wir können also $T_{31}S_2$ ansehen als Spur der Ebene $P_0O_1O_3$ in $\mathfrak{P}_3$ und also auch als Projection der Linie P_0O_1 von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$. Ebenso ist $T_{32}S_1$ die Projection der Linie P_0O_2 von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$. Beide Linien stellen also einen geom. Ort für P_{33} dar, und ihr Schnittpunkt ist P_{33} selbst. In Fig. 18 und 20 ist die Construction durchgeführt, wie bisher unter der Annahme, dass die dritte der Projectionsebenen der Spurgeraden der beiden andern parallel ist.

VI. Hieraus folgt eine Construction des perspectivischen Bildes durch Projection der geradlinigen Begrenzung des Objectes nicht der Ecken desselben (Fig. 18 und 21), denn statt der Linie O_3P_0 können wir eine beliebige Linie g_0 auf diese Art projiciren. Die gegebenen

Projectionen derselben von O_1 auf $\mathfrak{P}_1$ und von O_2 auf $\mathfrak{P}_2$ seien g_1 und g_2, deren Schnitte mit s_2 resp. s_1 seien S_2 und S_1. Wir construiren von dem auf t_1 liegenden Punkte T_{11} der Linie g_1 die Projection T_{31} von O_1 auf $\mathfrak{P}_3$ mit Hilfe von C_{13}, denn wir wissen, dass T_{31} auf t_3 liegt. Ebenso finden wir mit C_{23} die Projection T_{32} auf t_3. $T_{31}S_2$ und $T_{32}S_1$ sind dann die Projectionen der Linie g_0 von O_1 und O_2 auf $\mathfrak{P}_3$, ihr Schnitt S ist also der Spurpunkt von g_0 in $\mathfrak{P}_3$, also ein Punkt von g_3. Als zweiten Punkt wählen wir die Projection des in Ebene t_1t_2 liegenden Punktes G_0 von g_0. Die Projection desselben von O_1 auf $\mathfrak{P}_3$ ist T_{31}, von O_2 auf $\mathfrak{P}_3$ ist es T_{32}. Construiren wir also die Kernpunkte in $\mathfrak{P}_3$, K_{31} und K_{32}, und verbinden K_{31} mit T_{31}, K_{32} mit T_{32}, so ist nach Satz 1 der Schnitt dieser Linien der Punkt G, in welchem G_0 von O_3 auf $\mathfrak{P}_3$ projicirt ist, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit S giebt die verlangte Projection g_3. Zur Projection einer Linie sind hiernach 6 Constructionslinien erforderlich.

7te Construction. Um aus 2 Projectionen eines Punktes eine dritte zu finden, benutzten wir bisher die Kernpunkte und die Collineationscentren; wir werden aber im Folgenden zeigen, dass wir die dritte Projection auch ohne Kernpunkte nur mit Hilfe der Collineationspunkte zeichnen können.

Aus der Construction des Collineationscentrums C_{13} folgt (Fig. 22a), dass die Linie O_1C_{13} auf s_2 senkrecht steht und den Winkel der 2 Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ halbirt. Jede durch C_{13} gehende Linie der Ebene $\mathfrak{P}_1$ kann daher angesehen werden als die Projection einer zu O_1C_{13} parallelen Linie mit dem Fluchtpunkt C_{13}. $P_{11}C_{13}$ ist daher zu betrachten als die Projection der durch P_0 parallel der Winkelhalbirenden gezogenen Geraden, dieselbe heisse a_0. Die durch a_0 und O_1 bestimmte Ebene schneide $\mathfrak{P}_1$ in a_1, $\mathfrak{P}_2$ in a_2, $\mathfrak{P}_3$ in a_3; die durch a_0 und O_2 gehende Ebene treffe $\mathfrak{P}_1$ in a_{12}, $\mathfrak{P}_2$ in a_{22}, $\mathfrak{P}_3$ in a_{32}, die durch a_0 und O_3 gehende $\mathfrak{P}_1$ in a_{13}, $\mathfrak{P}_2$ in a_{23}, $\mathfrak{P}_3$ in a_{33}. Da die drei Ebenen sämtlich durch a_0 gehen, so gehen ihre Spuren in einer der 3 Projectionsebenen durch den Spurpunkt von a_0 in dieser Ebene, es schneiden sich also u. A. a_{31}, a_{32}, a_{33} in einem Punkte. Ist also a_{31} und a_{32} construirt, so ist von a_{33} ein Punkt bekannt. Die Ebene $a_{11}a_{21}a_{31}$ enthält die durch O_1 zu a_0 gezogene Parallele, die $\mathfrak{P}_1$ in C_{13}, $\mathfrak{P}_3$ in C_{13}' treffe; Ebene $a_{12}a_{22}a_{32}$ enthält die durch O_2 zu a_0 gezogene Parallele, welche $\mathfrak{P}_2$ in C_{22}, $\mathfrak{P}_3$ in C_{23} treffe; Ebene $a_{13}a_{23}a_{33}$ endlich enthält die durch O_3 zu a_0 gelegte Parallele, deren Schnitt mit $\mathfrak{P}_3$ C_{31} sei. Es ist klar, dass dann die so gefundenen Punkte nichts anders als die Collineationscentren

sind, und dass überdies bei Drehung der Ebene $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{P}_3$ die Punkte C_{13} und C_{13}' zusammenfallen. Unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{P}_3$ der Spurgeraden s_3 parallel ist, ist in Fig. 22a das ganze System in orthogonaler Projection auf eine zu allen 3 Projectionsebenen senkrechte vierte Ebene dargestellt. Wird das Ebenensystem längs s_3 aufgeschnitten und $\mathfrak{P}_1$ wie $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_3$ gedreht, so können diese Collineationscentren aus Fig. 22a in die so entstehende Fig. 22b übertragen werden. $P_{11}C_{13}$ ist dann die Linie a_{11}, a_{31} geht durch C_{13}' und durch den Schnitt von a_{11} und s_2. Ebenso ist $P_{22}C_{22}$, die Linie a_{22}, und a_{32} ist Verbindungslinie von C_{21} mit dem Schnitte von a_{22} und s_1. Der so gefundene Schnittpunkt von a_{31} mit a_{32} ist ein Punkt von a_{33} und wir erhalten hieraus a_{33} selbst durch Verbinden mit Punkt C_{11}. a_{33} ist dann ein geometrischer Ort für P_{33}. Legen wir durch P_0 eine zweite Linie b_0, welche zur Winkelhalbirenden der Ebenen $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ parallel ist, und verfahren mit b_0 wie vorher mit a_0, indem wir auch durch b_0 3 Ebenen legen, so erhalten wir hieraus einen zweiten Ort für P_{33} und damit diesen Punkt selbst. Die angegebene Construction ist in Fig. 22b ausgeführt. Zur Projection jedes Punktes sind 8 Constructionslinien erforderlich; da C_{13} und C_{13}', ebenso C_{23} und C_{23}' zusammen fallen.

Beisp. Aus Grund- und Aufriss eine perspectivische Ansicht zu construiren (Fig. 23). $\mathfrak{P}_1$ sei Aufrissebene, $\mathfrak{P}_2$ Grundrissebene, $\mathfrak{P}_3$ sei die dritte Ebene und O_3 das zugehörige Centrum. In Fig. 23b ist $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_3$ gedreht. a_0 ist der mit a bezeichneten Linie parallel. Die Ebene durch O_1 und a_0 ist in unserm Falle horizontal, sodass das von P_{11} auf s_2 gefällte Lot die Linie a_{11} und seine Verlängerung a_{31} vorstellt. Die durch O_2 und a_0 gelegte Ebene steht auf $\mathfrak{P}_2$ senkrecht; a_{22} ist also die durch P_{22} zu a gezogene Parallele, das im Schnitt von s_1 mit a_{22} errichtete Lot auf s_1 ist die Spur a_{32}. Verbinden wir den Schnitt von a_{31} und a_{32} mit dem aus der Hilfsfigur gefundenen C_{31}, so ergiebt diese Linie einen Ort für P_{33}.

Wir nehmen jetzt durch P_0 eine Linie b an, die s_1 und den Winkel von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ halbirt, und legen die Ebenen O_1b_0 und O_2b_0. Die Richtung der Spurgeraden jeder hierzu parallelen Ebene in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ finden wir folgendermassen. Wir denken die Ebene dadurch entstanden, dass eine Linie, die senkrecht s_1 ist und den Winkel von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ halbirt, sich auf 1 Lot zur Ebene $\mathfrak{P}_1$ bewegt. Die Spur in $\mathfrak{P}_1$ erhalten wir, indem wir 1 Ebene $\mathfrak{E}$ in A senkrecht s_1 gelegt denken. AB sei deren Spur in $\mathfrak{P}_2$; AC ist dann die in $\mathfrak{P}_2$ um AB gelegte Spur von Ebene O_1b_0 in $\mathfrak{E}$; wir erhalten daraus die

Spur von $O_1 b_0$ in $\mathfrak{P}_1$, indem wir AD von A aus auf (s_3) übertragen und in dem so erhaltenen Punkte (D) ein Lot $(D)E$ gleich BC errichten, so ist AE die Richtung von b_{11}, und eine Parallele dazu durch P_{11} ist b_{11} selbst. Die Richtung von b_{31} erhalten wir folgendermassen:

In D errichten wir auf s_3 in $\mathfrak{P}_2$ ein Lot (vgl. Fig. 23 b) das s_1 in G trifft. In G wiederum in $\mathfrak{P}_3$ ein Lot auf s_1 von der Länge GH gleich BC, fällen dann in $\mathfrak{P}_2$ von D auf s_1 ein Lot DF, so ist HF die Richtung von b_{31}. b_{22} und b_{32} erhalten wir, wenn wir von P_{22} auf s_1 ein Lot fällen, das b_{22} ist, und in dessen Fusspunkt in $\mathfrak{P}_3$ auf s_1 ein Lot b_{32} errichten. Der Schnitt von b_{31} mit b_{32} wird mit c_{22} zerbunden, und dadurch ein zweiter Ort für P_{33} erhalten.

II.

Die Nullwerte höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen.

Von

Franz Rogel.

Bezeichnet $\mathfrak{f}(x)$ eine mit der Veränderlichen verschwindende Function, deren Differentialquotienten von $x = 0$ bis $x = \xi$ endlich und stetig bleiben, so wird auch der $n$te Differentialquotient einer beliebigen $m$ten Potenz dieser Function $\mathfrak{f}(x)$ — abkürzungsweise $\mathfrak{f}$ geschrieben, — zufolge der Formel

$$D^n \mathfrak{f}^m = n! \sum \frac{\binom{m}{i} i! \, \mathfrak{f}^{m-i}}{\alpha!\beta! \ldots \lambda!} \left(\frac{\mathfrak{f}'}{1!}\right)^\alpha \left(\frac{\mathfrak{f}''}{2!}\right)^\beta \ldots \left(\frac{\mathfrak{f}^{(n)}}{n!}\right)^\lambda$$

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n$$
$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = i$$

zwischen und an diesen Grenzen endlich und stetig bleiben.

Da i nicht grösser als n sein kann, so wird in dem Falle

$$n < m$$

i stets unter m liegen und $\mathfrak{f}^{m-n}$ ein gemeinschaftlicher Factor der Glieder obiger Summe.

Es folgt hieraus

$$D^n \mathfrak{f}^m{}_{x=0} = 0, \qquad n < m \tag{1}$$

Diese Eigenschaft bildet die Grundlage eines einfachen Verfahrens die Nullwerte der höheren Ableitungen solcher zusammengesetzter Functionen F, welche von $\mathfrak{f}(x)$ abhangen, direct, d. h. ohne vorherige Berechnung der Differentialquotienten zu bestimmen, wenn für F eine Potenz-Reihen-Entwicklung

$$F(y) = \sum_{g=0} A_g x^g \tag{2}$$

möglich und bekannt ist.

Wird nämlich y durch $\mathfrak{f}(x)$ ersetzt, so kommt

$$F(\mathfrak{f}(x)) = \sum_{g=0} A_g (\mathfrak{f})^g \quad \text{und}$$

$$D^n F(\mathfrak{f}) = \sum_{g=0} A_g D^n \mathfrak{f}^g \tag{3}$$

giltig jedoch nur für solche x, für welche die rechtsseitige Reihe convergirt, also für $x = 0$. Denn nach (1) verschwinden in diesem Falle alle Differentialquotienten vom $(n+1)$ten angefangen, auch kann wegen der vorausgesetzten Convergenz der Reihe in (2) keines der nachfolgenden Glieder unter der Form $0.\infty$ erscheinen; die Reihe in (3) hat daher einen endlichen Wert. Es gilt somit

$$D^n F(\mathfrak{f})_{x=0} = \sum_{g=1}^{g=n} A_g D^n (\mathfrak{f})^g{}_{x=0} \tag{4}$$

wo g eine ganze. positive Zal bezeichnet.

Eine weitere Anwendung des in (1) ausgesprochenen Satzes bilden Ableitungen von Identitäten (Vergl. d. Verfassers gleichnamigen Aufsatz, Archiv 2. R. S. 209 T. X. 1891.)

Eine unabhängige Darstellungsweise dieser Nullwerte, wie sie bei den Reihenentwicklungen von Mac Laurin, Lagrange und Bürmann gewünscht wird, ist nur denkbar, wenn sich sowol die Coefficienten A_g, als auch die Nullwerte der höheren Ableitungen der Potenzen der Function „$\mathfrak{f}(x)$" independent darstellen lassen.

Das letztere ist bei den wenigen nachfolgenden einfachen Functionen der Fall.

a) $D^n(\log \overline{1+x})^m = (-1)^{n-m} m! \overset{n}{\underset{n-m}{C}}$

wo $\overset{n}{\underset{n-m}{C}}$ den $\overline{n-m}$ten Facultäten-Coefficienten, gebildet aus den Elementen 1, 2, ... $n-1$ vorstellt.

b) $$D^n(\log\overline{1-x})^m{}_0 = (-1)^m m!\ \overset{n}{C}_{n-m}$$

c) $$D^n(\sin ax)_0^{2\mu} = (-1)^{\mu+\frac{n}{2}}\, 2^{-2\mu}\, a^n \sum_{r=1}^{r=\mu-1}(-1)^r\binom{2\mu}{r}(2\mu-2r)^n$$

wenn n gerade ist, sonst $=0$

$$D^n(\sin ax)^{2\mu+1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{-2\mu}\, a^n \sum_{r=0}^{r=\mu}(-1)^r\binom{2\mu-1}{r}(2\mu-2r+1)^n$$

wenn n ungerade ist, sonst $=0$

d) Von Fnnctionen $\varphi(x)$, welche für $x=0$ nicht verschwinden, können neue, für $x=0$ verschwindende $f(x)$ am einfachsten abgeleitet werden, wenn von ihnen — ansgedrückt in Reihenform — alle Glieder mit Exponenten $\leqq 0$ abgezogen, oder wenn sie mit einer entsprechend hohen Poten von x multiplicirt werden.

$$D^n\left(x\frac{1}{a-x}\right)^m{}_0 = D^n x^m (a-x)_0^{-m}$$

$$= m!\binom{n}{m} D^{n-m}\overline{a-x}_0^{-m} = n!\binom{n-1}{n-m}a^{-n}$$

$$D^n\left(x\overline{1-ax^{-p}}\right)^m = m!\ n!\binom{n}{m}\binom{mp+n-1}{n}a^n$$

p eine positive Zal
m eine ganze Zal

Auf diesen Fall lassen sich alle rationalen Brüche, deren Nenrer sich in Wurzelfactoren zerlegen lassen, zurückführen.

e) $$D^n(e^{ax}(e^{bx}-e^{cx}))_0^m = \sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(am+b(m\quad k)+ck)^n$$

Für $a=b=1$, $c=0$ ist

$$D^n(e^x-1)_0^m = \sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n = \overset{m}{E}_n \qquad (5)$$

Eine allgemeinere Function dieser Art ist:

$$y - e^{ax} \sum_{k=1}^{k=r} h_k e^{p_k x} \sum_{k=1}^{k=r} h_k = 0 \tag{6}$$

Ist $r > 2$, so lässt sich der Nullwert nicht mehr independent, sondern nur combinatorisch darstellen; es ist

$$D^m {y_0}^m = m! \sum \frac{{h_1}^{\alpha_1} {h_2}^{\alpha_2} \ldots {h_r}^{\alpha_r}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_r!} \left(\sum_{k=1}^{k=r} (\alpha_k p_k + a_m) \right)^n$$

$$\sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k = m; \quad \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots \ \alpha_r = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots \ m$$

α) bei geradem r und $h_k = (-1)^{k-1}$ ist die Bedingung in (6) erfüllt.

$$D^m e^{ax} \left(\sum_{k=1}^{k=r} (-1)^{k-1} e^{p_k x} \right)^m = m! \sum \frac{(-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_r!} \left(\sum_{k=1}^{k=r} (\alpha_k p_k + am) \right)^n$$

β) Derselben Bedingung genügt auch

$$h_k = (-1)^k \binom{r-1}{k-1}$$

$$D^m \left(e^{ax} \sum_{k=1}^{k=r} (-1)^k \binom{r-1}{k-1} e^{p_k x} \right)^m {}_0 =$$

$$m! \sum \frac{\binom{r-1}{0}^{\alpha_1} \left(- \binom{r-1}{1} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\sum_{k=1}^{k=r} (\alpha_k p_k + am) \right)^n}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots}$$

f) $$D^{2r} (x \cos ax)^{2\mu}{}_0 = (-1)^{r-\mu} (2\mu)! \binom{2\nu}{2\mu} 2^{2\mu-2r+1} a^{2\nu-2\mu} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{r=\mu-1} \binom{2\mu}{r} (2\mu - 2r)^{2\nu-2\mu}$$

$$D^{2r+1} (x \cos xx)^{2\mu}{}_0 \equiv 0$$

$$D^{2\nu+1} (x \cos ax)^{2\mu+1}{}_0 =$$

$$(-1)^{\frac{\nu-\mu}{2}} 2^{2\mu-2\nu+1} (2\mu)! \binom{2\nu}{2\mu} a^{2\nu-2\mu} \sum_{r=0}^{r=\mu} \binom{2\mu+1}{r} (2\mu - 2r)^{2\nu-2\mu}$$

$$D^{2\nu} (x \cos ax)^{2\mu+1}{}_0 \equiv 0$$

g) $D^n\,(xe^{r\arcsin x})^m{}_0 = m!\binom{n}{m}\,D^{n-m}e^{rm\arcsin x}{}_0$

$$= \begin{cases} m!\binom{n}{m}\prod_{k=0,2,4\ldots}^{k=n-m-2}(r^2m^2+k^2) & n-m \text{ gerade} \\ m!\binom{n}{m}rm\prod_{k=1,3,5\ldots}^{k=n-m-2}(r^2m^2+k^2) & n-m \text{ ungerade} \end{cases}$$

h) Das Lagrange'sche System liefert die Entwicklung

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = 1+\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{m}{r}\binom{m-r-1}{r-1}x^r$$

woraus

$$D^n y_0 = (-1)^n m(n-1)!\binom{m}{m}^{n-1}$$

wofür sich durch unmittelbares Potenziren noch ein anderer Ausdruck ergiebt; es ist

$$y = 2^{-m}\sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r}(1-4x)^{\frac{r}{2}}$$

$$D^n y_0 = 2^{-m}\sum_{r=1}^{r=m}\binom{m}{r}D^n(1-4x)_0^{\frac{r}{2}}$$

$$= (-1)^n 2^{2n-m}n!\sum_{r=1}^{r=m}\binom{m}{r}\binom{\frac{r}{2}}{n}$$

aus dem Vergleich beider Ausdrücke entsteht die Identität

$$\sum_{r=1}^{r=m}\binom{m}{r}\binom{\frac{r}{2}}{n} = 2^{-2n+m}\frac{m}{n}\binom{m-n-1}{m} \qquad (7)$$

h') Ebenso wird gefunden

$$y = \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^m = 1+\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{m}{n}\binom{m+2n-1}{n-1}x^n$$

$$D^n y_0 = m(n-1)!\binom{m+2n-1}{n-1}$$

$$D^n(x^m y)_0 = D^n\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = m!\binom{n}{m} D^{n-m} y_0$$

$$= \frac{m\,n!}{n-m}\binom{2n-m-1}{n-m-1} = \frac{m\,.\,n!}{n-m}\binom{2n-m-1}{n}$$

Nun ist wieder

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = 2^{-m}\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}(1-4x)^{\frac{r}{2}}$$

und

$$D^n\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^m = (-1)^n 2^{2n-m}\, n!\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}\binom{\frac{r}{2}}{n}$$

woraus sich durch Vergleich die Identität ergiebt

$$\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r\binom{m}{r}\binom{\frac{r}{2}}{n} = (-1)^n 2^{-2n+m}\,\frac{m}{n-m}\binom{2n-m-1}{n} \tag{8}$$

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen (7) und (8) entstehen noch die weiteren Identitäten

$$2^{2n-m+1}\sum_{r=2,4,6\ldots}^{r=2\left|\frac{m}{2}\right|}\binom{m}{r}\binom{\frac{r}{2}}{n} = (-1)^n\frac{m}{n-m}\binom{2n-m-1}{n} + \frac{m}{n}\binom{m-n-1}{n-1} \tag{9}$$

$$2^{2n-m+1}\sum_{r=1,3,5,\ldots}^{r=2\left|\frac{m-1}{2}\right|}\binom{m}{r}\binom{\frac{r}{2}}{n} = (-1)^{n-1}\frac{m}{n-m}\binom{2n-m-4}{n} + \frac{m}{n}\binom{m-n-1}{n-1} \tag{10}$$

i) Genügen die Coefficienten p, q der trinomischen Gleichung

$$y^3+py+q=0$$

der Bedingung

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0 \tag{α}$$

so giebt es nur eine einzige reelle Wurzel, nämlich

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Das Lagrang'sche Theorem ermöglicht abermals die Entwicklung einer beliebigen Potenz y^m dieser Wurzel in eine convergente Reihe.

Wenn obige Gleichung geschrieben wird

$$y = -\frac{q}{p} - \frac{y^3}{p}$$

und

$$\frac{1}{p} = x, \quad -\frac{q}{p} = z = -qx$$

gesetzt wird, so ist

$$y = z + x(-y)^3$$

somit

$$y^m = z^m + m\,x\,z^{m+2} + m \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{x^r}{r\,!} D_z{}^{r-1} z^{3r+m-1}$$

$$= z^m + m \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r} \binom{3r+m-1}{r-1} x^r z^{2r+m}$$

$$= (-qx)^m + m \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r} \binom{3r+m-1}{r-1} (-x)^{3r+m} q^{2r+m}$$

Convergenzbedingung ist

$$|x| < \tfrac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{q}\right)^2} \qquad (\beta)$$

Es ist nun

$$y^m = \left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3x}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3x}\right)^3}}\right]^m =$$

$$= (-qx)^m + m \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{3r+m} \frac{q^{2r+m}}{r} \binom{3r+m-1}{r-1} x^{3r+m} \qquad (11)$$

Hat die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln, so ist die numerisch kleinste in Rechnung zu bringen.

Schliesslich ist

$$D_x{}^n y_0{}^m = \begin{cases} 0, & n < m, \text{ oder wenn } n-m \text{ kein Vielfaches der Zal 3 ist} \\ (-1)^m q.m!, & n = m \\ (-1)^{3r+m} \dfrac{m}{r} (3r+m)!\, q^{2r+m} \binom{3r+m-1}{r-1}, & \text{wenn } n-m \text{ durch 3 teilbar ist.} \end{cases}$$

Wird q als Veränderliche betrachtet, so ist

$$D_q{}^n y_0{}^m = \begin{cases} 0, & n < m, \text{ oder wenn } n-m \text{ ungerade ist} \\ (-1)^m x\, m!, & n = m \\ (-1)^{3r+m} \dfrac{m}{r} (2r+m)! \binom{3r+m-1}{r-1} x^{3r+m} \end{cases}$$

j) Die geforderten Eigenschaften werden auch Summen und Combinationen der genannten Functionen mit oder ohne Wiederolung zur zweiten Classe besitzen.

Combinationen zu einer höheren Classe werden im allgemeinen eine independente Darstellung der Nullwerte nicht zulassen.

Die Ableitungen der Potenzen von Functionen haben in der Analysis eine besondere Wichtigkeit erlangt

Die Reihen von Lagrange, Laplace und Bürmann stützen sich auf dieselben und R. Hoppe (Theorie d. ind. Darst.der höheren Differentialquotienten, Leipzig 1845) macht die independenten Darstellungen von ihnen abhängig.

In den nun folgenden Anwendungen sollen daher vor allem anderen die Potenzen complicirterer Functionen Berücksichtigung finden,

Hierbei bedeute

$$\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}$$

eine mit x zugleich verschwindende Function von der Beschaffenheit. dass die Nullwerte der höheren Ableitungen ihrer Potenzen sich independent darstellen lassen, also eine der unter a) bis j) genannten Abhängigkeiten.

1) $F(\mathfrak{f}(x)) = \operatorname{tg}^m x$ (m eine positive ganze Zal)

$$= \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{-\frac{m}{2}}$$

Mit Benutzung der Abkürzung

$$s_n^r = (D^n \sin^r x)_0$$

wofür in (*c*) die Formeln gegeben wurden, ist

$$\operatorname{tg}^m x = \sum_{k=0}^{} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} \sin^{2k+m} x$$

und nach Satz (4)

$$D^n \operatorname{tg}^m x_0 = \sum_{k=0}^{k=\left|\frac{n-m}{2}\right|} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} s_n^{2k+m} \tag{12}$$

wo unter $\left|\frac{n-m}{2}\right|$ das „grösste Ganze" $E\left(\frac{n-m}{2}\right)$ zu verstehen ist.

2) $\sec^m x$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} \sin^{2k} x$$

$$D^n \sec^m x_0 = \sum_{k=1}^{k=\left|\frac{n}{2}\right|} \binom{k+\frac{m}{2}-1}{k} s_n^{2k} \tag{13}$$

3) $1 - x\cot x =$

$$= \tfrac{1}{3} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\sin^{2k+2} x}{\binom{k+\frac{3}{2}}{k}}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$$

$$D^n(1 - x\cot x)_0 = \tfrac{1}{3} \sum_{k=0}^{k=\left|\frac{n-2}{2}\right|} (-1)^k \frac{s_n^{2k+2}}{\binom{k+\frac{3}{2}}{k}} \tag{14}$$

Andererseits ist

$$1 - x\cot x = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k)!} B_k (2x)^{2k}, \quad -\pi < x < +\pi$$

wo $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... die Bernoulli'schen Zalen bedeuten; ferner

$$D^n(1-x\cot x)_0 = \begin{cases} 2^n \frac{Bn}{2}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Gleichstellung beider Ergebnisse ergiebt für diese Zalen den independenten Ausdruck

$$B_n = \frac{1}{2^{2n}.3} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \frac{s_{2n}{}^{2k+2}}{\binom{k+\frac{3}{2}}{k}} \tag{15}$$

Durch Erheben der Reihe für $1-x\cot x$ zur $m$ten Potenz entsteht

$$z^m = \frac{m!}{3^m} \sum_{r=0} \frac{1}{\alpha_0!\binom{\frac{3}{2}}{0}^{\alpha_0}} \frac{1}{\alpha_1!\binom{1+\frac{3}{2}}{1}^{\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_2!\binom{2+\frac{3}{2}}{2}^{\alpha_2}} \ldots \sin^{2m+2r}x$$

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots = r$$

wobei abkürzungsweise

$$\left[\binom{k+\frac{3}{2}}{k}\right]^\alpha = \binom{k+\frac{3}{2}}{k}^\alpha$$

gesetzt, und die Zal r aus m ungleichen oder gleichen Zalen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ der Zeigerreihe 0, 1, 2, 3. . . . auf alle verschiedenen Arten zusammenzusetzen ist. Es ist dann

$$D^n(1-x\cot x)^m{}_0 = \frac{1}{3^m} m! \sum \frac{1}{\alpha_0!} \frac{1}{\alpha_1!\binom{1+\frac{3}{2}}{1}^{\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_2!\binom{2+\frac{3}{2}}{2}^{\alpha_2}} \ldots s_n{}^{2m+2r}$$

$$\underbrace{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2\ldots}_{n} = r \tag{16}$$

Ein vollkommen independenter Ausdruck wird später gegeben werden.

4.

$$\frac{x}{\cos x} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\sin^{2k+1}x}{\binom{k+\frac{1}{2}}{k}}, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

(Aus d. Sammlung mathemat. Formeln v. Laska)

$$= x + \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{E_h x^{2h+1}}{(2h)!}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Der Vergleich der Nullwerte der $2n+1$ten Ableitungen beider Reihen ergiebt für die Euler'schen Zalen die independente Formel

$$E_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{s_{2n+1}{}^{2k+1}}{\binom{k+\frac{1}{2}}{k}} \tag{17}$$

5.

Ein allgemeines Verfahren zur directen Bestimmung der Nullwerte höherer Ableitungen der Potenzen von Functionen fliesst aus der Betrachtung des vorigen Beispiels (3).

Lässt sich die vorgelegte Function $F(x)$ nach einer Function „$\mathfrak{f}(x)$" entwickeln

$$F(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} a_r \mathfrak{f}(x)^r$$

so gilt nach dem polynomischen Lehrsatze

$$[F(x)]^m = m! \sum_{r=0}^{r=\infty} \sum \frac{a_0{}^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \frac{a_1{}^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \frac{a_2{}^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \cdots \mathfrak{f}(x)^r$$

wo für die m, der Bedingung

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = r$$

genügenden Zalen α_0, α_1, α_2, ... alle ungleichen und gleichen positiven Werte zu setzen sind.

Die Nullwerte der höheren Ableitungen stellen sich hiernach als endliche Reihen dar.

Eine Entwicklung dieser Art ist bekanntlich die von Bürmann, in welcher

$$a_k = \frac{1}{k!} \left\{ D_x{}^{k-1} \left[\left(\frac{x-x_0}{\mathfrak{f}(x)} \right)^k F'(x) \right] \right\}_{x=x_0}$$

und x_0 ein Anfangswert ist, welcher mod $\mathfrak{f}(x)$ zum Verschwinden bringt. Nach den über „$\mathfrak{f}(x)$" gemachten Voraussetzungen ist hier

$$x_0 = 0$$

Damit sich diese Coefficienten unabhängig bestimmen, muss $\mathfrak{f}(x)$ so gewält werden, dass die Nullwerte der Ableitungen von $\left(\frac{x}{\mathfrak{f}(x)}\right)^k$ ebenfalls independent darstellbar sind; selbstverständlich muss dasselbe auch bei $D^r F(x)_0$ eintreffen. Die Auswal wird daher

eine sehr beschränkte sein. Dieses Verfahren kann auch mit Vorteil zur Ableitung von Identitäten verwendet werden.

Sei z. B.

$$F(x) = x^2$$

so ist

$$F'(x) = 2x$$

ferner

$$\mathfrak{f}(x) = \frac{x^2}{e^{hx}(e^x - 1)}$$

daher

$$\frac{x}{\mathfrak{f}(x)} = \frac{e^{hx}}{x}(e^x - 1)$$

und

$$a_k = \frac{2}{k!} D^{k-1} \frac{e^{hkx}(e^x - 1)^k}{x^{k-1}}_0$$

Sei

$$e^{hkx}(e^x - 1)^k = z$$

so ist $\frac{z}{x^{k-1}}$ von der Form $\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots$ u. die Nullwerte sämtlicher Ableitungen sind endlich, somit ist

$$D^{2k-2} z_0 = D^{2k-2} x^{k-1} \cdot \frac{z}{x^{k-1}} = \binom{2k-2}{k-1} (k-1)!\, D^{k-1} \frac{z}{x^{k-1}}$$

daher

$$D^{k-1} \frac{z}{x^{k-1}} = \frac{1}{(k-1)! \binom{2k-2}{k-1}} D^{2k-2} z_0$$

folglich mit Benutzung der in e) bereits ermittelten $D^{2k-2} z_0$

$$a_k = \frac{2}{(2k-2)!\, k} \Big[\overline{hk+k}^{2k-2} - \binom{k}{1} \overline{kh+k-1}^{2k-2} + - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \overline{kh+1}^{2k-2} + (-1)^k \binom{k}{k} \overline{kh}^{2k-2} \Big]$$

mithin ist

$$x^2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \left(\frac{x^2}{e^{hx}(e^x - 1)} \right)^k, \qquad (a_0 = 0)$$

Eine n malige Differentiation ergiebt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k D^n \frac{x^{2k}}{e^{hkx}(e^x - 1)^k}_{x=0} = \begin{cases} 0, & n \gtrless 2 \\ 2, & n = 2 \end{cases}$$

$$= D^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k x^k}{e^{hkx}(e^x - 1)^k}_{x=0}$$

Den Fall $n = 2$ ausgeschlossen, gilt auch

$$D^n \sum_{k=1}^{k=n} a_k \frac{x^{2k}}{e^{hkx}(e^x-1)^k} e^{hnx}.(e^x-1)^n = 0$$

weil die Nullwerte der n ersten Ableitungen von

$$e^{hnx}(e^x-1)^n \quad \text{sowie} \quad \frac{x^{2k}}{e^{hkx}(e^x-1)^k}$$

für $x = 0$ verschwinden.

Nach vollzogener Multiplication ist

$$D^n \sum_{k=1}^{k=n} a_k x^{2k} e^{h(n-k)x}(e^x-1)^{n-k} = 0 \qquad \left(n \gtrless 2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} a_k (2k)! \binom{n}{2k} D^{n-2k}(e^{hx}.\overline{e^x-1}^{n-k}$$

$$x=0$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} a_k (2k)! \binom{n}{2k}\left(\overline{h+1}\,.\,\overline{n-k}^{n-2k} - \binom{n-k}{1}\overline{h+1}\,.\,\overline{n-k-1}^{n-2k}\right.$$

$$\left. + \binom{n-k}{2}\overline{h+1}\;\overline{n-k}^{n-2k} - + \ldots\right.$$

$$\ldots + (-1)^{n-k}\binom{n-k}{2}\overline{n-k}\;\overline{h+2}^{n-2k} + (-1)^{n-k+1}\times$$

$$\times \binom{n-k}{1}\overline{n-k}\,.\,\overline{h+1}^{n-2k}$$

$$\left. + (-1)^{n-k}\binom{n-k}{0}\overline{n-k}\,.\,\overline{h}^{n-2k}\right) = 0$$

Sei

$$A_r^{m,p} = r^p - \binom{m}{1}\overline{r-1}^p + \binom{m}{2}\overline{r-2}^p - + \ldots \qquad (18')$$

$$\ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1}\overline{r-m+1}^p + (-1)^m\binom{m}{0}\overline{r-m}^p$$

so ist die unter dem Summenzeichen stehende Summe

$$= \underset{(h+1)(n-k)}{\overset{n-k,\ n-2k}{A}}$$

und

$$a_k = \frac{2}{(2k-2)!}\,\underset{(h+1)k}{\overset{k,\ 2k-2}{A}}$$

Obige Identität schreibt sich dann mit Auslassung des gemeinsamen Factors 4

$$\sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)\binom{n}{2k} \underset{(h+1)k}{A^{k,\ 2k-2}} \underset{(h+1)(n-k)}{A^{n-k,\ n-2k}} = 0 \tag{18}$$

Für $h = 0$ ist

$$\sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)\binom{n}{2k}\left(k^{2k+2} - \binom{k}{1}\overline{k-1}^{2k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{1} 1^{2k-1}\right) \times$$
$$\times \left(\overline{n-k}^{n-2k} - \binom{n-k}{1}\overline{n-k-1}^{n-2k} + \ldots + (-1)^{n-k+1}\binom{n-k}{1} 1^{n-2k}\right) \tag{19}$$

6.

$$z = \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$$

$$= \frac{ix}{e^{ix}-1} + \frac{ix}{2}; \qquad D_x^n z^m = i^n D_{xi}^n z^m$$

Aus der Theorie der Facultäten-Coefficienten $\overset{h}{C}_{k}$ ist bekannt, dass

$$D^k\left(\frac{v}{e^v-1}\right)_0^h = \frac{(-1)^k \overset{h}{C}_{k}}{\binom{h-1}{k}}$$

folglich

$$D_x^n z_0^m = i^n \sum_{r=0}^{r=m}\binom{m}{r} D_{xi}^n \left\{\left(\frac{xi}{e^{xi}-1}\right)^r \left(\frac{xi}{2}\right)^{m-r}\right\}_0$$

$$= i^n \sum_{r=0}^{r=m} 2^{-m+r}\binom{m}{r}\binom{n}{m-r}(n-r)!\, D^{n-m+r}\left(\frac{xi}{e^{xi}-1}\right)_0^r$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}-m} n!\,(n-m-1)!\, 2^{-m} \sum_{r=0}^{r=m} (-2)^r \binom{m}{r} \overset{r}{C}_{n-m+r} \quad n \text{ gerade} \tag{20}$$

7.

Durch unmittelbares Potentiren von

$$1 - \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \sum_{r=1} \frac{B_r}{(2r)!} x^{2r} \qquad -2\pi < x < +2\pi \tag{21}$$

entsteht ein Resultat von der Form

$$\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^m = x^{2m} \sum_{p=0,1,2\ldots} \overset{m}{\mathfrak{B}}_{2p}\, x^{2p}$$

und

$$D^n\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^m_{\,0} = \begin{cases} n! \; \overset{m}{\mathfrak{B}}_{n-2m} & n \text{ gerade} \\ 0, & n < 2m \quad \text{oder ungerade} \end{cases}$$

Hierin bedeuten $\overset{m}{\mathfrak{B}}_{2p}$ combinatorische Aggregate bezüglich der Bernoulli'schen Zalen B_r homogen vom Grade m.

Für die $\overset{2}{\mathfrak{B}}_{p}$ vom Grade zwei hat Euler auf sehr mühsamem Wege einfache Beziehungen gefunden (Inst. Calc. diff. P. II. cap. 5)

Klügel giebt in seinem Wörterbuche zwei Methoden an, welche dieselben sehr rasch finden lehrt. Sie stützen sich darauf, dass

a) der Differentialquotient y' von $y = \cot x$ durch y, und
b) die Cotangente eines Bogens durch diejenige des halben ausgedrückt werden kann.

Es ist

$$y' = -1-y^2 \qquad \text{und}$$

$$\cot x = \frac{\cot^2\frac{x}{2}-1}{2\cot\frac{x}{2}}$$

In beiden Fällen entstehen nach Einsetzung der gleichwertigen Reihen Gleichungen, welche nach dem Satze der „unbestimmten Coefficienten" die Euler'schen Formeln liefern.

8.

Beziehungen zwischen den Coefficienten $\overset{m}{\mathfrak{B}}_{p}$.

Das genannte Formel-System lässt sich sehr erweitern.

Der Ausgangspunkt dieser Entwicklung ist die Function

$$y = \tfrac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$$

Durch wiederholtes Differentiiren und Einsetzung niedrigerer Ableitungen durch bereits gefundene Ausdrücke kann irgend eine Potenz y^m linear durch die Differentialquotienten, deren Index $< m$ ist, ausgedrückt werden.

Es ist

$$y = \tfrac{1}{2}\cot\frac{x}{2}, \quad y' = -\tfrac{1}{4} - y^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 = -\tfrac{1}{4} - y'; \qquad \text{ferner}$$

$$2yy' = -y'', \quad \text{d. h.} \quad -2y(\tfrac{1}{4} - y^2) = -y'' \quad \text{oder}$$

$$y^3 = -\tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}y''$$

ebenso findet sich

$$y^4 = \frac{1}{4^2} + \frac{y'}{3} - \frac{y'''}{6}$$

$$y^5 = \frac{1}{4^2}y - \frac{5}{24}y_{''} + \frac{y^{IV}}{24}$$

. . . . . .

hieraus kann auf das allgemeine Bildungsgesetz

$$y^{2n} = \underset{0}{\overset{2n}{a}} + \underset{1}{\overset{2n}{a}}\, y' + \underset{3}{\overset{2n}{a}}\, y''' \ldots + \underset{2n-1}{\overset{2n}{a}}\, y^{(2n-1)} \tag{23}$$

$$y^{2n+1} = \underset{0}{\overset{2n+1}{a}}\, y + \underset{2}{\overset{2n+1}{a}}\, y'' \ldots + \underset{2n}{\overset{2n+1}{a}}\, y^{(2n)} \tag{24}$$

geschlossen werden. Dasselbe lässt sich mittelst der Bemerkung verificiren, dass eine gerade Potenz der Reihe für y nur gerade positive Potenzen von x, und eine ungerade Potenz dieser Reihe nur ungerade Potenzen von x enthält; dass ferner die geraden Ableitungen derselben Reihe nur ungerade, und die ungeraden Ableitungen nur gerade Potenzen von x aufweisen.

Mit Ausnahme von $\underset{0}{\overset{2n}{a}}$ ergeben sich alle Coefficienten mit Hilfe des Satzes der „unbestimmten Coefficienten".

Es ist

$$y^{2n} = x^{-2n}\left(1 - 1 + \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$= x^{-2n} - \binom{2n}{1}\underset{0}{\mathfrak{B}}\, x^{-2n+2} + \left(-\binom{2n}{1}\underset{2}{\mathfrak{B}} + \binom{2n}{2}\underset{0}{\mathfrak{B}}\right) x^{-2n+4} + \ldots$$

$$\ldots+\Big(-\binom{2n}{1}\overset{1}{\underset{2n-2r-2}{\mathfrak{B}}}+\binom{2n}{2}\overset{2}{\underset{2n-2r-4}{\mathfrak{B}}}-$$

$$-\binom{2n}{3}\overset{3}{\underset{2n-2r-6}{\mathfrak{B}}}\ldots+(-1)^{n-r}\binom{2n}{n-r}\overset{n-r}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}\Big)x^{-2r}+\ldots$$

$$\ldots+\Big(-\binom{2n}{1}\overset{1}{\underset{2n-4}{\mathfrak{B}}}+\binom{2n}{2}\overset{2}{\underset{2n-6}{\mathfrak{B}}}-+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\overset{n-1}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}\Big)x^{-2}+\Big(-\binom{2n}{1}\overset{1}{\underset{2n-2}{\mathfrak{B}}}$$

$$+\binom{2n}{2}\overset{2}{\underset{2n-4}{\mathfrak{B}}}-\ldots+(-1)^{n}\binom{2n}{n}\overset{n}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}\Big)+\ldots$$

$$=\overset{2n}{a}_{-}-1!\overset{2n}{\underset{1}{a}}x^{-2}-3!\overset{2n}{\underset{3}{a}}x^{-4}-\ldots-(2r-1)!\overset{2n}{\underset{2r-1}{a}}x^{-2r}-\ldots$$

$$\ldots-(2n-1)!\overset{2n}{\underset{2n-1}{a}}x^{-2n}+\ldots$$

hieraus folgt

$$\overset{2n}{\underset{2r-1}{a}}=\frac{1}{(2r-1)!}\Big(\binom{2n}{1}\overset{1}{\underset{2n-2r-2}{\mathfrak{B}}}-\binom{2n}{2}\overset{2}{\underset{2n-2r-4}{\mathfrak{B}}}$$

$$+\binom{3n}{3}\overset{3}{\underset{2n-2r-6}{\mathfrak{B}}}\ldots+(-1)^{n-r-1}\binom{2n}{n-r}\overset{n-r}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}\Big)\qquad r<n\quad(25)$$

speciell

$$\overset{2n}{\underset{2n-1}{a}}=-\frac{1}{(2n-1)!}$$

ferner

$$\overset{2n+1}{\underset{2r}{a}}=-\frac{1}{(2r)!}\Big(\binom{2n+1}{1}\overset{1}{\underset{2n-2r-2}{\mathfrak{B}}}-\binom{2n+1}{2}\overset{2}{\underset{2n-2r-4}{\mathfrak{B}}}$$

$$+\binom{2n+1}{3}\overset{3}{\underset{2n-2-6}{\mathfrak{B}}}-\ldots+(-1)^{n-r-1}\binom{2n+1}{n-r}\overset{n-r}{\underset{0}{\mathfrak{B}}}\Big)$$

$$r<n\qquad(26)$$

$$\overset{2n+1}{\underset{2n}{a}}=+\frac{1}{(2n)!}$$

Es erübrigt noch den Coefficienten $\overset{2n}{\underset{p}{}}$ zu bestimmen.

Die Differentiation der Gleichung (24) ergiebt

$$(2n+1)y^{2n}.y' = \underset{0}{\overset{2n}{a}}\, y' + \ldots$$

oder weil

$$y' = -\tfrac{1}{4} - y^2$$

ist, auch

$$-\frac{2n+1}{4}y^{2n} - (2n+1)y^{2n+2} = \underset{0}{\overset{2n}{a}}\, y' + \ldots$$

nun ist

$$y^{2n} = \underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}} + \underset{1}{\overset{2n}{a}}\, y' + \ldots$$

dies in die vorhergehende Gleichung gesetzt giebt

$$y^{2n+2} = -\,\underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}} + \ldots$$

nach (23), wenn $2n+2$ statt $2n$ gesetzt wird, aber auch

$$= \underset{\underline{\ }}{\overset{2n+2}{a}}$$

somit

$$\underset{\underline{\ }}{\overset{2n+2}{a}} = -\tfrac{1}{4}\,\underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}} \qquad \text{da} \qquad \underset{\underline{\ }}{a}^2 = -\tfrac{1}{4}$$

ist, so folgt

$$\underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}} = (-1)^n \frac{1}{4^n} \tag{27}$$

Wird jetzt die Gleichung (23) mit x^{2n}, und (24) mit x^{2n+1} multiplicirt, beide sodann $2k$mal differentiirt und schliesslich $x = 0$ genommen, so kommt

$$D^{2k}(xy)^{2n}{}_0 = \underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}}\, D^{2k}x^{2n}{}_0 + \sum_{p=1}^{p=n} \underset{2p-1}{\overset{2n}{a}}\, D^{2k}(x^{2n-2p}.x^{2p}y^{(2n-1)})_0$$

$$= \underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}}\, D^{2k}x^{2n}{}_0 + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{2k}{2n-2p}(2n-2p)! \underset{2p-1}{\overset{2n}{a}}\, D^{2k-2n+2p}(x^{2p}y^{(2p-1)})_0$$

Das erste Glied verschwindet, wenn $2k \lesseqgtr 2n$ ist; für $2k = 2n$ ist

$$\underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}}\, D^{2k}x^{2n}{}_0 = (2n)! \underset{\underline{\ }}{\overset{2n}{a}} = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n}$$

Aus (21) folgt weiter

$$x^{2p}\,y^{(2p-1)} = -(2p-1)! - \sum_{h=p} \frac{B_h x^{2h}}{2h\,(2h-2p)!}$$

ferner

$$D^{2k-2n+2p}(x^{2p}\,y^{(2p-1)})_0 = -\frac{(2k-2n+2p-1)!}{(2k-2n)!}\,B_{k-n+p}$$

somit nach leichter Reduction

$$D^{2k}(xy)^{2n}{}_0 = \underset{\sim}{\overset{2n}{a}}\, D^{2k}x^{2n}{}_0 - \frac{(2k)!}{(2k-2n)!}\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\overset{2n}{\underset{\sim}{a}}_{2p-1}}{2k-2n+2p}\,B_{k+p-n} \qquad (28)$$

Andererseits ist

$$D^{2k}(xy)^{2n}{}_0 = D^{2k}\left[1-\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\right]^{2n}{}_0$$

$$= D^{2k}\sum_{h=0}^{h=2n}(-1)^h\binom{2n}{h}\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)^h{}_0$$

und mit Rücksicht auf (22)

$$= \sum_{h=1}^{h=2n}(-1)^h\binom{2n}{h}D^{2k}\left[x^{2h}\sum_{p=0,1,2,\ldots}{}^{h}_{2p}\mathfrak{B}\,x^{2p}\right]_0$$

$$= \sum_{h=1}^{h=2n}(-1)^h\binom{2n}{h}\binom{2k}{2h}(2h)!\;D^{2k-2h}\left(\sum_{p=0}{}^{h}_{2p}\mathfrak{B}\,x^{2p}\right)_0$$

$$= (2k)!\sum_{h=1}^{h=2n}(-1)^h\binom{2n}{h}\,{}^{h}_{2k-2h}\mathfrak{B} \qquad (29)$$

Die den ungeraden Potenzen y^{2n+1} entsprechenden Ergebnisse gehen aus den eben abgeleiteten hervor, wenn $2n+1$ statt $2n$, in (27) als unterer Zeiger von a $2p$ statt $2p-1$, dann als untere Grenze $p=0$ genommen und endlich das Glied mit $\underset{\sim}{\overset{2n}{a}}$ unterdrückt wird.

Die für $k < 2n$ mit negativem unteren Zeiger behafteten ${}^{h}_{2k-2h}\mathfrak{B}$ verschwinden. In diesem Falle brauchen sich die rechtsseitigen Summen nur auf solche h zu erstrecken, für welche $2k-2h$ nicht negativ und $\binom{2n}{h}$ bezhw. $\binom{2n+1}{h}$ von null verschieden ist.

Das Gesamt-Ergebniss lässt sich nun wie folgt aussprechen.

„Zwischen den Coefficienten $\mathfrak{B}^m$ der Entwicklungen von

$$\left(1-\frac{x}{2}\cot\frac{}{2}\right)^m, \quad m=1,\,2,\,3\,\ldots\,2n, \quad \text{bzhw.} \quad 2n+1$$

„bestehen folgende Beziehungen"

a) $2k > 2n$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{h\leqq k \text{ u. } \leqq 2n} (-1)^{h+1}\binom{2n}{h}\underset{2k-2h}{\overset{h}{\mathfrak{B}}} = \\
&\frac{1}{(2k-2n)!}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\overset{2n}{\underset{2p-1}{a}}}{2k-2n+2p}B_{k+p-n} \\
&\overset{2n}{\underset{2p-1}{a}} = \frac{1}{(2p-1)!}\sum_{r=1}^{r=n-p}(-1)^{r-1}\binom{2n}{r}\underset{2n-2p-2r}{\overset{r}{\mathfrak{B}}} \\
&\qquad p<n, \quad \overset{2n}{\underset{2n-1}{a}} = -\frac{1}{(2n-1)!}
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

b) $2k = 2n$

$$\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^{h+1}\binom{2n}{h}\underset{2n-2h}{\overset{h}{\mathfrak{B}}} = (-1)^{n+1}\frac{1}{4^n} + \sum_{p=1}^{p=n}\frac{\overset{2n}{\underset{2p-1}{a}}}{2p}B_p \tag{31}$$

c) $2k > 2n+1$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{h\leqq k \text{ u. } \leqq 2n+1} (-1)^{h+1}\binom{2n+1}{h}\underset{2k-2h}{\overset{h}{\mathfrak{B}}} = \\
&= \frac{1}{(2k-2n-1)!}\sum_{p=0}^{p=n}\frac{\overset{2n+1}{\underset{2p}{a}}}{2k-2n+2p}B_{k-n+p} \\
&\overset{2n+1}{\underset{2p}{a}} = \frac{1}{(2p)!}\sum_{r=1}^{r=n-p}(-1)^{r}\binom{2n+1}{r}\underset{2n-2p-2r}{\overset{r}{\mathfrak{B}}} \\
&\qquad p<n; \quad \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}} = +\frac{1}{(2n)!}
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Die obere Grenze der rechtsseitigen Summen bildet die grösste Zal, welche gleichzeitig $\leq k$ und $\leq 2n$ bzhw. $2n+1$ ist.

Diese allgemeinen Formeln umfassen eine zweifach unendliche Anzal specieller Formeln.

Jedem m entspricht ein System von Formeln, die aus obigen durch die Einsetzungen

$$k = \left|\frac{n+1}{2}\right|, \quad \left|\frac{n+1}{2}\right|+1, \quad \left|\frac{n+1}{2}\right|+2, \ldots$$

entstehen.

Im Folgenden werden die ersten vier Systeme entwickelt.

$$\underline{m = 1}$$

$m = 2n+1 = 1$, $n = 0$. $k = 2, 4, 6, \ldots$

$$\mathfrak{B}^{1}_{2k-2} = \frac{1}{(2k)!} B_k \tag{33}$$

$$\underline{m = 2}$$

$m = 2n = 2$, $n = 1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$a^{2}_{1} = -1, \quad \mathfrak{B}^{1}_{2k-2} = \frac{B_k}{(2k)!} \quad \ldots$$

Für $k = 1$ ist $2k = 2n$, daher tritt die Formel (31) in Wirksamkeit; das Resultat ist $B_1 = \frac{1}{6}$.

Die Formel (30) liefert

$$2\mathfrak{B}^{1}_{2k-2} - \mathfrak{B}^{2}_{2k-4} = -\frac{B_k}{2k(2k-2)!}$$

woraus

$$\mathfrak{B}^{2}_{2k-4} = \frac{2k+1}{(2k)!} B_k \tag{34}$$

In dieser Relation sind sämtliche Euler'sche Formeln die Coefficienten $\mathfrak{B}^2$ betreffend enthalten. Von der Abkürzung

$$\frac{B_k}{(2k)!} = \mathfrak{b}_k$$

Gebrauch machend, lauten dieselben

$$\frac{1}{2!\,2} = 3\mathfrak{b}_1 \qquad 2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4 + 2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 = 11\mathfrak{b}_5$$

$$\mathfrak{b}_1^2 = 5\mathfrak{b}_2 \qquad 2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_5 + 2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4 + \mathfrak{b}_3^2 = 13\mathfrak{b}_6$$

$$2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = 7\mathfrak{b}_3 \qquad 2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_6 + 2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_5 + 2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 = 15\mathfrak{b}_7$$

$$2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_2^2 = 9\mathfrak{b}_4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underset{2k-4}{\overset{2}{\mathfrak{B}}} = 2!\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{b}_g^{\alpha}\,\mathfrak{b}_h^{\beta}}{\alpha!\,\beta!} = (2k+1)\,\mathfrak{b}_k$$

$$\alpha + \beta = 2 \qquad \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2$$

$$\alpha g + \beta h = k \qquad g,\ h = 1,\ 2,\ \ldots\ k-1$$

$$\underline{m = 3}$$

$m = 2n+1 = 3$, $n = 1$, $k = 2, 3, \ldots$ Nach Formel c) ist

$$h \leqq k \text{ u. } \leqq 3$$

$$\Sigma(-1)^{h+1}\binom{3}{h}\underset{2k-2h}{\overset{h}{\mathfrak{B}}} = \frac{1}{(2k-3)!}\sum_{p=0}^{p=1}\frac{\overset{3}{\underset{2p}{a}}}{2k+2p-2}B_{k+p-1}$$

$$\overset{3}{\underset{2}{a}} = \tfrac{1}{2},\quad \overset{3}{\underset{0}{a}} = -\binom{3}{1}\underset{0}{\overset{1}{\mathfrak{B}}} = -\frac{3}{2!}B_1 = -\tfrac{1}{4}$$

Wenn die aus allen $k < m$ hervorgehenden Beziehungen als belanglos unbeachtet bleiben, so ist

$$\binom{3}{1}\underset{2k-2}{\overset{1}{\mathfrak{B}}} - \binom{3}{2}\underset{2k-4}{\overset{2}{\mathfrak{B}}} + \binom{3}{3}\underset{2k-6}{\overset{3}{\mathfrak{B}}} =$$

$$\frac{1}{(2k-3)!}\left(\frac{\overset{3}{\underset{0}{a}}}{2k-2}B_{k-1} + \frac{\overset{3}{\underset{2}{a}}}{2k}B_k\right)$$

Hierin ist laut (33) und (34)

$$\underset{2k-2}{\overset{1}{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{b}_k,\quad \underset{2k-4}{\overset{2}{\mathfrak{B}}} = (2k+1)\mathfrak{b}_p$$

somit

$$\underset{2k-6}{\overset{3}{\mathfrak{B}}} = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_{k-1} + (2k+1)(k+1)\mathfrak{b}_k \tag{25}$$

$$k = 3,\quad \underset{0}{\overset{3}{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{b}_1^3 = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_2 + 4.7\mathfrak{b}_3$$

$$k=4,\quad \overset{3}{\underset{2}{\mathfrak{B}}} = 3\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{b}_2 = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_3 + 5\ 9\mathfrak{b}_4$$

$$k=5,\quad \overset{3}{\underset{4}{\mathfrak{B}}} = 3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2^2 + 3\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{b}_3 = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_4 + 6.11\mathfrak{b}_5$$

$$k=6,\quad \overset{3}{\underset{6}{\mathfrak{B}}} = 3\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{b}_4 + 6\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_5 + 7.13.\mathfrak{b}_6$$

$$k=7,\quad \overset{3}{\underset{8}{\mathfrak{B}}} = 3\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{b}_5 + 3\mathfrak{b}_2^2\mathfrak{b}_3 + 3\mathfrak{b}_3^2\mathfrak{b}_1 + 6\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4 = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_6 + 8.15.\mathfrak{b}_7$$

. . . . . .

Infolge des polynomischen Lehrsatzes kann die Formel (35) geschrieben werden

$$\sum \frac{\mathfrak{b}_f^{\alpha}}{\alpha!}\frac{\mathfrak{b}_g^{\beta}}{\beta!}\frac{\mathfrak{b}_h^{\gamma}}{\gamma!} = -\frac{1}{4!}\mathfrak{b}_{k-1} + \frac{1}{3!}(k+1)(2k+1)\mathfrak{b}_k \qquad (36)$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 3, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$\alpha f+\beta g+\gamma h = k, \qquad f,\ g,\ h = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$$\underline{m=4}$$

$m = 2n = 4,\ n = 2,\ k = 4,\ 5,\ \ldots$

$$\sum_{h=1}^{h=4}(-1)^{h+1}\binom{4}{h}\overset{h}{\underset{2k-2h}{\mathfrak{B}}} = \frac{1}{(2k-4)!}\sum_{p=1}^{p=2}\overset{a}{\underset{2k+2p-4}{\frac{2p-1}{}}}B_{k+p-2}$$

$$\overset{4}{\underset{2p-1}{a}} = \frac{1}{(2p-1)!}\sum_{r=1}^{r=2-p}(-1)^{r-1}\binom{4}{r}\overset{r}{\underset{4-2p-2r}{\mathfrak{B}}}$$

$$\overset{4}{\underset{1}{a}} = 4\overset{1}{\underset{0}{\mathfrak{B}}} = 4\mathfrak{b}_1 = \tfrac{1}{3},\quad \overset{4}{\underset{3}{a}} = -\frac{1}{3!}$$

$$\binom{4}{1}\overset{1}{\underset{2k-2}{\mathfrak{B}}} - \binom{4}{2}\overset{2}{\underset{2k-4}{\mathfrak{B}}} + \binom{4}{3}\overset{3}{\underset{2k-6}{\mathfrak{B}}} - \binom{4}{4}\overset{4}{\underset{2k-8}{\mathfrak{B}}} =$$

$$= \frac{1}{(2k-4)!}\left(\frac{B_{k-1}}{6k-6} - \frac{B_k}{12k}\right) =$$

$$= \frac{2k-3}{3}\mathfrak{b}_{k-1} - \frac{1}{3!}(6k-1)(2k-2)(2k-3)\mathfrak{b}_k$$

Mit Rücksicht auf die aus (29), (29′) und (30) bekannten ersten 3 Glieder ist nach gehöriger Reduction

$$\mathop{\mathfrak{B}}_{2k-8}^{4} = 4!\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{b}_f{}^{\alpha}}{\alpha!}\,\frac{\mathfrak{b}_g{}^{\beta}}{\beta!}\,\frac{\mathfrak{b}_h{}^{\gamma}}{\gamma!}\,\frac{\mathfrak{b}_i{}^{\delta}}{\delta!} = -\tfrac{2}{3}k\mathfrak{b}_{k-1} + \tfrac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\mathfrak{b}_k \tag{37}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 4$ $\qquad$ $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\alpha f+\beta g+\gamma h+\delta i = k,$ $\qquad$ $f,\ g,\ h,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

$k = 4,\quad \mathop{\mathfrak{B}}_{0}^{4} = \mathfrak{b}_1{}^4 = -\frac{8}{3}\mathfrak{b}_3 + 165\mathfrak{b}_4$

$= 5,\quad \mathop{\mathfrak{B}}_{2}^{4} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_2 = -\frac{10}{3}\mathfrak{b}_4 + 286\mathfrak{b}_5$

$= 6,\quad \mathop{\mathfrak{B}}_{4}^{4} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_3 + 6\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_2{}^2 = -4\mathfrak{b}_5 + 455\mathfrak{b}_6$

$= 7,\quad \mathop{\mathfrak{B}}_{6}^{4} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_4 + 4\mathfrak{b}_2{}^3\mathfrak{b}_1 + 12\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 = -\frac{14}{3}\mathfrak{b}_6 + 680\mathfrak{b}_7$

$= 8,\quad \mathop{\mathfrak{B}}_{8}^{4} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_5 + \mathfrak{b}_2{}^4 + 6\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_3{}^2 = -\frac{16}{3}\mathfrak{b}_7 + 969\mathfrak{b}_8$

$= 9,\quad \mathop{\mathfrak{B}}_{10}^{4} = 4\mathfrak{b}_1{}^3\mathfrak{b}_6 + 4\mathfrak{b}_2{}^3\mathfrak{b}_3 + 6\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 + 6\mathfrak{b}_1{}^2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_5 + 6\mathfrak{b}_2{}^2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4 + 6\mathfrak{b}_3{}^2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = -6\mathfrak{b}_8 + 1330\mathfrak{b}_9$

. . . . . .

9.

Für die Euler'schen Zalen und ihre Combinationen lassen sich ähnliche Formelsysteme aufstellen.

Die Differentiation von

$$y = \sec x$$

ergiebt

$$y' = \sin x \,.\, y^2, \quad \text{ferner}$$

$$y'' = 2y^3 - y \quad \text{oder}$$

$$y^3 = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y''$$

ebenso findet sich

$$y^5 = \frac{3}{8}y + \frac{5}{12}y'' + {}_2{}^1{}_4 y^{IV}$$

. . . . . .

hieraus kann auf das folgende allgemeine Bildungsgesetz geschlossen werden

$$y^{2n+1} = \overset{2n+1}{\underset{0}{a}} y + \overset{2n+1}{\underset{2}{a}} y'' + \ldots + \overset{2n+1}{\underset{2n-2}{a}} \overline{y^{2n-2}} + \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}} \overline{y^{2n}} \qquad (38)$$

Die hier auftretenden Coefficienten sollen nun bestimmt werden.

Es ist

$$y = \sec x = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + 2\sum_{r=1} \frac{2^{2r-1}-1}{(2r)!} B_r \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2r-1}$$

$$y^{(2r)} = \frac{(2r)!}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2r+1}} + 2\sum_{p=1} \frac{2^{2r+2p-1}-1}{(2p-1)!\,(2r+2p)} B_{p+r} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2p-1}$$

Durch Erheben obiger Reihe zur $2n+1$ten Potenz entsteht ein Resultat von der Form

$$y^{2n+1} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2n+1}} + \frac{\overset{2n+1}{\mathfrak{C}}_1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2n-1}} + \ldots + \frac{\overset{2n+1}{\mathfrak{C}}_{n-r}}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2r+1}} + \ldots$$

Wird $r = 0, 1, 2, \ldots$ gesetzt, die für y'', $\overline{y^{(4)}}$, $\ldots$ $\overline{y^{2n}}$ und y^{2n+1} entsprechenden Reihen in die Gleichung (38) substituirt, so ergiebt die Vergleichung gleich hoher negativer Potenzen von $\frac{\pi}{2} - x$

$$\overset{2n+1}{\underset{2r}{a}} = \frac{1}{(2r)!} \overset{2n+1}{\underset{n-r}{\mathfrak{C}}}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots n$$

insbesondere ist für $r = n$

$$\overset{2n+1}{\underset{0}{\mathfrak{C}}} = 1, \quad \text{daher} \quad \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}} = \frac{1}{(2n)!}$$

Die geraden Potenzen lassen sich nicht linear durch die Ableitungen darstellen, wol aber $y^{2n} \sin x$

Die Differentiation von (24) ergiebt

$$\overline{2n+1}\, y^{2n} y' = \overset{2n+1}{\underset{0}{a}}\, y' + \overset{2n+1}{\underset{2}{a}}\, y''' + \ldots + \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}}\, y^{\overline{2n+1}}$$

$$y^{2n} y' = y^{2n+2} \sin x$$

$$2n+1\; y^{2n+2} \sin x = \overset{2n+1}{\underset{0}{a}}\, y' + \ldots + \overset{2n+1}{\underset{2n}{a}}\, y^{\overline{2n+1}}$$

$n-1$ statt n geschrieben:

$$\overline{2n-1}\, y^{2n} \sin x = \overset{2n-1}{\underset{0}{a}}\, y' + \overset{2n-1}{\underset{2}{a}}\, y''' + \ldots + \overset{2n-1}{\underset{2n-2}{a}}\, y^{\overline{2n-1}} \qquad (39)$$

Nach Einführung der die Euler'schen Zalen enthaltenden Reihen für y, y', y'', ... in diese Gleichung geht durch successive Differentiationen und schliessliches Nullsetzen des Argumentes x ein zweifach unendliches Formelsystem hervor, in welchem combinatorische Aggregate der Euler'schen Zalen linear durch die letzteren mit Hilfe gewisser, von Bernoulli'schen Zalen abhängigen Coefficienten ausgedrückt erscheinen.

Um nur homogene Gebilde Euler'scher Zalen in die Rechnung zu bekommen, sei

$$\overline{y-1}^{m} = \Big(\sum_{r=1} \frac{E_r}{(2r)!} x^{2r} \Big)^m = \sum_{r=0} \mathfrak{E}^m{}_r\, x^{2m+2r}$$

wo sich die Coefficienten $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des polynomischen Lehrsatzes bestimmen. Wenn

$$\frac{E_r}{(2r)!} = \mathfrak{E}_{r-1}{}^1$$

gesetzt wird, ist dann

$$y^m = 1 + \binom{m}{1} \sum_{r=0} \mathfrak{E}_r{}^1 x^{2r+2} + \binom{m}{2} \sum_{r=0} \mathfrak{E}_r{}^2 x^{2r+4} \ldots +$$
$$\ldots + \binom{m}{m} \sum_{r=0} \mathfrak{E}^m{}_r\, x^{2m+2r}$$

Gleich hohe Potenzen vereinigend, entsteht

$$y^m = 1 + \binom{m}{1} \mathfrak{E}_0{}^1\, x^2 + \Big(\binom{m}{1} \mathfrak{E}_1{}^1 + \binom{m}{2} \mathfrak{E}_0{}^2 \Big) x^4 +$$
$$+ \Big(\binom{m}{1} \mathfrak{E}_2{}^1 + \binom{m}{2} \mathfrak{E}_1{}^2 + \binom{m}{3} \mathfrak{E}_0{}^3 \Big) x^6 + \ldots$$
$$\ldots + \Big(\binom{m}{1} \mathfrak{E}_{r-1} + \binom{m}{2} \mathfrak{E}_{r-2}{}^2 + \ldots + \binom{m}{r} \mathfrak{E}_0{}^r \Big) x^{2r} + \ldots$$

somit

$$(D^{2r}y^m)_{x=0}=(2r)!\sum_{p=1}^{p=r}\binom{m}{p}\mathfrak{E}_{r-p^p} \tag{40}$$

ferner

$$D^{2r}y_0 = E_r$$

und

$$D^{2r+1}y_0 = 0$$

Die $2r$ malige Differentiation der Gleichung (38) ergiebt schliesslich mit Rücksicht auf das eben Gefundene

$$(2r)!\sum_{p=1}^{p=r}\binom{2n+1}{p}\mathfrak{E}_{r-p^p}=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{1}{(2s)!}\mathfrak{E}_{n-s}^{2n+1}E_{r+s} \tag{41}$$

Die einzelnen $\mathfrak{E}$ lassen sich hieraus recursiv bestimmen; eine independenze Darstellung derselben folgt aus

$$(y-1)^m = \sum_{r=0}\mathfrak{E}_r^m x^{2m+2r} = \left(\frac{1}{\cos x}-1\right)^m$$

$$= \left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{1-2\sin^2\frac{x}{2}}\right)^m \tag{42}$$

Nun ist

$$\frac{1}{1-v} = \sum_{t=0} v^t, \quad v^2<1$$

daher

$$D^{m-1}\frac{1}{1-v} = \frac{(m-1)!}{(1-v)^m} = (m-1)!\left(\binom{m-1}{m-1}+\binom{m}{m-1}v + \binom{m+1}{m-1}v^2+\cdots\right)$$

somit

$$\left(\frac{v}{1-v}\right)^m = \sum_{p=m}\binom{p-1}{m-1}v^p$$

folglich, v als Function einer Variabelen x betrachtend

$$D_x^k\left(\frac{v}{1-v}\right)^m = \sum_{p=m}\binom{p-1}{m-1}D_x^k v^p$$

$2\sin^2\frac{x}{2}=v$ gesetzt, ist nach (42) bei geradem k

$$D_x^k\left(\frac{v}{1-v}\right)^m = k!\sum_{t=0}\binom{k+2t}{k}\mathfrak{E}_{\frac{k}{2}-m+t}^m x^{2t}$$

berücksichtigend, dass

$$D_x^k v^p{}_{x=0} = 2^{p-k} D^k \sin^{2p}\frac{x}{2} = 2^{p-k} s_k^{2p}$$
$$\frac{x}{2} \quad x=0$$

so ist für $x = 0$ und bei geradem k

$$\mathfrak{E}^m_{\frac{k}{2}-m} = \frac{1}{k!} \sum_{p=m}^{p=\frac{k}{2}} 2^{p-k} \binom{p-1}{m-1} s_k^{2p} \tag{43}$$

Die $\overline{2r+1}$malige Differentiation der Gleichung (39) führt zu

$$(2n-1)\left[D^{2r+1} y^{2n} \sin x + \binom{2r+1}{1} D^{2r} y^{2n} \cos x - \ldots\right]$$
$$= \underset{0}{a}^{2n-1} y^{(2r+2)} + \underset{2}{a}^{2n-1} y^{(2r+4)} \ldots + \underset{2n-2}{a}^{2n-1} y^{(2n+2r)}$$

woraus für $x = 0$ folgt

$$(2n-1) \sum_{s=1,3,5\ldots}^{s=2r+1} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \binom{2r+1}{s} D^{2r-s+1} y^{2n}{}_0 = \sum_{t=0,1,2\ldots 2t}^{t=n-1} \underset{}{a}^{2n-1} y_0^{(2r+2t+2)}$$

und mit Beachtung der bereits bekannten Nullwerte

$$(2n-1)(2r+1)! \sum_{s=1,3,5\ldots}^{s=2r+1} \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s!} \sum_{p=1}^{p=r-\frac{s-1}{2}} \binom{2n}{p} \mathfrak{E}^p_{r-p-\frac{s-1}{2}} = \sum_{t=0}^{t=n-1} \frac{1}{(2t)!} \mathfrak{E}^{2n-1}_{n-t-1} E_{r+t+1} \tag{44}$$

Während sich für die Aggregate $\mathfrak{B}$ der Bernoulli'schen Zalen in (30), (31) und (32) Ausdrücke ergaben, deren Gliederzal nur von n abhängig waren, wächst hier die Gliederzal der für die homogenen Gebilde $\mathfrak{E}$ durch Recursion hervorgehenden Ausdrücke auch noch mit dem Ableitungszeiger r.

Nach Gleichung (40) sind nur jene, durch Erhebung von y zu

einer ungeraden Potenz entstehenden Coefficienten in solche, in den Euler'schen Zalen linearen Ausdrücke umwandelbar, deren Gliederzal nur vom Potenz-Exponenten n abhangen.

Der Coeffieient der beliebigen Potenz x^{2r} von

$$y^{2n+1} = \left(1 + \sum_{k=1} \frac{E_k}{(2k)!} x^{2k}\right)^{2n+1}$$

st zufolge des polynomischen Lehrsatzes

$$\frac{1}{(2r)!}(D^{2r} y^{2n+1})_0 = (2n+1)! \sum \frac{e_f^{\alpha} e_g^{\beta} \ldots e_z^{\zeta}}{\alpha!\ \beta!\ \ldots\ \zeta!}$$

wo

$$e_k = \frac{E_k}{(2k)!}, \quad e_0 = 1$$

ist, und die Zal r auf alle verschiedene Arten in $2n+1$ gleiche oder ungleiche Glieder $f, g, \ldots z$ so zu zerlegen ist, dass

$$\begin{aligned} &\alpha f + \beta g + \ldots + \zeta z = r \quad \text{und} \\ &\alpha, \beta, \ldots \zeta = 0, 1, 2, r \ldots \\ &f, g, \ldots z = 0, 1, 2 \ldots \quad \text{ist} \end{aligned}$$

Im linksseitigen Teile der Gleichung (41) erscheint obgenannter Coefficient in mit den Binomialcoefficienten behaftete homogene Gruppen $\mathfrak{E}$ zerlegt. Ihre Grade wachsen von 1 bis r, wenn

$$r \leqq 2n+1$$

hingegen von 1 bis $2n+1$, wenn

$$r \geqq 2n+1$$

ist.

Für beliebige p und q gilt

$$\mathfrak{E}^p q = p! \sum \frac{e_f^{\alpha} e_g^{\beta} \ldots e_z^{\zeta}}{\alpha!\ \beta!\ \ldots\ \zeta!}$$

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \ldots + \zeta = p \\ &\alpha f + \beta g + \ldots \zeta z = p + q \end{aligned} \qquad (45)$$

$$\begin{aligned} &\alpha, \gamma, \ldots \zeta = 0, 1, 2, \ldots p \\ &f, g, \ldots z = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Wenn der Fall $r < 2n+1$, der nur leere Identitäten hervorbringt, ausgeschlossen und das Glied

$$\mathfrak{E}_{r-1}' = \frac{E_r}{(2r)!}$$

in (41) auf die rechte Seite geschafft wird, so ist nach leichter Reduction

$$\sum_{p=2}^{p=2n+1} \binom{2n+1}{p} \overset{p}{\mathfrak{E}}_{r-p} = \overset{2n+1}{(\mathfrak{C}_n - 2n - 1)} \frac{E_r}{(2r)!} + \frac{1}{(2r)!} \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{(2s)!} \overset{2n+1}{\mathfrak{C}}_{n-s} E_{r+s}$$

$$r \geqq 2n+1 \tag{46}$$

Den möglichen, besonderen Werten von n und r entspricht ein doppelt unendliches Formelsystem.

Im Folgenden wurden die ersten zwei Systeme entsprechend den Annahmen $n = 1, 2$, entwickelt.

$$\underline{n = 1}$$

$2n+1 = 3, \quad r = 3, 4, \ldots$

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_1 = 3 \cdot 2 \frac{2^1 - 1}{2} B_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \overset{3}{\mathfrak{C}}_0 = 1$$

$$3\overset{2}{\mathfrak{E}}_{r-2} + \overset{3}{\mathfrak{E}}_{r-3} = \frac{1}{2(2r)!}(E_{r+1} - 5E_r), \quad r \geqq 3 \tag{47}$$

$r = 3, \quad \overset{2}{\mathfrak{E}}_1 = 2e_1 e_2 \qquad \overset{3}{\mathfrak{E}}_0 = {e_1}^3$

$$6e_1 e_2 + {e_1}^3 = \frac{1}{2 \cdot 6!}(E_4 - 5E_3)$$

$= 4, \quad 6e_1 e_3 + 3{e_2}^2 + 3{e_1}^2 e_2 = \frac{1}{2 \cdot 8!}(E_5 - 5E_4)$

$= 5, \quad 6e_1 e_4 + 6e_2 e_3 + 3{e_1}^2 e_3 + 3e_1 {e_2}^2 = \frac{1}{2 \cdot 10!}(E_6 - 5E_5)$

$= 6, \quad 6e_1 e_5 + 6e_2 e_4 + 3{e_3}^2 + 3{e_1}^2 e_4 + {e_2}^3 + 6e_1 e_2 e_3$

$$= \frac{1}{2 \cdot 12!}(E_7 - 5E_6)$$

$$= 7, \quad 6e_1e_6+6e_2e_5+6e_3e_4$$
$$+3e_1^2e_5+3e_2^2e_3+3e_1e_3^2+6e_1e_2e_4 = \frac{1}{2\,.\,14!}(E_8-5E_7)$$

$$\underline{n=2}$$

$2n+1=5, \quad r=5, 6, \ldots$

$$\overset{5}{\underset{0}{\mathfrak{E}}} = 1$$

$$\overset{5}{\underset{1}{\mathfrak{E}}} = 5\,.\,2\,\frac{2^1-1}{2!}B_1 = \tfrac{5}{6}$$

$$\overset{5}{\underset{2}{\mathfrak{E}}} = 5\,.\,2\,\frac{2^3-1}{4!}B_2+10\left(2\,\frac{2^1-1}{2!}B_1\right)^2 = \tfrac{3}{8}$$

$$10\overset{2}{\mathfrak{E}}_{r-2}+10\overset{3}{\mathfrak{E}}_{r-3}+5\overset{4}{\mathfrak{E}}_{r-4}+\overset{5}{\mathfrak{E}}_{r-5}$$
$$= \frac{1}{4!\,(2r)!}\left(-111\overset{E}{}_r+10\overset{E}{}_{r+1}+\overset{E}{}_{r+2}\right)$$

und mit Beachtung des sich aus (47) bestimmenden $\overset{3}{\mathfrak{E}}_{r-3}$

$$-20\overset{2}{\mathfrak{E}}_{r-2}+5\overset{4}{\mathfrak{E}}_{r-4}+\overset{5}{\mathfrak{E}}_{r-5} = \frac{1}{4!\,(2r)!}\left(489\overset{E}{}_r-110\overset{E}{}_{r+4}+\overset{E}{}_{r+2}\right)$$
$$r \geqq 5 \qquad (48)$$

$$r=5, \quad -40(e_1e_4+e_2e_3)+20e_1^3e_2+e_1^5$$
$$= \frac{1}{4!\,10!}(489E_5-110E_6+E_7)$$

$$=6, \quad -20(2e_1e_5+2e_2e_4+e_3^2)+5(4e_1^3e_3+6e_1^2e_2^2)+5e_1^4e_2$$
$$= \frac{1}{4!\,12!}(489E_6-110E_7+E_8)$$

$$=7, \quad -40(e_1e_6+e_2e_5+e_3e_4)+20(e_1^3e_4+e_1e_2^3+3e_1^2e_2e_3)$$
$$+5e_1^4e_3+10e_1^3e_2^2 = \frac{1}{4!\,14!}(489E_7-110E_8+E_9)$$

. . . . . .

10.

In der Theorie der „Gamma-Functionen" findet sich die Reihe

$$y = \frac{x}{\log \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{J_1}{1!}x - \frac{J_2}{2!}x^2 - \ldots; \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

deren Coefficienten durch bestimmte Integrale

$$J_n = \int_0^1 v(1-v)(2-v)\ldots(n-1-v)\,dv$$

ausgedrückt werden.

Als Nullwerte der Ableitungen der Function y aufgefasst, können dieselben, sowie überhaupt jene beliebiger Potenzen y^m auf eine einfache Art independent bestimmt werden.

Nach dem Mac Laurin'schen Satze ist

$$(e^y-1)^m = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} D_y{}^k (e^y-1)_0{}^m y^k$$

und da

$$D_y{}^k(e^y-1)_0{}^m = \begin{cases} m^k - \binom{m}{1}(m-1)^k + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{m}{m-1}1^k = {}^m E_k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k \geqq m \\ 0, \qquad k < m \end{cases}$$

auch

$$= \sum_{k=m}^{k=\infty} \frac{{}^m E_k}{k!} y^k \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{e^y-1}{y}\right)^m = \sum_{h-1}^{h=\infty} \frac{{}^m E_{m+h}}{(m+h)!} y^h$$

Wird $y = \log(1-x)$ gesetzt, so kommt

$$\left(\frac{-x}{\log(1-x)}\right)^m = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{{}^m E_{m+h}}{(m+h)!} (\log\overline{1-x})^h$$

nun ist

$$D^n(\log\overline{1-x})^k{}_0 = (-1)^k k! \overset{n}{C}_{n-k} \quad \text{(Vergl. b)}$$

haher

$$D^n\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)^m{}_0 = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^k k!}{(m+h)!} \overset{n}{C}_{n-k} \overset{m}{E}_{m+h} \tag{49}$$

Für $m = 1$ ist $\overset{1}{E}_{h+1} = 1$ und

$$D^n\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)_0 = \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^k \overset{h}{C}_{\frac{n-h}{h+1}} = -J_n$$

Für $m = 2$ ist $\overset{2}{E}_{h+2} = 2^{h+2} - 2$ und

$$D^n\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)^2{}_0 = 2\sum_{h=1}^{h=r} (-1)^k \frac{2^{h+1}-1}{(h+1)(h+2)} \overset{n}{C}_{n-h} \tag{50}$$

daher

$$\left(\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}\right)^2 = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{h-1}^{h=n} (-1)^k \frac{2^{h+1}-1}{(h+1)(h+2)} \overset{n}{C}_{n-h} \tag{51}$$

Ebenso findet sich

$$D^n\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^m{}_0 = (-1)^n \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\overset{n}{C}_{n-h} \overset{m}{E}_{m+h}}{(h+1)(h+2)\ldots(h+m)} \tag{52}$$

11.

Wird in

$$(\log\overline{1-y})^m = (-1)^m m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{\overset{r}{C}_{r-m}}{r!} y^r$$

unter m eine ganze positive Zal verstanden,

$$y = \sin^2 x$$

genommen, so kommt

$$(\log\cos x)^m = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{\overset{r}{C}_{r-m}}{r!} \sin^{2r} x \qquad (53)$$

woraus

$$D^n (\log\cos x)^m{}_0 = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} \frac{\overset{r}{C}_{r-m}}{r!} s^{2r}{}_n \qquad (54)$$

Die Substitution

$$y = \sin x$$

führt zu

$$\left(\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right)^m = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{\overset{r}{C}_{r-m}}{r!} \sin^r x \qquad (55)$$

woraus

$$D^n \left(\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right)^m{}_0 = (-2)^{-m} m! \sum_{r=m}^{r=n} \frac{\overset{r}{C}_{r-m}}{r!} s^r{}_n \qquad (56)$$

12.

$$\operatorname{arc\,tg} x = \tfrac{1}{2} i \log \frac{1-ix}{1+ix} = \tfrac{1}{2} i \log\left(1 - 2\frac{ix}{1+ix}\right)$$

folglich nach (6)

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^m = \frac{(-1)^m}{2^m} i^m m! \sum_{r=m}^{r=\infty} \frac{2^r}{r!} \overset{r}{C}_{r-m} \left(\frac{ix}{1+ix}\right)^r$$

Aus d) folgt ferner für $a = 1$ und ix statt x

$$D^n \left(\frac{ix}{1+ix}\right)^r{}_0 = i^n n! \binom{n-1}{n-r}$$

daher ist, wenn m und n zugleich gerade odnr zugleich ungerade sind

$$D^n (\operatorname{arc\,tg} x)^m{}_0 = (-1)^{\frac{3m+n}{2}} \frac{m!}{2^m} n! \sum_{r=m}^{r=n} \frac{2^r}{r!} \binom{n-1}{r-1} \overset{r}{C}_{r-m} \qquad (57)$$

Ist $m+n$ ungerade, so erscheint der Nullwert in imaginärer Form; mit Hinblick auf die reelle Potenz $(\operatorname{arctg} x)^m$ muss daher die Identität bestehen

$$\sum_{r=m}^{r=n} \frac{2r}{r!}\binom{n-1}{r-1}_{r}^{r} C_{r-m} = 0 \quad (m+n \text{ ungerade}) \qquad (58)$$

Dies stimmt mit der Tatsache überein, dass eine gerade Potenz von

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots$$

nur gerade Potenzen von x und eine ungerade Potenz dieser Function nur ungerade Potenzen von x enthalten kann.

13.

$$\arcsin x$$

$$= -i\log(ix+\sqrt{1-x^2}) = -\frac{i}{2}\log(ix+\sqrt{1-x^2})^2$$

$$= -\frac{i}{2}\log(1+2ix(ix+\sqrt{1-x^2})) = -\frac{i}{2}\log(1+2ix\,e^{i\arcsin x})$$

$$(\arcsin x)^m = \left(-\frac{i}{2}\right)^m [\log(1+2ix\,e^{i\arcsin x})]^m$$

$$= \left(-\frac{i}{2}\right)^m m! \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-1)^h}{(m+h)!} C_h^{m+h} (2ix\,e^{i\arcsin x})^{m+h}$$

Nun ist

$$D^n{}_0 x^{m+h} e^{\overline{m+h}\, i \arcsin x} = \binom{n}{m+h} \overline{m+h}!\; D^{n-m-h}{}_0 e^{\overline{m+h}\, i \arcsin x}$$

und nach Formel (g)

$$D^{n-m-h} e^{\overline{m+h}\, i \arcsin x}{}_0 = \begin{cases} p=n-m-h-2 \\ \quad -\Pi \quad (p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h}^2 \\ p=2,4,\ldots \\ \qquad\qquad n-m-h \text{ gerade} \\ p=n-m-h-2 \\ \quad i\Pi \quad (p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h} \\ p=1,3\ldots \\ \qquad\qquad n-m-h \text{ ungerade} \end{cases}$$

folglich nach leichter Reduction, wenn $n-m$ gerade ist,

$$D^n(\arcsin x)^m{}_0 =$$

$$\sum_{\substack{h=n-m \\ h=2,\,4\,\ldots}}^{m!} (-1)^{\frac{h}{2}+1}\, 2^h \binom{n}{m+h} \binom{m+h}{h} \prod_{\substack{p=n-m-h-2 \\ p=2,\,4\,\ldots}} (p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h}^2$$

$$+m! \sum_{\substack{h=n-m-1 \\ h=1,\,3\,\ldots}} (-1)^{\frac{h-1}{2}}\, 2^h \binom{n}{m+h} \binom{m+h}{h} \prod_{\substack{p=n-m-h-2 \\ p=1,\,3\,\ldots}} (p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h} \tag{59}$$

Bei ungeradem $(n-m)$ erscheint der Nullwert in imaginärer Form, was nur möglich ist, wenn derselbe verschwindet; dies giebt die Identität

$$\sum_{\substack{h=n-m \\ h=1,\,3\,\ldots}} (-1)^{\frac{h-1}{2}}\, 2^h \binom{n}{m+h} \binom{m+h}{h} \prod_{\substack{p=n-m-h-2 \\ p=2,\,4\,\ldots}} (p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h}^2$$

$$+ \sum_{\substack{h=n-m-1 \\ h=2,\,4\,\ldots}} (-1)^{\frac{h}{2}}\, 2^h \binom{n}{m+h} \binom{m+h}{h} \prod_{\substack{p=n-m-h-2 \\ p=1,\,3\,\ldots}} (p^2-\overline{m+h}^2)\,\overline{m+h} = 0$$

$(\overline{n-m}$ ungerade) (60)

14.

$$z = e^{ke^{(p+qi)x}}$$

$$= e^k e^{k(e^{(p+qi)x}-1)} = e^k \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{k^r}{r!} (e^{(p+qi)x}-1)^r$$

Nun ist

$$D_x{}^n(e^{\overline{p+qi}\,x}-1)^r{}_0 = (p+qi)^n \overset{r}{E}_n$$

ferner

$$(p+qi)^n = (p^2+q^2)^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right)+i\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right)\right)$$

$$= p^n - \binom{n}{2} p^{n-2}q^2 + \binom{n}{4} p^{n-4}q^4 - + \cdots$$

$$+i\left[\binom{n}{1} p^{n-1}q - \binom{n}{3} p^{n-3}q^3 + - \cdots\right]$$

andererseits ist

$$z^{(n)}{}_0 = D^n e^{ke^{px}}(\cos qx + i\sin qx)$$
$$= D_x{}^n e^{ke^{px}\cos qx}\cos(ke^{px}\sin qx)_0$$
$$+ iD_x{}^n e^{ke^{px}\cos qx}\sin(ke^{px}\sin qx)_0$$

Die Gleichstellung ergiebt

$$D_x{}^n e^{ke^{px}\cos px}\cos(ke^{px}\sin qx)_0$$
$$= (p^2+q^2)^{\frac{n}{2}} e^k \cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right) \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^r}{r!} \begin{matrix} r \\ E \\ n \end{matrix} \tag{61}$$

$$D_x{}^n e^{ke^{px}\cos qx}\sin(ke^{px}\sin qx)_0$$
$$= (p^2+q^2)^{\frac{n}{2}} e^k \sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right) \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^r}{r!} \begin{matrix} r \\ E \\ n \end{matrix} \tag{62}$$

Für $p = 0$ und $q = 1$ folgt

$$D_x{}^n e^{k\cos x}\cos(k\sin x)_0$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}} e^k \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^r}{r!} \begin{matrix} r \\ E \\ n \end{matrix} \qquad n \text{ gerade} \tag{63}$$

$$D_x{}^n e^{k\cos x}\sin(k\sin x)_0$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} e^k \sum_{r=1}^{r=n} \frac{k^r}{r!} \begin{matrix} r \\ E \\ n \end{matrix} \qquad n \text{ ungerade} \tag{64}$$

Bei ungeradem n verschwindet der erstere und bei geradem n der zweite der beiden letzten Nullwerte.

15.

Functionen von der Form

$$F(x) = [f(x)]^{g(x)}$$

können auch geschrieben werden

$$F(x) = e^{g(x)\log f(x)}$$

Die Nullwerte ihrer Ableitungen ergeben sich nach dieser Methode, wenn der Exponent eine Function „$f(x)$“ ist.

Eine independente Bestimmungsweise bedingt jene der Ableitungs-Nullwerte sowol der Potenzen von $\varphi(x)$ als auch jener von $\log f(x)$.

Von letzteren können nur drei in Betracht kommen, nämlich

$$\log(1 \pm x), \quad \log\cos x \,(54) \quad \text{und} \quad \log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) \tag{56}$$

a) $f(x) = 1+x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon} x^p, \quad \varepsilon = 1, 2$

$$F(x) = (1+x)^{(-1)^{\varepsilon} x^p} = e^{(-1)^{\varepsilon} x^p \log(1+x)} = \sum_{r=0} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} (x^p \log\overline{1+x})^r$$

$$D^n F_0 = \sum_{r=1}^{r=\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} (-1)^{\varepsilon r} \frac{\overline{pr}!}{r!} \binom{n}{pr} D^{n-pr} (\log\overline{1+x})^r{}_0$$

folglich

$$D^n (1+x)^{(-1)^{\varepsilon} x^p}{}_0$$

$$= \sum^{r=\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} (-1)^{r+\varepsilon r} \overline{pr}! \binom{n}{pr} \underset{n-pr-r}{C^{n-pr}} \qquad x^2 < 1 \tag{65}$$

$$f(x) = 1-x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon} x^p, \quad \varepsilon = 1, 2$$

$$D^n (1-x)^{(-1)^{\varepsilon} x^p}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} (-1)^{r+\varepsilon r} \overline{pr}! \binom{n}{pr} \underset{n-pr-r}{C^{n-pr}} \qquad x^2 < 1 \tag{66}$$

Für $p = 1$ ist

$$D^n \overline{1+x}^{(-1)^{\varepsilon} x_0} = \sum_{r=1}^{s=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^{n+\varepsilon r} r! \binom{n}{r} \underset{n-2r}{C^{n-r}} \tag{67}$$

$$D^n \overline{1-x}^{(-1)^{\varepsilon} x_0} = \sum_{r=1}^{r=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^{r+\varepsilon r} r! \binom{n}{r} \underset{n-r}{C^{n-2r}} \tag{68}$$

b) $f(x) = 1+x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon}(\log\overline{1+x})^m, \quad \varepsilon = 1, 2$

$$F(x) = (1+x)^{(-1)^{\varepsilon}(\log\overline{1+x})^m}$$

$$= e^{(-1)^{\varepsilon}(\log\overline{1+x})^m} = \sum_{r=0} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!}(\log\overline{1+x})^{mr+r}$$

$$D^n(1+x)^{(-1)^{\varepsilon}(\log\overline{1+x})^m}{}_0$$

$$= \sum_{n=1}^{r=\left|\frac{n}{m+1}\right|} (-1)^{n-mr-\varepsilon+\varepsilon r} \frac{(mr+r)!}{r!} \overset{n}{C}_{n-mr-r} \tag{69}$$

Für $m = 1$ ist

$$D^n(1+x)^{(-1)^{\varepsilon}\log\overline{1+x}}{}_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} (-1)^{n+\varepsilon r} \frac{2r!}{r!} \overset{n}{C}_{n-mr-r} \tag{70}$$

$$f(x) = 1-x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon}(\log\overline{1-x})_m, \quad \varepsilon = 1, 2$$

$$D^n(1-x)^{(-1)^{\varepsilon}(\log\overline{2-x})_0{}^m}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{m+1}\right|} (-1)^{mr+r+\varepsilon r} \frac{(mr+r)!}{r!} \overset{n}{C}_{n-mr-r} \tag{71}$$

Für $m = 1$ ist

$$D^n(1-x)^{(-1)^{\varepsilon}\log\overline{1-x}}{}_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} (-1)^{\varepsilon} \frac{2r!}{r!} \overset{n}{C}_{n-2r} \tag{72}$$

c) $f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = (-1)^{\varepsilon}x^p, \quad \varepsilon = 1, 2$

$$F(x) = (\cos x)^{(-1)^{\varepsilon}x^p}$$

$$= e^{(-1)^{\varepsilon}x^p \log\cos x} = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^{\varepsilon r} \frac{x^{pr}}{r!} (\log\cos x)^r$$

$$D^n F_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{u}{p+2}\right|} (-1)^{\varepsilon r} \frac{pr!}{r!} \binom{n}{pr} D^{n-pr}(\log\cos x)^r{}_0$$

laut Formel (54)

$$D^n(\cos x)^{x^p}{}_0$$

$$= n! \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{p+2}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{2^r r!\,(n-pr)!} \sum_{t=r}^{t=\left|\frac{n-pr}{2}\right|} \frac{\begin{matrix} t & 2t \\ C & s \\ t-r & n-pr \end{matrix}}{t(t-1)\ \ldots\ (r+1)} \tag{73}$$

Für $p = 1$ ist

$$D^n \cos x)^{(-1)^\varepsilon x}{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{3}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{2^r} \binom{n}{r} \sum_{t=r}^{t=\left|\frac{n-r}{2}\right|} \frac{\begin{matrix} t & 2t \\ C & s \\ t-r & n-r \end{matrix}}{t(t-1)\ \ldots\ (r+1)} \tag{74}$$

e) $f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = (-1)^\varepsilon (\log\cos x)^m, \quad \varepsilon = 1\ 2$

$$F(x) = (\cos x)^{(-1)^\varepsilon (\log\cos x)^m}$$

$$= e^{(-1)^\varepsilon (\log\cos x)^m + 1} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} (\log\cos x)^{mr+r}$$

$$D^n \cos x(-1)^{\varepsilon (\log\cos x)^m}{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2m+2}\right|} \frac{(-1)^{m+r+\varepsilon_r}}{r!\ 2^{m+r}} \sum_{t=mr+r}^{t=\frac{n}{2}} \frac{\begin{matrix} t & 2t \\ C & s \\ t-mr-r & n \end{matrix}}{t(t-1)\ \ldots\ (mr+r+1)} \tag{75}$$

Für $m = 1$ ist

$$D^n \cos x^{(-1)^\varepsilon \log\cos x}{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{4}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r+r+1}}{r!\ 2^{r+1}} \sum_{t=2r}^{t=\frac{n}{2}} \frac{\begin{matrix} t & 2t \\ C & s \\ t-2r & n \end{matrix}}{t(t-1)\ \ldots\ (2r+1)} \tag{76}$$

d) $f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = \dfrac{(-1)^\varepsilon}{x}, \quad \varepsilon = 1,\ 2$

$$F(x) = \cos x^{\frac{(-1)^\varepsilon}{x}} = e^{\frac{(-1)^\varepsilon}{x} \log\cos x} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!\ x^r} (\log\cos x)^r$$

$$D^n \cos x^{\frac{(-1)^\varepsilon}{x}}{}_0 = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} D^n \left(\frac{\log\cos x}{x}\right)^r$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{\binom{n+r}{r}(r!)^2} D^{n+r}(\log\cos x)^r{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(-1)^{\varepsilon r+r}}{(n+r)\ldots(n+1)r!\,2^r} \sum_{t=r}^{t=\left\lfloor\frac{n-r}{2}\right\rfloor} \frac{\overset{t}{C}\quad \overset{2t}{s}}{\underset{t-r}{\quad}\quad \underset{n-s}{\quad}} \qquad (77)$$

f) $f(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}, \quad \varphi(x) = (-1)^\varepsilon x^p, \quad \varepsilon = 1, 2$

$$F(x) = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^\varepsilon x^p} = e^{(-1)^\varepsilon x^p \log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\varepsilon r} x^{pr}}{r!}\left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^r$$

$$D^n \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^\varepsilon x^p}{}_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left\lfloor\frac{n}{p+1}\right\rfloor} (-1)^{r+\varepsilon r} \frac{n\overline{n-1}\ \ldots\ \overline{n-pr+1}}{r!\,2^r} \times$$

$$\times \sum_{t=m}^{t=n} \frac{\overset{t}{C}\quad \overset{r}{s}}{\underset{t-m}{\quad}\quad \underset{n}{\quad}} \frac{}{t(t-1)\ \ldots\ \overline{m+1}} \qquad (78)$$

Für $p = 1$ ist

$$D^n \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^\varepsilon x}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} (-1)^{r+\varepsilon r} \frac{n\overline{n-1}\ \ldots\ \overline{n-pr+1}}{r!\,2^r} \times$$

$$\times \sum_{t=r}^{t=n} \frac{\overset{t}{C}\quad \overset{r}{s}}{\underset{t-m}{\quad}\quad \underset{n}{\quad}} \frac{}{t\overline{t-1}\ \ldots\ \overline{m+1}}$$

g) $f(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$

$$\varphi(x) = (-)^{\varepsilon} x^p \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^m, \quad \varepsilon = 1,\ 2$$

$$F(x) = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^{(-1)^{\varepsilon} x^p \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^m}$$

$$= e^{(-1)^{\varepsilon} x^p \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{m+1}}$$

$$= \sum_{r=0} \frac{(-1)^{\varepsilon r} x^{pr}}{r!} \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{(m+1)r}$$

$$D^n F_0 = \sum_{r=2}^{r=\left|\frac{n}{m+p+1}\right|} \frac{(-1)^{\varepsilon r}}{r!} \binom{n}{pr} \overline{pr}!\, D^{n-pr} \times$$

$$\times \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^{(m+1)r}$$

daher mit Benutung der Formel (56):

$$D^n \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)_0^{(-1)^{\varepsilon} x^p \left[\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right]^m}$$

$$- \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{m+p+1}\right|} \frac{(-1)^{(\varepsilon+m+1)r}\, n(n-1)\ \ldots\ (n-pr+1)}{r!\, 2^{(m+1)r}} \times$$

$$\times \sum_{t=\overline{m+1}r}^{t=n-pr} \frac{\overset{t}{\overset{C}{\overline{t-m+1}r}}\ \overset{t}{\overset{s}{\overline{n-pr}}}}{t(t-1)\ \ldots\ (mr+r+1)} \tag{79}$$

Für $m = 1$, $p = 0$, $\varepsilon = 2$ ist

$$D^n \left(\cos\frac{x}{e} - \sin\frac{x}{2}\right)_0^{\log\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \sum_{r=2}^{r=\left|\frac{n}{2}\right|} \frac{1}{r!\,2^{2r}} \sum_{t=2r}^{t=n} \frac{C_{t-2r}^{t}\, s_{t}}{t(t-1)\ldots(2r+1)} \tag{80}$$

16.

Werden in der Formel (4) für $F(x)$, die aus der trigonometrischen Analysis bekannten zusammengesetzten Functionen $\log\frac{\sin v}{v}$, $\log\cos v$, $\log\frac{\operatorname{tg} v}{v}$, dann $\cos(\mu \arcsin v)$ u. a. ähnliche genommen, ferner

$$v = \text{„}\mathfrak{f}(x)\text{“} = \mathfrak{f}, \quad D^n[\mathfrak{f}(x)]^m{}_0 = \mathfrak{f}^m{}_n$$

gesetzt, wobei jene Functionen deren Potenzen den Formeln (12), (13), (16), (20), (49), (52), (54), (59) zu Grunde liegen auch einzubeziehen sind, so gehen die nachfolgenden Formeln hervor.

Die obere Grenze der rechtsseitigen Summen hängt hiebei von dem kleinsten Exponenten $q > 0$ von x jener Potenzreihe ab, in welche sich die Function $\mathfrak{f}$ verwandeln lässt

a) $$D^n \log \mathfrak{f} \operatorname{cosec} \mathfrak{f}_{x=0} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} \frac{S_{2r}\,\mathfrak{f}^{2r}{}_n}{r\pi^{2r}} \tag{81}$$

b) $$D^n \log \sec \mathfrak{f}_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} \frac{1}{r}\,\frac{2^{2r}-1}{\pi^{2r}}\, S_{2r}\,\mathfrak{f}^{2r}{}_n \tag{82}$$

c) $$D^n \log \frac{\operatorname{tg}\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_0} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} \frac{2^{2r}-2}{r\pi^{2r}}\, S_{2r}\,\mathfrak{f}^{2r}{}_n \tag{83}$$

d) $D^n \cos(\mu \arcsin \mathfrak{f})_0$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} (-1)^r \frac{2^{2r-2}}{r} \binom{\frac{\mu}{2}+r-1}{2r-2} \mathfrak{f}^{2r}{}_n \tag{84}$$

e) $$D^n \frac{\sin(\mu \arcsin \mathfrak{f})}{\sqrt{1-\mathfrak{f}^2_0}}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n+q}{2q}\right|} (-1)^{r-1} 2^{2r-1} \binom{\frac{\mu}{2}+r-1}{2r-1} \mathfrak{f}^{2r-1}{}_n \qquad (85)$$

f) $$D^n \sin(\mu \arcsin \mathfrak{f})_0$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n+q}{2q}\right|} (-1)^{r-1} \frac{2^{2r-2}\mu}{2r-1} \binom{\frac{\mu-3}{2}+r}{2r-2} \mathfrak{f}^{2r-1}{}_n \qquad (86)$$

g) $$D^n \frac{\cos(\mu \arcsin \mathfrak{f})}{\sqrt{1-\mathfrak{f}^2_0}}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} (-1)^r 2^{2r} \binom{\frac{\mu-1}{2}+r}{2r} \mathfrak{f}^{2r}{}_n \qquad (87)$$

h) $$D^n \frac{\mathfrak{f}}{e^{\mathfrak{f}}-1^0} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{2q}\right|} \frac{(-1)^{r-1}}{2r!} B_r \mathfrak{f}^{2r}{}_n \qquad n > 1 \qquad (88)$$

i) $$D^n \frac{1-\mathfrak{f}\cos\varphi}{1-2\mathfrak{f}\cos\varphi+\mathfrak{f}^2_0} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} \cos r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \qquad (89)$$

j) $$D^n \frac{\mathfrak{f}\sin\varphi}{1-2\mathfrak{f}\cos\varphi+\mathfrak{f}^2_0} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} \sin r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \qquad (90)$$

k) $$D^n \log \frac{1}{\sqrt{1-2\mathfrak{f}\cos\varphi+\mathfrak{f}^2_0}} = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} 1/r! \cos r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \qquad (91)$$

l) $$D^n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathfrak{f}\sin\varphi}{1-\mathfrak{f}\cos\varphi}\right)_0 = \sum_{r=1}^{r=\left|\frac{n}{q}\right|} \frac{1}{r!} \sin r\varphi \,.\, \mathfrak{f}^r{}_n \qquad (92)$$

m) Bekanntlich ist

$$D^r e^{ax}\cos bx = (a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} e^{ax}\cos\left(bx + r\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}\right)$$

$$D^a e^{ax}\sin bx = (a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} e^{ax}\sin\left(bx + r\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}\right)$$

Mit Hilfe der sich hieraus bestimmenden Nullwerte ergeben sich nach Mac Laurin's Satz die Entwicklungen

$$e^{ax}\cos bx = 1 + \sum_{r=1} \frac{1}{r!}(a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} \cos\left(r\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}\right)x^r$$

$$e^{ax}\sin bx = \sum_{r=1} \frac{1}{r!}(a^2+b^2)^{\frac{r}{2}} \sin\left(s\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}\right)x^r$$

somit auch

$$D^n e^{af}\cos b\mathfrak{f}_0 = \sum_{r=1} \frac{1}{r!} a^2+b^{\frac{r}{2}} \cos\left(r\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}\right)\mathfrak{f}^r{}_n \qquad (93)$$

$$D^n e^{af}\sin b\mathfrak{f}_0 = \sum_{r=1} \frac{1}{r!} \overline{a^2+b^2}^{\frac{r}{2}} \sin\left(r\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}\right)\mathfrak{f}^r{}_n \qquad (94)$$

Für $a = b = 1$ folgt

$$\overline{a^2+b^2}^{\frac{r}{2}} = 2^{\frac{r}{2}}, \quad r\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a} = r\,\frac{\pi}{4}$$

ferner

$$\sqrt{2}\cos r\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 0 & r \equiv 2 \bmod 4 \\ (-1)^{\frac{r-1}{4}} & r \equiv 1 \bmod 4 \\ (-1)^{\frac{r+1}{4}} & r \equiv -1 \bmod 4 \end{cases}$$

$$= (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4}} \tag{95}$$

$$\sqrt{2}\sin r\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 0 & r \equiv 0 \mod 4 \\ (-1)^{\frac{r-2}{4}} & r \equiv 2 \mod 4 \\ (-1)^{\frac{r-1}{4}} & r \equiv 1 \mod 4 \\ (-1)^{\frac{r-3}{4}} & r \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

$$= (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4}} \tag{96}$$

Es ist daher

$$e^x \cos x = 1 + \sum_{r=1,3\ldots} (-1)^{\frac{r+(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} x^r \tag{97}$$

$$e^x \sin x = \sum_{r=1,3\ldots} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{2^r}{(2r)!} x^{2r}$$

$$+ \sum_{r=1} (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} x^r \tag{98}$$

folglich

$$D^n e^f \cos f_0 = \sum_{r=1,3\ldots}^{\mu} (-1)^{\frac{r+(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} f^r{}_u \tag{99}$$

$$D^n e^f \sin f_0 = \sum_{r=1,3\ldots}^{\nu} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{2^r}{(2r)!} f^{2r}{}_n$$

$$+ \sum_{r=1,3\ldots}^{\mu} (-1)^{\frac{r-2+(-1)^{\frac{r}{2}}}{4}} \frac{2^{\frac{r}{2}}}{r!} f^r{}_n \qquad (100)$$

μ ist die grösste ungerade Zal $\leqq rq$

daher

$$\mu = 2 \left| \frac{\left| \frac{n}{q} \right| + 1}{2} \right| - 1$$

ν ist die grösste ungerade Zal $\leqq 2rq$

daher

$$\nu = 2 \left| \frac{\left| \frac{n}{2q} \right| + 1}{2} \right| - 1$$

17.

Summirung der Reihen.

$$\mathfrak{A}^{n}_{m,d} = a^d d^n + a^{m+d} \overline{m+d}^n + a^{2m+d} \overline{2m+d}^n + \ldots$$

$$\mathfrak{S}^{n,k}_{m,d} = a^d d^n + a^{m+d} \overline{m+d}^n \ldots$$

$$\ldots + \overline{a^{k-1}{}_{m+d}\, \overline{k-1\, m+d}^n} - \left(a^{km+d} \overline{km+d}^n + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + a^{\overline{2k-1}\, m+d} \overline{2k-1\, m+d}^n \right)$$

$$+ \left(a^{2km+d} \overline{2km+d}^n + \ldots + a^{\overline{3k-1}\, m+d} \overline{3k-1\, m+d}^n \right) - + \ldots$$

A. Erstere Reihe kann durch n malige Differentiation der geometrischen Reihe

$$R(v) = \sum_{r=0} a^{mr+d} e^{(mr+d)v} = a^d e^{dv} \sum_{r=0} a^{mr} e^{mrv}$$

$$= a^d e^{dv} \frac{1}{1-a^m e^{mv}}, \quad a^{2m} < 1$$

und schliessliche Nullsetzung der Veränderlichen v entstanden gedacht werden.

Es ist

$$D^n R(v)_0 = \mathfrak{N}^{n}_{m,\,d} \tag{101}$$

Durch eine kleine Umschreibung obiger Summe

$$R(v) = \frac{a^d e^{dv}}{1-a^m} \cdot \frac{1}{1-\frac{a^m}{1-a^m}(e^{mv}-1)}$$

wird dieselbe von der Function

$$„f(v)“ = (e^{mv}-1)\,e^{dv} \quad \text{(Siehe (e))}$$

abhängig und hiedurch der Behandlung durch die hier vorgetragene Methode zugänglich gemacht.

Letzterer Ausdruck lässt sich unter der Bedingung

$$\left|\frac{a^m}{1-a^m}\right| < 1$$

wieder in eine geometrische Reihe auflösen, durch deren n malige Differentiation ein zweiter Ausdruck

$$D^n R_0 = \frac{a^d}{1-a^m} \sum_{r=0}^{r=n} \left(\frac{a^m}{1-a^m}\right) D^n e^{dv} (e^{mv}-1)^r{}_0 \tag{102}$$

$$= \frac{a^d}{1-a^m} \sum_{r=0}^{r=n} \left(\frac{a^m}{1-a^m}\right)^r \left[\overline{mr+d}^{\,n} - \binom{r}{1} \overline{m\overline{r-1}+d}^{\,n} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} \overline{m+d}^{\,n} + (-1)^r \binom{r}{r} d^n \right] \ldots$$

entsteht. Wird der in eckiger Klammer stehende Nullwert mit $A^{r\ n}_{m,\,d}$ bezeichnet, so ergiebt sich durch Gleichstellung von (101) mit (102)

$$\overset{n}{\underset{m,\,d}{\mathfrak{R}}}\ \frac{a^d}{1-a^m}\ \sum_{r=0}^{r=n}\left(\frac{a^m}{1-a^m}\right)^r\ \overset{r,\,n}{\underset{m,\,d}{A}} \tag{103}$$

Dieser Ausdruck, welcher bereits als Resultat gelten darf, kann jedoch noch in eine einfachere Form gebracht werden.

Wird nämlich derselbe durch a^d dividirt und durch Multiplication mit $(1-a^m)^{n+1}$ von Brüchen befreit, und $a^m = u$ gesetzt, so ist leicht einzusehen, dass dann geschrieben werden darf

$$\frac{1}{a^d}\ \overset{n}{\underset{m,\,d}{\mathfrak{R}}}\ (1-u)^{n+1} = (1-u)^{n+1}\ \sum_{r=0}\ u^r(mr+d)^n$$

$$= \overset{n+1}{\underset{0}{\mathfrak{L}}} + \overset{n+1}{\underset{1}{\mathfrak{L}}}u + \overset{n+1}{\underset{2}{\mathfrak{L}}}u^2 + \ldots + \overset{n+1}{\underset{n}{\mathfrak{L}}}u_n \tag{104}$$

wo $\overset{n+1}{\underset{0}{\mathfrak{L}}}$, $\overset{n+1}{\underset{1}{\mathfrak{L}}}$ . . . noch zu bestimmende, a nicht enthaltende Coefficienten bedeuten.

Beiderseits $p$mal in Bezug auf $a^m = u$ differentiirt, ergibt für $n = 0$ nach Abkürzung von $p!$

$$\overset{n+1}{\underset{p,\,d}{\mathfrak{L}}} = \overline{mp+d}^n - \binom{n+1}{1}\overline{\overline{mp-1}+d}^n + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p\binom{n+1}{p-2}\overline{2m+d}^n + (-1)^{p+1}\binom{n+1}{p-1}\overline{m+d}^p$$

$$+ (-1)^p\binom{n+1}{p}d^n \tag{105}$$

$$\overset{n+1}{\underset{o,\,d}{\mathfrak{L}}} = d^n$$

Folglich ist

$$\overset{n}{\underset{m,\,d}{\mathfrak{R}}} = \frac{a^d}{(1-a^m)^{r+1}}\ \sum_{p=0}^{p=n}\ \overset{n+1}{\underset{p,\,d}{\mathfrak{L}}}a^{mp} \tag{106}$$

Für ein $p > n$ muss dieser Ausdruck identisch verschwinden; denn die rechtsseitige Reihe in (104) enthält nur Potenzen mit Exponenten $\leqq n$, ein $p$maliges Differentiiren reducirt daher, wenn $p > n$ ist, die ganze rechte Seite auf null.

Da die Entwicklung unter den Bedingungen

$$|a^m| < 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{a^m}{1-a}\right| < \tfrac{1}{2}$$

geschah, so gelten beide Summenformeln (103) und (106) und für

$$|a^m| < \tfrac{1}{2}$$

Durch Vertauschung von a^m mit $-a^m$ ergiebt sich

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a^{mr+d}(mr+d)^n = \frac{a^d}{(1+a^m)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \underset{p,\,d}{\mathfrak{L}}{}^{n+1} a^{mp} \quad (107)$$

Specielle Fälle.

α) $m = 1, \quad d = 0$

$$\underset{1,\,1}{\mathfrak{R}}{}^{n} = \sum_{r=1}^{r=\infty} a^r r^n = \frac{1}{(a-1)^{n+1}} \sum_{p=1}^{p=n} \underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}{}^{n+1} a^p = \frac{1}{1-a} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{r=n} \left(\frac{a}{1-a}\right)^r A_r \quad (108)$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r a^r r^n = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^p \underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}{}^{n+1} a^p$$

$$= \frac{1}{1+a} \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^r \left(\frac{a}{1+a}\right)^r A_r \quad (109)$$

$$\underset{p,\,0}{\mathfrak{L}}{}^{n+1} = p^n - \binom{n+1}{1} \overline{p-1}^n + \binom{n+1}{2} \overline{p-2}^n \ldots +$$

$$\ldots + (-1)^{p+1} \binom{n+1}{p-1} 1^n$$

$$|a| < \tfrac{1}{2}$$

$$\underset{1,\,0}{A}{}^{r,\,n} \equiv A_r = r^n - \binom{r}{1} \overline{r-1}^n + \binom{r}{2} \overline{r-2}^n \ldots +$$

$$\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} 1^n = \underset{n}{E}{}^{r}$$

β) $m = 1, \quad d = 1$ identisch mit dem vorigen.

γ) $m = 2, \quad d = 1$

$$\underset{1,\,1}{\mathfrak{R}}{}^{n} = \sum^{r=\infty} \overline{a^{2r+1}}^n = \frac{a}{(1-a^2)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} \underset{p,\,1}{\mathfrak{L}}{}^{n+1} a^{2p}$$

$$= \frac{a}{1-a^2} \sum_{r=0}^{r=1} \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^r A_r \quad (110)$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a^{2r+1} \overline{2r+1}^n = \frac{a}{(1+a^2)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \sum_{p,\,1}^{n+1} a^{2p}$$

$$= \frac{a}{1+a^2} \sum_{r=0}^{r=1} (-1)^r \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^r A_r \qquad (111)$$

$$\sum_{p,\,1}^{n+1} = \overline{2p+1}^n - \binom{n+1}{1} \overline{2p-1}^n + \binom{n+1}{2} \overline{2p-3}^n \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p+1} \binom{n+1}{p-1} 3^n + (-1)^p \binom{n+1}{p} 1^n$$

$$\underset{2,\,1}{A}^{r,\,n} \equiv A_r = \overline{2r+1}^n - \binom{r}{1} \overline{2r-1}^n + \binom{r}{2} \overline{2r-3}^n \ldots +$$

$$\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} 3^n + (-1)^r \binom{r}{r} 1^n$$

$$|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Für $a = 1$ wird in (107) die Reihe linker Hand divergent, während der rechtsseitige Ausdruck einen endlichen Wert annimmt. Dieser Widerspruch ist nur ein scheinbarer.

Die Richtigkeit des ganzen Ableitungs-Verfahrens gründet sich auf der Zulässigkeit der wiederholten Differentiation einer convergenten Reihe, wenn das Resultat convergent ist, was hier nur bei einem

$$|a^m| < \tfrac{1}{2}$$

eintrifft.

Es mag von einigem historischen Interesse sein und bezeichnend für den damaligen Stand der Wissenschaft, dass ein Th. Clausen (Crelle J. VII, pag. 42, 1831) sich allen Ernstes bemühte, die sich aus den Formeln (109) und (110) für $a = 1$ ergebenden oscillirenden Reihen

$$1^n - 2^n + 3^n - + \ldots$$
$$1^n - 3^n + 5^n - + \ldots$$

zu summiren. Das von ihm eingeschlagene, sehr weitläufige, inductive Verfahren förderte Ausdrücke zu Tage, welche sich übrigens von den rechtsseitigen in (109) und (110) nur durch die Form unterscheiden.

Nach Gleichstellung der gleichwertigen Summen in (103) und (106), beiderseitiges Multipliciren mit $(1-a^m)^{n+1}$ und Dividiren durch

a^d findet sich durch Vergleich gleich hoher Potenzen von a die Relation

$$\underset{p,\,d}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} = A_p - \binom{n-p+2}{1} A_{p-1} + \binom{n-p+3}{2} A_{p-2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^p \binom{n+1}{p} A_0 \qquad (112)$$

Aus der Summenformel für die unendliche Reihe $\underset{m,\,d}{\overset{n}{\mathfrak{R}}}$ lässt sich noch die Summe der endlichen Reihe

$$\mathfrak{R}_v = \sum_{r=0}^{r=v} a^{mr+d} \overline{mr+d}^n$$

ableiten. Es ist nach Formel (106)

$$\underset{m,\,d}{\overset{n}{\mathfrak{R}}} - \underset{m,\,m\overline{v+1}+d}{\overset{n}{\mathfrak{R}}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} a^{mr+d} \overline{mr+d}^n$$

$$- \sum_{r=0}^{r=\infty} a^{mr+m\overline{v+1}+d} \overline{mr+m(v+1)+d}^n$$

$$= \mathfrak{R}_0 = \frac{a^d}{(1-a^m)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} \left(\underset{p,\,d}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} - a^{m\overline{v+1}} \underset{p,\,m\overline{v+1}\,d}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} \right) a^{mp} \qquad (113)$$

und nach Formel (103)

$$\underset{v}{\mathfrak{R}} = \frac{a^d}{1-a^m} \sum_{r=0}^{r=n} \left(\frac{a^m}{1-a^m} \right)^r \left(\underset{m,\,d}{\overset{r,\,n}{A}} - a^{m\overline{v+1}} \underset{m,\,m\overline{v+1}+d}{\overset{r,\,n}{A}} \right) \qquad (114)$$

Dieselben Formeln entstehen, wenn der Ableitung die für jedes a giltige Summenformel für die endliche geometrische Reihe zu Grunde gelegt werden; die Giltigkeit ist daher eine unbegrenzte.

Für $a = 1$ werden die rechtsseitigen Summen nur scheinbar unbrauchbar; sie erscheinen in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, deren Wert sich auf bekannte Weise ermitteln lässt.

Wird in (113) $a^m = u$ gesetzt, Zäler und Nenner $n+1$ mal nach u differentiirt und schliesslich $u = 1$ gesetzt, so ist

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{N}_v\\ \overline{a^d}\end{matrix}\right\} = \sum_{a=1}^{r=v} \overline{mr+d}^{\,n} = (-1)^n \left[\binom{v+1}{n+1} \mathfrak{Q}_0 + \binom{v+2}{n+1} \mathfrak{Q}_1 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \binom{v+n+1}{n+1} \mathfrak{Q}_n \right] \tag{115}$$

wo statt $\overset{n+1}{\underset{p,\, m\overline{v+1}+d}{\mathfrak{Q}}}$ der Kürze wegen $\mathfrak{Q}_p$ geschrieben wurde.

Ebenso findet sich

$$\sum_{r=0}^{r=v} (-1)^r a^{mr+d} \overline{mr+d}^{\,n}$$

$$= \frac{a^d}{(1+a^m)^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\underset{p,\, d}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} + (-1)^v a^{m\overline{v+1}} \right.$$

$$\left. \times \underset{p,\, m\overline{v+1}+d}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} \right) a^{mp} \tag{116}$$

woraus für $a = 1$

$$\sum_{a=0}^{r=v} (-1)^r \overline{mr+d}^{\,n} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\underset{p,\, d}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} + (-1)^v \underset{p,\, m\overline{v+1}+d}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} \right) \tag{117}$$

Der Annahme $m = 1$, $d = 0$ entsprechen die einfachen Potenzreihen

$$\sum_{r=1}^{r=v} r^n = (-1)^n \left(\binom{v+1}{n+1} \underset{0,\, 0}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} + \binom{v+2}{n+1} \underset{1,\, 0}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \binom{v+n+1}{n+1} \underset{n,\, 0}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} \right) \tag{118}$$

$$\sum_{r=1}^{r=v} (-1)^r r^n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\underset{p,\, 0}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} + (-1)^v \underset{p,\, v+1}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} \right) \tag{119}$$

wo

$$\underset{p,\, 0}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}} = p^n - \binom{n+1}{1} \overline{p-1}^{\,n} \dots + (-1)^p \binom{n+1}{p-2} +$$

$$+ (-1)^{p+1} \binom{n+1}{p-1}$$

$$\underset{p,\,v+1}{\mathfrak{Q}}^{n+1} = \overline{p+v+1}^{n} - \binom{n+1}{1}\overline{p+v}^{n} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{p-1}\binom{n+1}{p-1}\overline{v+2}^{n} + (-1)^{p}\binom{n+1}{p}\overline{v+1}^{n}$$

Endlich ist für $m = 2,\ d = 1$

$$\sum_{r=0}^{r=v} \overline{2r+1}^{n} = (-1)^{n} \sum_{p=0}^{p=n} \binom{v-p+1}{n+1} \underset{p,1}{\mathfrak{Q}}^{n+1} \tag{120}$$

(121)

$$\sum_{r=0}^{r=v} (-1)^{r}\,\overline{2r+1}^{n} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^{p} \left(\underset{p,1}{\mathfrak{Q}}^{n+1} + (-1)^{v} \underset{p,2v+3}{\mathfrak{Q}}^{n+1} \right)$$

$$\underset{p,1}{\mathfrak{Q}}^{n+1} = \overline{2p+1}^{n} - \binom{n+1}{1}\overline{2p-1}^{n} \dots + (-1)^{p-1}\binom{n+1}{p-1}3^{n} + (-1)^{p}\binom{n+1}{p}1^{n}$$

$$\underset{p,\,2v+3}{\mathfrak{Q}}^{n+1} = \overline{2p+2v+3}^{n} - \binom{n+1}{1}\overline{2p+2v+1}^{n} \dots$$

$$\dots + (-1)^{p-1}\binom{n+1}{p-1}\overline{2v+5}^{n} + (-1)^{p}\binom{n+1}{p}\overline{2v+3}^{n}$$

Für die Reihe in (118) besteht bereits eine einfache, Bernoullische Zalen enthaltende Summenformel von D. Bernoulli; für jene in (121) hat der Verfasser mit Hilfe der Euler'schen Zalen eine ähnliche Formel angegeben („Ableitungen von Identitäten", Archiv II. R. T. X).

B. Wenn die Glieder der Reihe

$$\underset{m,\,d}{\mathfrak{S}}^{n,p} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \sum_{t=0}^{t=k-1} (-1)^{k} a^{\overline{ks+tm+d}}\, \overline{ks+tm+d}^{n}$$

so zu Gruppen vereinigt werden, dass die Exponenten $ks+tm+d$ der Glieder einer und derselben Gruppe in Bezug auf den Modul km congruent sind, so ist

$$\underset{m,\,d}{\mathfrak{S}}^{n,k} = \sum_{h=0}^{h=k-1} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^{r} a^{\overline{rk+h}\,m+d}\, \overline{kr+hm+d}^{n}$$

Nun ist nach Formel (107) die zweite Summe, kr statt r und $mh+d$ statt d geschrieben:

$$= \frac{a^{hm+d}}{(1+a^{km})^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \mathop{\mathfrak{L}}_{p,\,hm+d}^{n+1} a^{kmp}$$

Da h die Werte von

$$h = 0 \quad \text{bis} \quad h = k-1$$

und p jene von

$$p = 0 \quad \text{bis} \quad p = n$$

zu durchlaufen hat, so entsteht aus dem Exponenten $kmp+hm+d$ dieselbe Zalenreihe wie aus $d+q.m$, wenn q die Werte von

$$q = 0 \quad \text{bis} \quad q = k(n+1)-1$$

annimmt.

Wird das Ergebniss nach aufsteigenden Potenzen von a geordnet, so erhält irgend eine Potenz a^{mq+d} einen Coefficienten $\mathop{\mathfrak{L}}_{p,\,hm+d}^{n+1}$. Um p und h aus q zu bestimmen, genügt die Bemerkung, dass

$$mq+d = kmp+hm+d$$

sein muss, woraus

$$kp+h = q$$

folgt. Da h nie grösser als $k-1$ werden kann, so ist offenbar

$$p = \left|\frac{q}{k}\right|$$

d. h. gleich der grössten im Bruche $\frac{q}{k}$ enthaltenen ganzen Zal; hieraus bestimmt sich

$$h = q - k\left|\frac{q}{k}\right|$$

Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} \mathop{\mathfrak{S}}_{m,\,d}^{n,\,k} &= \frac{a^d}{(1+a^{km})^{n+1}} \sum_{q=0}^{q=kn+k-1} (-1)^p \mathop{\mathfrak{L}}_{p,\,hm+d}^{n+1} a^{mq} \\ p &= \left|\frac{q}{k}\right| \\ h &= q - k\left|\frac{q}{k}\right| \\ |a^m| &< 1 \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{p,\,hm+d}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} = \overline{m\,p+h+d}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{m\,p+h-1+d}^{\,n} + \ldots \\
&\ldots + (-1)^{p+1}\binom{n+1}{p-1}\overline{m\,h+1+d}^{\,n} \\
&+ (-1)^{p}\binom{n+1}{p}\overline{hm+d}^{\,n}
\end{aligned}\right\} \quad (122')$$

Für $m = 1$ und $d = 0$ ist

$$\begin{aligned}
&\underset{1,0}{\overset{n,\,k}{\mathfrak{S}}} (a\,1^n + \ldots + a^{k-1}\overline{k-1}^{\,n}) - (a^k k^n + \ldots + a^{2k-1}\overline{2k-1}^{\,n}) \\
&+ (a^{2k}\overline{2k}^{\,n} + \ldots + a^{3k-1}\overline{3k-1}^{\,n}) - \ldots \\
&= \frac{1}{(1+a^k)^{n+1}} \sum_{q=0}^{q=k-1} (-1)^p \underset{p,\,h}{\mathfrak{L}}{}^{n+1}\, a^p
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
p &= \left|\frac{q}{k}\right| \\
h &= q - k\left|\frac{q}{k}\right| \\
|a| &< \tfrac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

$$\begin{aligned}
&\underset{p,\,h}{\overset{n+1}{\mathfrak{L}}} = \overline{kp+h}^{\,n} - \binom{n+1}{1}\overline{k\,p-1+h}^{\,n} + \ldots \\
&\ldots + (-1)^{p+1}\binom{n+1}{p-1}\overline{k+h}^{\,n} + (-1)^p\binom{a+1}{p}h^n
\end{aligned}$$

Für $n = 0$ ergiebt sich als Summe

$$\underset{1,0}{\overset{0,\,k}{\mathfrak{S}}} = \frac{1}{1+a^k}\,\frac{1-a^k}{1-a}$$

18.

Summirung einiger von der Exponentiellen-Reihe ableitbaren Reihen.

a) $$\underset{m,\,d}{\overset{n}{\mathfrak{T}}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r!}\, a^{mr+d}\,\overline{mr+d}^{\,n}$$

Wenn in der Reihe der Exponentiellen das Argument wieder durch eine Exponentielle ersetzt wird, so entsteht

$$z = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r!} a^{mr+d} e^{(mr+d)x} = a^d e^{dx} e^{am} e^{mx}$$

$$= a^d e^{dx} e^{a^m(e^{mx}-1)+a^m}$$

$$= a^d e^{a^m} e^{dx} e^{a^m(e^{mx}-1)}$$

$$= a^d e^{a^m} e^{dx} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{p!} a^{mp} (e^{mx}-1)^p$$

hiemit ist die vorgelegte Function wieder von einer Function

$$„(x)“ = e^{mx} - 1$$

abhängig gemacht

Durch n malige Differentiation des ersten und letzten Ausdruckes und Nullsetzung des Argumentes entsteht

$$\mathfrak{T}^{n}_{m,\,d} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r!} a^{mr+d} \overline{mr+d}^{n} =$$

$$= a^d e^{a^m} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} a^{mp} A^{p,\,n}_{m,\,d} \tag{124}$$

$$A^{p,\,n}_{m,\,d} = \overline{mp+d}^{n} - \binom{p}{1} \overline{m p-1+d}^{n} + \binom{p}{2} \overline{m p-2+d}^{n} - \ldots$$

$$+ (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} \overline{m+d}^{n} + (-1)^p \binom{p}{p} d^n$$

es ist der bereits in der Formel (102) erschienene Coefficient.

Diese Summenformel gilt für jedes a.

Ebenso findet sich

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{r!} a^{mr+d} \overline{mr+d}^{n} = a^d e^{-a^m} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p}{p!} a^{mp} A^{p,\,n}_{m,\,d} \tag{125}$$

woraus für $m = 1$ und $d = 0$ hervorgeht

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r!} a^r r^n = e^a \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!} a^p E^{p}_{n} \tag{126}$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{r!} a_r r^n = e^a \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p}{p!} a^p \overset{p}{E}_n \tag{127}$$

$$\overset{p,\,n}{A}_{1,\,0} = \overset{p}{E}_n = p^n - \binom{p}{1}\overline{p-1}^n + \binom{p}{2}\overline{p-2}^n - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} 1^n$$

$$\overset{1}{E}_n = 1 \qquad \overset{n}{E}_n = n!$$

Letztere Reihe verschwindet für gewisse Werte von a, welche sich durch Auflösung der Gleichung

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^p}{p!} a^{p-1} \overset{p}{E}_n = 0$$

ergeben. So ist

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{(r-1)!} r = 0, \qquad \sum_{p=1}^{p=3} \frac{(-1)^p}{p!} a^{p-1} \overset{p}{E}_n = 0$$

für

$$a = a_0 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

daher

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r a_0^{\,3} r^3}{(r-1)!} = 0$$

Die Kenntniss solcher Reihen, deren Summen sich besonders einfach wiedergeben, ist dann von einigem Nutzen, wenn es sich darum handelt schwachconvergirende Reihen stärker convergirend zu machen, was durch Verknüpfung mit passend gewälten erstbenannten Reihen meist erzielt werden kann.

b) Aus der Exponentiellen-Reihe werden mit Hilfe der Einheitswurzeln von J. von Villarceau (C. R. LXXXVI) die sogenannten „höheren hyperbolischen und elliptischen Sinusse"

$$\varphi_\mu(y) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{y^{\mu+hr}}{(\mu+hr)!} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{k=h} \frac{e^{\alpha^k} y}{\alpha^{\mu k}}, \qquad \alpha = e^{2\frac{\pi}{h} i} \tag{128}$$

$$\psi_\mu(y) = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{y^{\mu+hr}}{(\mu+hr)!} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{k=h-1} \frac{e_i^{2k+1} y}{\eta^{(2k+1)\mu}}$$

$$\eta = e^{\frac{\pi}{h} i} \qquad (129)$$

abgeleitet (Vergl. auch Dr. J. C. Kapteyn und Dr. W. Kapteyn „Die höheren Sinus" Sitzg. Ber. d. Akad. d. Wiss. Wien, XCIII. Bnd. II. Abth. Aprilheft 1886), aus welchen durch Multiplication mit $a^d e^{dx}$ und mittelst der Einsetzung

$$y = a^m e^{mx}$$

und Abhängigmachung von $(e^{mx}-1)$, ferner durch wiederholte Differentiation und schliessliche Nullsetzung der Veränderlichen die Summen neuer Reihen hervorgehen.

Es ist

$$a^d e^{dx} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(a e^x)^{(\mu+hr)m}}{(\mu+hr)!} = a^{\mu m+d} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{a^{hrm} e^{x(hrm+\mu m+d)}}{(\mu+hr)!}$$

$$= \frac{1}{h} a^d \sum_{k=1}^{k=h} \frac{e^{a^k a^m}}{a^{\mu k}} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{i!} a^{jk} a^{jm} e^{dx} (e^{mx}-1)^j;$$

$$a^d e^{dx} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{(a e^x)^{(\mu+hr)m}}{(\mu+hr)!} = a^{m\mu+d} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{a^{hmr} e^{x(hmr+\mu m+d)}}{(\mu+hr)!}$$

$$= \frac{1}{h} a^d \sum_{k=0}^{k=h-1} \frac{e_i^{2k+1} a^m}{\eta^{2k+1}\mu} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{j!} \eta_i^{2h+1} j a^{jm} e^{dx} (e^{mx}-1)^j$$

die complexen Glieder zusammenfassend, ist ferner

$$e^{a^k a^m} a^{k(j-\mu)} = e^{a^m \cos 2k\frac{\pi}{h}} \left(\cos\left(\overline{j-\mu}\, 2k\frac{\pi}{h} + a^m \sin 2k\frac{\pi}{h} \right) \right.$$

$$\left. + i \sin\left(\overline{j-\mu}\, 2k\frac{\pi}{h} + a^m \sin 2k\frac{\pi}{h} \right) \right)$$

$$e^{\sqrt{2k+1}\,a^m\eta^{\sqrt{2k+1}}\sqrt{j-\mu}} = e^{a^m\cos\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}}$$
$$\left(\cos\left(\sqrt{j-\mu}\,\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}+a^m\sin\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right)\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\sqrt{j-\mu}\,\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}+a^m\sin\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right)\right)$$

Schliesslich ist nach n maliger Differentiation und Nullsetzung des x

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} a^{\sqrt{hr+\mu}.m+d}\,\frac{\sqrt{\sqrt{hr+\mu}.m+d}^{n}}{(\mu+hr)!} =$$

$$= \frac{a^d}{h}\sum_{k=1}^{k=h} e^{a^m\cos 2k\frac{\pi}{h}}\sum_{j=0}^{j=n}\frac{a^{jm}}{j!}\cos\left(\sqrt{j-m}\,2k\frac{\pi}{h}+a^m\sin 2k\frac{\pi}{h}\right)\times$$

$$\times A^{j,\,n}_{m,\,d} \qquad (130)$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}(-1)^r a^{\sqrt{hr+\mu}\,m+d}\,\frac{\sqrt{\sqrt{hr+\mu}.m+d}^{n}}{(\mu+hr)!} =$$

$$= \frac{a^d}{h}\sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a^m\cos\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}}\sum_{j=0}^{j=n}\frac{a^{jm}}{j!}\cos\left(\sqrt{j-\mu}\,\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right.$$

$$\left.+a^m\sin\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right)A^{j,\,n}_{m,\,d} \qquad (131)$$

Aus dem notwendigen Verschwinden des Imaginären entspringen die Identitäten

$$\sum_{k=1}^{k=h} e^{a^m\cos 2k\frac{\pi}{h}}\sum_{j=0}^{j=n}\frac{a^{jm}}{j!}\sin\left(\sqrt{j-\mu}\,2k\frac{\pi}{h}+a^m\sin 2k\frac{\pi}{h}\right)\times$$

$$\times A^{j,\,n}_{m,\,d} = 0 \qquad (130')$$

$$\sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a^m\cos\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}}\sum_{j=0}^{j=n}\frac{a^{jm}}{j!}\sin\left(\sqrt{j-\mu}\,\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}+a^m\sin\sqrt{2k+1}\,\frac{\pi}{h}\right)$$

$$\times A^{j,\,n}_{m,\,d} = 0 \qquad (131')$$

Für $m = 1$ und $d = 0$ ist

$$\overset{j,\,n}{\underset{1,\,0}{A}} = \overset{j}{\underset{n}{E}}$$

und

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{a^{hr+\mu}\,\overline{hr+\mu}^{n-1}}{(\overline{hr+\mu-1})!} =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{k=h} e^{a\cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \cos\left(\overline{j-\mu}\; 2k\frac{\pi}{h} + a\sin 2k\frac{\pi}{h}\right) \overset{j}{\underset{n}{E}} \quad (132)$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{a^{hr+\mu}\,\overline{hr+\mu}^{n-1}}{(\overline{hr+\mu-1})!} =$$

$$\frac{1}{h} \sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a\cos\overline{2k+1}\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \cos\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\frac{\pi}{h}\right.$$

$$\left. + a\sin\overline{2k+1}\frac{\pi}{h}\right) \overset{j}{\underset{n}{E}} \quad (133)$$

$$\sum_{k=1}^{k=h} e^{a\cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \sin\left(\overline{j-\mu}\; 2k\frac{\pi}{h} + a\sin 2k\frac{\pi}{h}\right) \overset{j}{\underset{n}{E}} = 0 \quad (134)$$

$$\sum_{k=0}^{k=h-1} e^{a\cos 2k\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \sin\left(\overline{j-\mu}\;\overline{2k+1}\frac{\pi}{h} + a\sin\overline{2k+1}\frac{\pi}{h}\right) \times$$

$$\times \overset{j}{\underset{n}{E}} = 0 \quad (135)$$

Sämtliche Formeln gelten für jedes a.

Für $h = 2$, $\mu = 0, 1$ gehen aus (128) und (129) die Reihen für die „hyperbolischen und elliptischen Cosinus und Sinus" hervor; die Summen der daraus abgeleiteten Reihen finden sich aus (132) und (133).

α) $\mu = 0$, hyperbolischer Cosinus ; (132)

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\overline{2r}^{n-1}}{(2r-1)!}\, a^{2r} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!}\, (e^a + (-1)^j e^{-a})\, \overset{j}{E}_n \tag{136}$$

$\beta)$ $\mu = 0$, elliptischer Cosinus; (133)

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\overline{2r}^{n-2}}{(2r-1!}\, a^{2r} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \cos\left(a - j\frac{\pi}{2}\right) \overset{j}{E}_n \tag{137}$$

$\gamma)$ $\mu = 1$, hyperbolischer Sinus; (132)

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\overline{2r+1}^{n-1}}{(2r)!}\, a^{2r+1} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!}\, (e^a + (-1)^{j-1} e^{-a})\, \overset{j}{E}_n \tag{138}$$

$\delta)$ elliptischer Sinus; (133)

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{\overline{2r+1}^{n-1}}{2r)!}\, a^{2r+1} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a^j}{j!} \cos\left(a - \frac{j-1}{2}\pi\right) \overset{j}{E}_n \tag{139}$$

$$c) \quad \mathop{\mathfrak{U}}_{m,d}^{n,k} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \sum_{t=0}^{t=k-1} (-1)^s \frac{\overline{ks+t \,.\, m+d}^{n}}{(ks+t)!}\, a^{ks+t\,m+d}$$

Werden die Glieder so zu Gruppen vereinigt, dass die Exponenten einer und derselben Gruppe bezüglich des Moduls km convergent sind, so kommt

$$\mathop{\mathfrak{U}}_{m,d}^{n,k} = \sum_{h=0}^{h=k-1} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{\overline{kr+h\,m+d}^{n}}{(kr+h)!}\, a^{kr+h\,m+d}$$

Die Summe der unter dem zweiten Summenzeichen stehenden Reihe geht aus der hiefür bereits gefundenen Formel (131) hervor, wenn k statt h, h statt μ und g statt k geschrieben wird; es ist dann

$$\mathop{\mathfrak{U}}_{m,d}^{n,k} = \frac{a^d}{k} \sum_{h=0}^{h=k-1} \sum_{g=0}^{g=k-1} c^{a^m \cos \overline{2g+1}\frac{\pi}{k}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^{jm}}{j!} \cos\left(\overline{j-h}\,\overline{2g+1}\frac{\pi}{k} + a^m \sin \overline{2g+1}\frac{\pi}{k}\right) \overset{j,\,n}{A}_{m,d} \tag{140}$$

woraus für $m = 1$, $d = 0$, wenn noch $n+1$ statt n gesetzt wird, folgt

$$\underset{1,0}{\overset{n+1,k}{\mathfrak{U}}} = \frac{1}{k} \sum_{h=0}^{h=k-1} \sum_{g=0}^{g=k-1} e^{a\cos\sqrt{2g+1}\frac{\pi}{k}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{j=n+1} \frac{a^j}{j!} \cos\left(\sqrt{j-h}\,2g \times 1\,\frac{\pi}{k} + a\sin\sqrt{2g+1}\,\frac{\pi}{k}\right) \overset{j}{E}_{n} \qquad (141)$$

Brünn, Mai 1891.

III.

Arithmetische Entwicklungen.

Von

Franz Rogel.

Der Staudt'sche Satz

$$(-1)^n B_n = A_n + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{g} \qquad (1)$$

wo A_n eine ganze Zal und $a, b, \ldots g$ Primzalen von der Eigenschaft sind, dass $\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}, \ldots \frac{g-1}{2}$ Teiler von n sind, gestattet die Umformung von die Bernoulli'schen Zalen B_n als Coefficienten enthaltende Reihen in solchel, bei welchen die Stellenvariabele eine Primzal ist.

1.

$$u = \frac{v}{e^v - 1}$$

$$= 1 - \frac{v}{2} + \sum_{r=1} (-1)^{r-1} B_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} \quad -2\pi < v < +2\pi$$

Ersetzt man $(-1)^{r-1} B_r$ durch obigen Ausdruck (1), so ist

$$u = 1 - \frac{v}{2} - (A_1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) \frac{v^2}{2!} - (A_2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}) \frac{v^4}{4!}$$
$$- (A_3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7}) \frac{v^6}{6!} - \ldots$$

Ordnet man diese Reihe nach den ganzen Zalen A, sowie nach den

aufeinanderfolgenden reciproken Primzalen $\frac{1}{p}$, so wird, da dieselbe nur in den Coefficienten der Potenzen $v^{m(p-1)}$ als Summand erscheint, wenn

$$\sum_{m=1} \frac{v^{m(p-1)}}{[m(p-1)]!} = V_{p-1}$$

gesetzt wird

$$u = 1 - \frac{v}{2} - \sum_{r=1}^{\infty} A_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} - (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})V_2 - \tfrac{1}{5}V_4 - \tfrac{1}{7}V_6 \ldots \qquad (2)$$

Nun ist

$$V_2 = \frac{e^v + e^{-v}}{2} - 1 = \operatorname{cof} v - 1$$

ferner

$$V_p = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} e^{v\, e^{\frac{2k\pi}{p-1} i}} - 1$$

$$= \frac{2}{p-1}\left[\operatorname{cof} v + \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} e^{v\cos\frac{2k\pi}{p-1}} \cos\left(v\sin\frac{2k\pi}{p-1}\right)\right] - 1$$

daher

$$2\operatorname{cof} v \cdot \sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} + \sum_{p=3} \frac{1}{p}\left[\frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} e^{v\cos\frac{2k\pi}{p-1}} \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(v\sin\frac{2k\pi}{p-1}\right) - 1\right]$$

$$= \tfrac{3}{2} - \frac{v}{2} - \frac{v}{e^v - 1} - \tfrac{1}{2}\operatorname{cof} v - \sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} \qquad (3)$$

Wird iv für v genommen, so ist wegen

$$\operatorname{cof} iv = \cos v$$

$$e^{iv\cos\frac{2k\pi}{p-1}} \cos\left(iv\sin\frac{2k\pi}{p-1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right) + i\sin\left(v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right)\right] \times$$

$$\times \left(e^{v\sin\frac{2k\pi}{p-1}} + e^{-v\sin\frac{2k\pi}{p-1}}\right)$$

$$\frac{iv}{e^{iv}-1} = \frac{v}{2}\cot\frac{v}{2} - \frac{iv}{2}$$

$$2\cos v \cdot \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{(p-1)p} + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \cos\left(v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(v\sin\frac{2k\pi}{p-1}\right) - 1\right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{v}{2}\cot\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\cos v - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r A_r \frac{v^{2r}}{(2r)!} \qquad (4)$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass die imaginären Bestandteile identisch verschwinden müssen.

2.

Auf dieselbe Weise mit

$$2\log\frac{iv}{2\sin\frac{iv}{2}} = \sum_{r=1} (-1)^r \frac{B_r v^{2r}}{r(2r)!} \qquad -2\pi < v < +2\pi$$

verfahren, erhält man

$$2\log\frac{iv}{2\sin\frac{iv}{2}} = \tfrac{1}{2}Z_2 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p} Z_{p-1} + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \frac{v^{2r}}{r(2r)!}$$

wo

$$Z_{p-1} = \sum_{m=1} \frac{v^{m(p-1)}}{m^{\frac{p-1}{2}}\,[m(p-1)]!}$$

sich in endlicher Form durch

$$Z_2 = \varphi(v) = \sum_{m=1} \frac{v^{2m}}{m(2m)!}$$

ausdrücken lässt. Es ist nämlich

$$Z_{p-1} = \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(v\, e^{\frac{2k\pi}{p-1} i}\right)$$

oder, weil der imaginäre Bestandteil identisch verschwinden muss, auch

$$= \frac{2}{p-1} \Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(v\, e^{\frac{2k\pi}{p-1} i}\right)$$

wo das Symbol $\Re$ anzeigt, dass nur der reelle Teil zu nehmen ist.

Mithin ist

$$\sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{(p-1)p} \Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(v\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\varphi(v) - \log \frac{2\operatorname{sin}\frac{v}{2}}{v} - \tfrac{1}{2} \sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r}}{r(2r)!} \tag{5}$$

und iv für v gesetzt

$$\sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{(p-1)p} \Re_i \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi\left(iv\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\varphi(iv) - \log \frac{2\sin\frac{v}{2}}{v} - \tfrac{1}{2} \sum (-1)^r A_r \frac{v^{2r}}{r(2r)!} \tag{6}$$

Die Function φ hängt mit dem Integralcosinus in einfacher Weise zusammen; es ist

$$\varphi(z) = \tfrac{1}{2}\Re\{-Ci(iz) - K - \log iz\}, \quad K = 0{,}577\ldots$$

Durch Differentiation der Gleichungen (3), (4), (5) und (6) entstehen die nachfolgenden

$$2\operatorname{sin} v \sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} + \sum_{p=3} \frac{1}{p}\left[\frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} e^{v\cos\frac{2k\pi}{p-1}} \times\right.$$

$$\left.\times \cos\left(v \sin\frac{2k\pi}{p-1} + \frac{2k\pi}{p-1}\right)\right] = -\tfrac{1}{2} - \frac{e^v - v\, e^v - v}{(e^v-1)^2} - \tfrac{1}{2}\operatorname{sin} v$$

$$- \sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \tag{3'}$$

$$-2\sin v \sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} + \sum_{p=3} \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \left(e^{v \sin \frac{2k\pi}{p-1}} \times \right.\right.$$

$$\times \sin\left(\frac{2k\pi}{p-1} - v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right)$$

$$\left.\left. - e^{-v\sin\frac{2k\pi}{p-1}} \sin\left(\frac{2k\pi}{p-1} + v\cos\frac{2k\pi}{p-1}\right)\right)\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cot\frac{v}{2} + \frac{v}{4}\left(1+\cot^2\frac{v}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\sin v - \sum_{r=1} (-1)^r A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \quad (4')$$

$$\sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} \Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{p-1}} \varphi'\left(v\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\varphi'(v) + \frac{2}{v} - 2\frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}} - \tfrac{1}{2} \sum_{r=1} A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \quad (5')$$

$$\sum_{p=3} \frac{1}{p(p-1)} \Re \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} i\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}} \varphi'\left(iv\, e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{4} i\varphi'(iv) - 2\cot v + \frac{2}{v} - \tfrac{1}{2} \sum_{r=1} (-1)^r A_r \frac{v^{2r-1}}{(2r-1)!} \quad (6')$$

Die ganzen Zalen A_r bestimmen sich durch die Gleichung (1) aus den Bernoulli'schen Zalen und aus den in ihren Nennern enthaltenen Primzalen; sie können mit derselben Berechtigung als Coefficienten verwendet werden als die Bernoulli'schen Zalen, aus denen sie hervorgiengen.

Zur recursiven Berechnung dieser Grössen gab Hermite („Extrait d'une lettre de M. Hermite á M. Borchardt" Crelle J. LXXXI pag. 93) die die Kenntniss der Bernoulli'schen Zalen nicht erfordernde Relation

$$\binom{2n+1}{2} A_1 + \binom{2n+1}{4} A_2 + \ldots + \binom{2n+1}{2n} A_n$$
$$= 1 - n - 2^{2n-1} - S_3 - S_5 \ldots - S_p \quad (7)$$

worin

$$S_p = \frac{1}{p}\left[\binom{2n+1}{p-1} + \binom{2n+1}{2p-2} + \binom{2n+1}{3p-3} + \ldots\right]$$

und die Summen S_3, S_5, ... S_p sich auf alle Primzalen p von 3 bis $2n+1$ beziehen.

Hermite bewies mit Hilfe von Einheitswurzeln, dass S_p für jede Primzal p eine ganze Zal ist.

Ein anderer Beweis kann mittelst eines rein zalentheoretischen Hilfsmittels — des Fermat'schen Satzes — geführt werden.

Es stellt sich hiebei heraus, dass obiger Satz nur für ungerade Primzalen gilt.

Für jede Primzal p und jedes durch p nicht teilbare x ist

$$x^{m(p-1)+q} \equiv x^q \mod p \quad 0 \leqq q < p$$

es kann daher gesetzt werden

$$(x+z)^{2n+1} = \sum_{m=0}^{m=2n+1} \binom{2n+1}{m} x^m z^{2n-m+1}$$

$$\equiv \left[\binom{2n+1}{0} z^{2n+1} + \binom{2n+1}{p-1} z^{2n-p+2} + \ldots\right] x^0$$

$$+ \left[\binom{2n+1}{1} z^{2n} + \binom{2n+1}{p} z^{2n-p+1} + \ldots\right] x^1$$

$$+ \left[\binom{2n+1}{2} z^{2n-1} + \binom{2n+1}{p+1} z^{2n-p} + \ldots\right] x^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left[\binom{2n+1}{t} z^{2n-t+1} + \binom{2n+1}{p+t-1} z^{2n-p-t+2} + \ldots\right] x^t$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\binom{2n+1}{p-2} z^{2n-p+3} + \binom{2n+1}{2p-3} z^{2n-2p+4} + \ldots\right] x^{p-2} \mod p \qquad (8)$$

Sei ferner

$$2n+1 \equiv r \mod p-1, \quad 1 \leqq r < p-1$$

so ist unter der Voraussetzung, dass nebst x auch $x+z$ durch p nicht teilbar ist,

$$x+z)^{2n+1} \equiv (x+z)^r \equiv \sum_{s=0}^{s=r} \binom{r}{s} x^s z^{r-s} \mod p \qquad (9)$$

Der Vergleich der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in (8) und (9) ergiebt die Congruenzen

$$\binom{2n+1}{0} z^{2n+1} + \binom{2n+1}{p-1} z^{2n-p+2} + \ldots \equiv \binom{r}{0} z^r \mod p$$

$$\binom{2n+1}{1} z^{2n} + \binom{2n+1}{p} z^{2n-p+1} + \ldots \equiv \binom{r}{1} z^{r-1} \mod p$$

$$\binom{2n+1}{2} z^{2n-1} + \binom{2n+1}{p+1} z^{2n-p} + \ldots \equiv \binom{r}{2} z^{r-2} \mod p$$

. . . . . .

$$\binom{2n+1}{t} z^{2n-t+1} + \binom{2n+1}{p+t-1} z^{2n-p-t+2} + \ldots \equiv \binom{r}{t} z^{r-t} \mod p$$

. . . . . .

$$\binom{2n+1}{r} z^{2n-r+1} + \binom{2n+1}{p+r-1} z^{2n-p-r+2} + \ldots \equiv \binom{r}{r} z^0 \mod p \quad (10)$$

Aus der ersten Congruenz dieses Systems geht für $z = 1$ unmittelbar der angezogene Satz hervor, dass S_p eine ganze Zal ist. Hiebei wird aber vorausgesetzt, dass

$$x \quad \text{und} \quad x+z = x+1$$

durch p nicht teilbar sind.

Nun ist entweder x oder $x+1$ durch die einzige gerade Primzal 2 teilbar.

Der Hermite'sche Satz gilt daher nur für ungerade Primzalen.

Hermite erweiterte seinen Satz und construirte die neue zalentheoretische Function

$$\mathfrak{S}_p = \frac{z^{2n+1}}{p}\left[\frac{\binom{2n+1}{p-1}}{z^{p-1}} + \frac{\binom{2n+1}{2p-2}}{z^{2p-2}} + \frac{\binom{2n+1}{3p-3}}{z^{3p-3}} + \ldots\right] \quad (11)$$

von welcher er, ohne sich in einen Beweis einzulassen, behauptet, dass sie für jede Primzal p eine ganze Zal sein müsse.

Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellt aus der ersten Congruenz des Systemes (10).

Da nämlich

$$z^r \equiv z^{2n+1} \mod p$$

gesetzt und dann z^{2n+1} herausgehoben werden kann, so ist tatsächlich

$$z^{2n+1}\left[\frac{\binom{2n+1}{p-1}}{z^{p-1}} + \frac{\binom{2n+1}{2p-2}}{z^{2p-2}} + \ldots\right] \equiv \mathfrak{S}_p \equiv 0 \mod p$$

In dem genannten Systeme ist dieser Satz nur als specieller Fall enthalten.

Eine allgemeinere Function kann aus der die beliebige Grösse t enthaltenden Congruenz des Systemes (10) abgeleitet werden, wenn man beiderseits mit z^t multiplicirt, z^r durch das congruente z^{2n+1} ersetzt, sodann auf die linke Seite schafft und schliesslich z^{2n+1} heraushebt; es ist dann die neue Function

$$\mathfrak{S}_p = \frac{z^{2n+1}}{p}\left[\binom{2n+1}{t} - \binom{r}{t} + \frac{\binom{2n+1}{p+t-1}}{z^{p-1}} + \frac{\binom{2n+1}{2p+t-2}}{z^{2p-2}} + \ldots\right] \qquad t < p-1 \tag{12}$$

eine Summe, welche für jede Primzal p und jedes ganze z eine ganze Zal ist.

Diese Function zeichnet sich vor der Hermite'schen $\mathfrak{S}_p$ dadurch aus, dass sie eine neue zwischen 0 und r liegende Veränderliche t enthält.

Für $t = 0$ geht dieselbe in $\mathfrak{S}_p$ über. Uebersteigt t die Grösse r, so verschwindet $\binom{r}{t}$ und damit das einzige r enthaltende Glied.

Wenn $p = 2$ angenommen wird, so ist

$$r = 1, \quad z^{2n+1} \equiv z^1 \bmod 2$$

der verallgemeinerte Satz behält seine Richtigkeit für $t = 1$, er ist dann nur eine Umschreibung der selbstverständlichen Congruenz

$$(z+1)^{2n+1} - z^{2n+1} \equiv 1 \bmod 2$$

und lautet mit Weglassung der durch 2 teilbaren Glieder

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{z^{2n+1}}{2}\left[\frac{\binom{2n+1}{2}}{z} + \frac{\binom{2n+1}{3}}{z^2} + \ldots\right] \tag{13}$$

Brünn, Juli 1891.

IV.

Das Tetraeder bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen.

Von

R. Hoppe.

§ 1. Die Coordinaten eines beliebigen Punkts P in Bezug auf beliebige rechtwinklige Axen seien x, y, z, die der Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 des Tetraeders T mögen durch dieselben Indices 1, 2, 3, 4 bezeichnet sein. P liege innerhalb T. Wir ziehen durch P die Tetraedertransversale A_1B_1, dann durch B_1 die Dreieckstransversale A_2B_2. Diese 2 Transversalen und die Kante A_3A_4 seien bzhw. durch die Punkte P, B_1, B_2 (von den Ecken ausgehend) in den Verhältnissen $u:(1-u)$, $v:(1-v)$, $w:(1-w)$ geteilt. Die gleichen Verhältnisse gelten auch von den Teilen ihrer Projectionen auf die xAxe: sind also x_1', x_2' die Abscissen von B_1, B_2, so hat man:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_1' - x_1)u \\ x_1' &= x_2 + (x_2' - x_2)v \\ x_2' &= x_3 + (x_3 - x_5)w \end{aligned}$$

daher nach Elimination von x_1' und x_2':

$$x = x_1(1-u) + x_2u(1-v) + x_3uv(1-w) + x_4uvw \qquad (1)$$

Sofern die x Axe eine willkürliche Gerade ist, reicht diese Abscissenrelation allein zur Bestimmung des Punktes P aus und enthält speciell die analogen Relationen der y und z in sich.

Wie leicht zu sehen, haben die neuen Variabeln u, v, w unabhängig von einander das gleiche Intervall von 0 bis 1 zu durchlaufen, damit P das ganze Tetraeder erzeugt.

Die Functionsdeterminante $\left|\begin{matrix}\partial x & \partial g & \partial z \\ \partial u & \partial v & \partial w\end{matrix}\right|$ ergibt den Wert

$$6Tu^2v$$

daher ist das Körperelement

$$\partial T = 6Tu^2v\,\partial u\,\partial v\,\partial w \tag{2}$$

Hieraus findet man durch viele, aber sehr leichte Integrationen:

$$\int x\,\partial T = \frac{T}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \tag{3}$$

$$\int xy\,\partial T = \frac{T}{20}\{(x_1+x_2+x_3+x_6)(y_1+y_2+y_3+y_4) + x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_1y_4\} \tag{4}$$

$$\int x^2\partial T = \frac{T}{20}\{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\} \tag{5}$$

Gl. (3) ergibt zunächst die Bedingung dafür, dass der Anfangspunkt Schwerpunkt des homogenen Tetraeders ist, nämlich die 3 analogen Gleichungen:

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 0;\quad \text{etc.} \tag{6}$$

Unter eben dieser Voraussetzung werden die Gl. (4) (5); deren jede 3 analoge vertritt:

$$\int xy\,\partial T = \frac{T}{20}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4);\quad \text{etc.} \tag{7}$$

$$\int x^2\partial T = \frac{T}{20}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2);\quad \text{etc.} \tag{8}$$

Jetzt sind ausser Gl. (6) die 3 analogen Gleichungen

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4 = 0;\quad \text{etc.} \tag{9}$$

Bedingung dafür, dass die Axen der x, y, z Hauptträgheitsaxen des homogenen Tetraeders sind.

Die Gl. (6) (9) lassen sich in dem Satze aussprechen: „Das homogene Tetraeder hat mit dem Systeme seiner gleichbelasteten Ecken gemeinsamen Schwerpunkt und gemeinsame Hauptträgheitsaxen."

Gemäss Gl. (8) können wir noch hinzufügen: „Die Hauptträgheitsmomente des Tetraeders verhalten sich zu denen seines Eckensystems wie die Tetraedermasse zur 20fachen Masse jeder Ecke."

Anmerkung. Die vorstehenden Resultate sind ohne Zweifel bekannt. Auch das zur Herleitung angewandte Princip der Aneinanderfügung von Strecken mittelst Addition ihrer Projectionen auf eine willkürliche Gerade mag immerhin nicht unbekannt sein. Jedenfalls aber ist dieses Princip bisher so wenig beachtet worden, dass es sich wol lohnt, an einer durchgeführten Rechnung zu zeigen, wie einfach sich diese nach elementarsten Begriffen der gewöhnlichen analytischen Geometrie gestaltet, wenn man danach verfährt. Dass es in der Tat nötig ist darauf besonders aufmerksam zu machen, beweisen die in neuester Zeit sich mehrenden Schriften zur Verbreitung der Kenntniss der Hamilton'schen Methode der Streckenaddition, welche auf grossem Umwege mit Aufwand von Symbolen, neuer Terminologie und besonders für sie geschaffener Theorie nicht mehr leistet als die Coordinatenmethode auf der Basis allgemein üblicher Begriffe. Erwägt man, dass die auf die Erlernung der Halmilton'schen Lehre verwandte Mühe nicht allein ganz unnütz ist, sondern auf den, der sich ihr unterzieht, sogar mancherlei schädliche Wirkung übt, dass die Symbolik die klare Auffassung erschwert, die doppelte Terminologie, verschiedene Benennung für Gleiches, gleiche für Verschiedenes, dem Verständniss Hindernisse bereitet, so kann man es doch nur durch Unbekanntschaft mit der correcten Handhabung der Coordinatenrechnung von Seiten aller Anhänger von Hamilton's Erfindung erklären, dass sie derselben einen Vorzug zuerkennen Auch wird diese Vermutung schon dadurch bestätigt, dass keine ihrer Schriften die Projectionsaddition erwähnt.

§ 2. Wir stellen uns nun die Aufgabe, in voller Allgemeinheit ein Tetraeder darzustellen, dessen Hauptträgheitsaxen gegeben sind. Unter den 12 Coordinaten der Ecken vermögen 6 die Bedingungen (6) (9) zu erfüllen, während die 6 übrigen willkürlich bleiben. Um die Symmetrie soweit möglich zu bewahren, liegt es nahe, 2 Ecken relativ zu den Axen als willkürlich zu betrachten, die 2 andern zu suchen. Eine andre Forderung indes, dass die Lösung rational, somit eindeutig und stets reell sei, lässt sich damit nicht vereinen. Wir wollen daher durch 2 Lösungen die verschiedenen Anordnungen einzeln in Ausführung bringen.

Seien zuerst x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 beliebig gegeben, und zur Abkürzung

$$x_0 = x_1 + x_2, \quad \text{etc.} \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 = \overline{xy}, \quad \text{etc.} \tag{10}$$

gesetzt. Eliminirt man x_4, y_4, z_4 gemäss den Schwerpunktsgleichungen (6), so werden die Trägheitsaxengleichungen (9):

$$\left.\begin{aligned} (y_0 + y_3)(z_0 + z_3) + \overline{yz} + y_3 z_3 &= 0 \\ (z_0 + z_3)(x_0 + x_3) + \overline{zx} + z_3 x_3 &= 0 \\ (x_0 + x_3)(y_0 + y_3) + \overline{xy} + x_3 y_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Noch einfacher werden sie durch die Einführungen

$$x_5 = x_0 + 2x_3, \quad \text{etc.} \quad (xy) = x_0 y_0 + 2\overline{xy}, \quad \text{etc.} \tag{12}$$

und lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} (yz) + y_5 z_5 &= 0 \\ (zx) + z_5 x_5 &= 0 \\ (xy) + x_5 y_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Daraus folgt, dass

$$R^2 = -(yz)(zx)(xy) \tag{14}$$

positiv sein muss um ein reelles Tetraeder zu ergeben. Dies angenommen hat man:

$$x_0 + 2x_3 = R : (yz); \quad y_0 + 2y_3 = R : (zx); \quad z_0 + 2z_3 = R : (xy) \tag{15}$$

und zwar ist R mit gemeinsamem Doppelvorzeichen zu denken, so dass zweien Ecken 1, 2 stets 2 Eckenpare 3, 4 entsprechen, oder keins.

Ein Uebergang vom reellen zum imaginären Tetraeder kann nur mit Verschwinden einer der Grössen (yz), (zx), (xy) eintreten. Zufolge den Gl (13) verschwindet dann zugleich eine zweite und eine der Grössen x_5, y_5, z_5 Letztere sei z_5; dann hat man:

$$x_0 z_0 + \overline{xz} = 0; \quad y_0 z_0 + \overline{yz} = 0; \quad z_0 + 2z_3 = 0 \tag{16}$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben, wofern nicht $z_1 = z_2 = 0$ (ein auszuschliessender Fall, weil dann auch $z_3 = z_4 = 0$ würde):

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

d. h. eine Trägheitsaxe (die der z) geht durch eine Kante $(A_1 A_2)$.

Der Fall $(yz) = (zx) = (xy) = 0$ ist auszuschliessen; hier müsste eine Kante durch den Schwerpunkt gehen.

Geht man nun von dem Falle (16) aus und verschiebt die zweite Ecke unendlich wenig, indem man setzt

$$x_2 = \alpha x_1 + \delta: \quad y_2 = \alpha y_1 + \varepsilon; \quad z_2 = -\frac{3+\alpha}{1+3\alpha} z_1 \tag{17}$$

so wird

$$(yz) = -2\varepsilon u; \quad (zx) = -2\delta u$$
$$R^2 = -4\delta\varepsilon u^2 (xy)$$

wo (xy) als endlich bleibend zu betrachten ist. Den Fällen $\delta = 0$; $\varepsilon \gtrless 0$ und $\delta \gtrless 0$; $\varepsilon = 0$ entspricht kein Tetraeder. Einen stetigen Uebergang vom reellen zum imaginären Tetraeder erhält man also nur, wenn δ und ε zugleich verschwinden, und zwar muss von da an δ oder ε sein Vorzeichen wechseln, während bzhw. ε oder δ zu seinem Vorzeichen zurückkehrt, so dass niemals $\delta : \varepsilon$ auf beiden Seiten $= x_1 : y_1$ werden kann. Jetzt können δ und ε beliebig gross werden und geben für je 2 Systeme x_2, y_2 die Entscheidung, ob die Tetraeder in Betreff der Realitätsfrage sich in gleichem oder entgegengesetztem Falle befinden.

Zum Schlusse wollen wir noch für 2 gegebene Ecken die Werte der Hauptträgheitsmomente des Tetraeders aufstellen. Es war

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(x_5 - x_0); \quad x_4 = -\tfrac{1}{2}(x_5 + x_0)$$

also

$$x_3^2 + x_4^2 = \tfrac{1}{2}(x_5^2 + x_0^2)$$

Daher ist nach Gl. (5), wenn man noch die Werte (10) (12) (15) (14) einsetzt,

$$\int x^2 \partial T = \frac{T}{40}\left(3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 + \frac{(zx)(xy)}{(yz)}\right); \quad \text{etc.} \tag{18}$$

Die Addition je zweier der 3 analogen Gleichungen ergibt die Hauptträgheitsmomente.

Zu bemerken ist, dass die 2 den 2 gegebenen Ecken entsprechenden Tetraeder gleichen Inhalt

$$T = \text{abs.} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \pm x_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} : 4$$

haben. Wie Gl. (18) zeigt, sind darum auch ihre Trägheitsmomente gleich.

§ 3. Es sollen ferner nach Auswahl von 6 Bestimmungsstücken die übrigen durch dieselben rational bestimmt werden.

Die Schwerpunktsbedingungen erfüllen wir, wie vorher, durch die vierte Ecke, gehen daher von den Gl. (13) aus. Der ersten zufolge ist

$$z_0 + 2z_3 = -\frac{(yz)}{y_5} \tag{19}$$

Eliminirt man z_5 zwischen der ersten und zweiten, so erhält man zwischen x_1, x_2, x_3 die homogene lineare Gleichung:

$$(zx)\,y_5 + (yz)\,x_5 = 0$$

welche entwickelt lautet:

$$\{(y_2+3y_3)z_1+(y_3-y_2)z_2\}x_1+\{(y_3-y_1)z_1+(y_1+3y_3)z_2\}x_2 - \{(3y_1+y_2)z_2+(y_1+3y_2)z_2\}x_3 = 0$$

Die dritte Gl. (13) gibt, gleichfalls homogen linear:

$$(2y_1+y_2+y_3)x_2+(y_1+2y_2+y_3)+(y_1+y_2+2y_3)x_3 = 0$$

Beide Gleichungen zusammen geben die Verhältnisse der 3 Grössen x_1, x_2, x_3, die wir foleendermassen schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi\{Y(z_1+3z_2)-y_1Q\} \\ x_2 &= \xi\{-Y(3z_1+z_2)-y_2Q) \\ x_3 &= \xi\{Y(z_1-z_2)-y_3Q\} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

wo

$$2Y = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_2y_3+y_3y_1+y_1y_2 \tag{21}$$

$$Q = y_1z_2-y_2z_1 \tag{22}$$

gesetzt ist, und ξ willkürlich bleibt. Nimmt man also

$$\xi,\quad y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad z_1,\quad z_2$$

beliebig an, so ergeben sich x_1, x_2, x_3 aus den Gl. (20), z_5 aus Gl. (19), x_4, y_4, z_4 aus den Gl (6), sämtlich rational, mit der einen Ausnahme

$$y_1+y_2+2y_3 = 0$$

einem Falle, dem kein Tetraeder entspricht.

Aus den obigen Werten der Coordinaten berechnet man nach Gl. (5) die Trägheitsmomente. Es ergibt sich: (23)

$$\int x^2\,\partial T = \frac{T}{5}\xi^2\,Y\{Y(3z_1^2+2z_1z_2+3z_2^2)-Q^2\}$$

$$\int y^2 \partial T = \frac{T}{5} Y$$

$$\int z^2 \partial T = \frac{T}{40} \left\{ 3z_1^2 + 2z_1 z_2 + 2z_2^2 + \left[\frac{(3y_1 + y_2)z_1 + (y_1 + 3y_2)z_2}{y_1 + y_2 + 2y_3} \right]^2 \right\}$$

Der kritische Fall (16), welcher bei der Annahme von § 3. auftrat, hat auch bei rationaler Lösung Bedeutung Er ist definirt durch die 2 Gleichungen:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \alpha; \quad \frac{z_2}{z_1} = -\frac{3+\alpha}{1+3\alpha} \tag{24}$$

Ihnen zufolge werden die Gl. (13):

$$(yz) = 0; \quad (zx) = 0; \quad (xy) = (3 + 2\alpha + 3\alpha^2) x_1 y_1 = -x_5 y_5$$

Die ersten beiden geben:

$$z_5 = 0$$

die letzte lässt sich spalten in

$$x_5 = \frac{3 + 2\alpha + 3\alpha^2}{\beta} x_1; \quad y_5 = -\beta y_1$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_3}{x_1} &= \frac{3+2\alpha+3\alpha^2}{2\beta} - \frac{1+\alpha}{2}; \quad \frac{y_3}{y_1} = -\frac{1+\alpha+\beta}{2} \\ \frac{z_3}{z_1} &= \frac{1-\alpha}{1+3\alpha} \\ \frac{x_4}{x_1} &= -\frac{3+2\alpha+3\alpha^3}{2\beta} - \frac{1+\alpha}{2}; \quad \frac{y_4}{y_1} = -\frac{1+\alpha-\beta}{2} \\ \frac{z_4}{z_1} &= \frac{1-\alpha}{1+3\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die Annahme (24) bildet insofern einen Grenzfall, als bei unveränderten $y_2 : y_1$ und $z_2 : z_1$ sich $x_2 : x_1$ nicht ändern kann, ohne dass ein Widerspruch entsteht. Das heisst: „Für jede Lage der ersten Ecke gibt es eine unbegrenzte, stetige Folge von Wertparen zweier Coordinaten der zweiten Ecken, deren jedes nur einem einzigen Werte der dritten Coordinate entspricht. Dieser Wert ist immer reell und kann auch keine imaginäre Veränderung erleiden."

Die Trägheitsmomente sind in dem in Rede stehenden Falle bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned}\int x^2\partial T &= \frac{T}{40}\left(\frac{3+2\alpha+3\alpha^2}{\beta}\right)^2(1+\beta^2)x_1^2\\ \int y^2\partial T &= \frac{T}{40}(3+2\alpha+3\alpha^2+\beta^2)y_1^2\\ \int z^2\partial T &= \frac{T}{5}\frac{3+2\alpha+3\alpha^2}{(1+3\alpha)^2}z_1^2\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Bei Einführung des Grenzfalles durch Gl. (24) ist die z Axe durch die Kante A_1A_2 gelegt wordon. Legte man sie durch eine andre Kante, so wäre möglicherweise die gegebene Ecke eine andre. Da aber diese willkürlich bleibt, so wird das System der Tetraeder nicht erweitert. Setzt man statt der z Axe die x oder y Axe, so wird nur die Lage des Tetraeders verändert. Folglich stellen unsere Formeln schon das vollständige System dar, wenn x_1, y_1, z_1, α β alle Werte von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen.

V.

Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik.

Von

V. Schlegel.

1. Die Wäge-Aufgabe. — Welche vier Gewichtstücke muss man besitzen, um jede ganze Anzahl von Gewichtseinheiten (z. B. Gramm) von 1 bis 40 damit abwägen zu können? — D. h. wie ässt sich die Zahl 40 in vier Teile zerlegen, so dass jede ganze Zahl von 1 bis 40 als algebraische Summe aus diesen Teilen dargestellt werden kann?

Es seien die vier Teile a, b, c, d. Dann müssen die 40 Zahlen durch folgende Combinationen ausgedrückt sein, wobei $a > b > c > d$ angenommen wird:

a	$a+b$	$a-b$	$a+b+c$	$a+b-c$	$b+c-a$	$c+a-b$	$a+b+c+d$
b	$a+c$	$a-c$	$b+c+d$	$b+c-d$	$c+d-b$	$d+b-c$	$a+b+c-d$
c	$a+d$	$a-d$	$c+d+a$	$c+d-a$	$d+a-c$	$a+c-d$	$a+b-c+d$
d	$b+c$	$b-c$	$d+a+b$	$d+a-b$	$a+b-d$	$b+d-a$	$a-b+c+d$
	$b+d$	$b-d$					$-a+b+c+d$
	$c+d$	$c-d$					$a+b-c-d$
							$b+c-a-d$
							$c+a-b-d$
$4+$	$6+$	$6+$	$4+$	$4+$	$4+$	$4+$	8
							$= 40$

Sollte eine dieser Formen einen negativen Wert liefern, so würde man alle in ihr enthaltenen Vorzeichen umkehren.

Den grössten Wert unter allen diesen Formen hat $a+b+c+d$. Demnach muss sein

$$(1) \quad a+b+c+d = 40$$

Den nächstgrössten Wert hat $a+b+c$ als Summe der drei grössten Zahlen. Demnach ist

$$(2) \quad a+b+c = 39$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \quad d = 1$$

Hieraus ergiebt sich für die Zahl 38 die Darstellung

$$(4) \quad a+b+c-d = 38$$

Die nächstgrösste Zahl ist offenbar $a+b+d$, also

$$(5) \quad a+b+d = 37$$

Aus (1) und (5) folgt

$$(6) \quad c = 3$$

Demnach aus (2) und (6)

$$(7) \quad a+b = 36$$

aus (7) und (3)

$$(8) \quad a+b-d = 35$$

aus (5) und (6)

$$(9) \quad a+b+d-c = 34$$

aus (7) und (6)

$$(10) \quad a+b-c = 33$$

aus (10) und (3)

$$(11) \quad a+b-c-d = 32$$

Die nächstgrösste Zahl ist $a+c+d$, also

$$(12) \quad a+c+d = 31$$

Aus (12) und (1) folgt

$$(13) \quad b = 9$$

und aus (7)

$$(14) \quad a = 27$$

Die vier gesuchten Zahlen sind also 27, 9, 3, 1.

Sämtliche Zerlegungen der Zahlen 1—40 sind durch folgendes Schema dargestellt, bei welchem in jeder Zifferngruppe das erste Zeichen durch den Wert von a, und die folgenden bzhw. durch die Werte von b, c, d zu ersetzen sind. Die Null bedeutet das Fehlen des betr. Buchstabens. Das Zeichen $\bar{1}$ sagt aus, dass der betr. Wert das Vorzeichen — hat.

$1111=40$	$11\bar{1}0=33$	$100\bar{1}=26$	$1\bar{1}1\bar{1}=20$	$0111=13$	$01\bar{1}0=6$
$1110=39$	$11\bar{1}\bar{1}=32$	$10\bar{1}1=25$	$1\bar{1}01=19$	$0110=12$	$01\bar{1}\bar{1}=5$
$111\bar{1}=38$	$1011=31$	$10\bar{1}0=24$	$1\bar{1}00=18$	$011\bar{1}=11$	$0011=4$
$1101=37$	$1010=30$	$10\bar{1}\bar{1}=23$	$\bar{1}10\bar{1}=17$	$0101=10$	$0010=3$
$1100=36$	$101\bar{1}=29$	$1\bar{1}11=22$	$1\bar{1}\bar{1}1=16$	$0100=9$	$001\bar{1}=2$
$110\bar{1}=35$	$1001=28$	$1\bar{1}10=21$	$1\bar{1}\bar{1}0=15$	$010\bar{1}=8$	$0001=1$
$11\bar{1}1=34$	$1000=27$		$1\bar{1}\bar{1}\bar{1}=14$	$01\bar{1}1=7$	

Es ist leicht, ein mechanisches Gesetz zu erkennen, nach welchem diese Formen aus einander gebildet sind. Auch sieht man, dass dieselben den Anfang eines triadischen Zahlsystems bilden.

Was nun die am Eingang erwähnte Aufgabe betrifft, so wird das Wägen einer beliebigen ganzen Anzahl von Gramm, d. h. die Herstellung jedes beliebigen Uebergewichtes auf einer Wageschale (innerhalb der festgesetzten Grenze) dadurch bewirkt, dass man die mit 1 bezeichneten Gewichtstücke nach Anweisung obigen Schemas auf die eine, die mit $\bar{1}$ bezeichneten auf die andere Wageschale legt.

2. Verallgemeinerung. — Analoge Zerlegungen wie für die Zahl $40(=1+3+9+27)$ giebt es für die Zahlen $4=1+3$; $13=1+3+9$; $121=1+3+9+27+81$ u. s. w. Allgemein gilt der Satz:

I. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum_{0}^{n} 3^r$ können als algebraische „Summen der $(n+1)$ Potenzen $3^0, 3^1, \ldots 3^n$ dargestellt werden, „wobei keine dieser Potenzen mehr als einmal in jeder Summe ent„halten ist."

Ebenso:

II. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum_{r=0}^{n} 2^r$ können als absolute „Summen der $(n+1)$ Potenzen $2^0, 2', \ldots 2^n$ dargestellt werden, „wobei keine dieser Potenzen mehr als einmal in jeder Summe „enthalten ist."

Man erhält z. B. aus dem obigen Schema die Darstellungen aller Zahlen von 1 bis 15 durch Potenzen von 2, indem man alle Formen weglässt, die das Zeichen $\bar{1}$ enthalten, und im übrigen $a=8$, $b=4$, $c=2$, $d=1$ setzt.

Aeusserlich betrachtet gelingt die Darstellung aller jener Zahlen als Potenzsummen von 2 mittelst zweier Zeichen (0 und 1), als Potenzsummen von 3 mittelst dreier Zeichen (0, 1, $\bar{1}$). Es treten also als Coefficienten der Potenzen von 2 (im ersten Falle) die Zahlen 1 und 0, als Coefficienten der Potenzen von 3 (im zweiten Falle) die Zahlen 1, 0, —1 auf.

Bildet man weiter nach dem im oben aufgestellten Schema erkannten Gesetze die Variationen zur vierten Classe aus vier Zeichen, indem man das Zeichen $\bar{2}$ für -2 hinzufügt, so ist die Anzahl dieser Formen gleich

$$1+4+16+64 = 85$$

und es gehen in der Tat alle Zahlen von 1 bis 85 daraus hervor. Man braucht zu diesem Zweck nur in jeder der folgenden 21 Hauptformen

1111	1101	$1\bar{1}\bar{1}1$	$1\bar{1}2\bar{1}$	1011	1001	$10\bar{1}\bar{1}$
$10\bar{2}\bar{1}$	$\bar{1}111$	$1\bar{1}01$	$1\bar{1}\bar{1}1$	$11\bar{2}1$	$\bar{1}\bar{2}11$	$1\bar{2}01$
$1\bar{2}\bar{1}1$	$1\bar{2}\bar{2}1$	0111	0101	$01\bar{1}\bar{1}$	$01\bar{2}\bar{1}$	0011

das letzte Zeichen rechts der Reihe nach noch durch 0, $\bar{1}$, $\bar{2}$ zu ersetzen, und am Ende die Hauptform

0001

hinzuzufügen, aus der nichts mehr zu bilden ist. Im Uebrigen ist $a = 64$, $b = 16$, $c = 4$, $d = 1$ zu setzen.

Hieraus ergiebt sich durch Analogieschluss folgendes allgemeine Gesetz über die Darstellung aller ganzen Zahlen als Potenzsummen:

III. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum_{r=0}^{n} k^r$ können als Vielfachen-
„Summen der $(n+1)$ Potenzen k^0, k^1, k^2, . . . k^n dargestellt werden,
„wobei keine andern Coefficienten zur Verwendung kommen, als 1,
„0, —1, -2, . . . $-(k-2)$, deren Anzahl gleich k ist."

Für $k = 1$ erhält man hieraus die einfachste Darstellung einer ganzen Zahl, nämlich als Summe von Einheiten; für $k = 2$ und 3 die Gesetze II. und I.

In dem Gesetze III. kann statt der k Coefficienten 1, 0,...—$(k-2)$ jede ununterbrochene Reihe von k auf einander folgenden ganzen Zahlen eintreten, vorausgesetzt, dass unter diesen Zahlen auch die Null ist. — Ist a die grösste dieser Zahlen, so erweitert sich die Reihe der durch das Gesetz III. darstellbaren Zahlen bis zur Grenze

$a \cdot \sum_0^n k^r$. Denn die grösste dieser Zahlen ist dann durch eine Form dargestellt, welche aus lauter Elementen a (statt 1) besteht, also offenbar den a-fachen Wert der vorigen hat.

Man erhält also folgendes noch allgemeinere Gesetz:

IV. „Alle ganzen Zahlen von 1 bis $a \cdot \sum_0^n k_r$ können als Viel-„fachensummen der $(n+1)$ Potenzen $k^0, k^1 \ldots k^n$ dargestellt wer-„den, wobei keine andern Coefficienten zur Verwendung kommen als „Glieder der Reihe

$$a,\ a-1,\ a-2,\ \ldots\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots\ -(k-a-1)$$

„und wobei a eine ganze Zahl aus der Reihe

$$1,\ 2,\ \ldots\ (k-1)$$

sein muss."

Für den Wert $a = k-1$ erhält die Coefficientenreihe die Form $k-1, k-2, \ldots 0$, und enthält somit keine negativen Glieder. Das Gesetz IV. enthält in diesem Falle die Darstellung einer Zahl durch ein Zahlsystem mit der Grundzahl k, also für $k = 10$ durch das gewöhnliche dekadische System.

Da ferner jetzt sämtliche Variationsformen aus k Elementen zur Classe $(n+1)$, ausgenommen die aus lauter Nullen bestehende Form, zur Verwendung kommen, und da die Anzahl dieser Formen gleich der Anzahl der darstellbaren Zahlen ist, so erhält man nebenbei noch die bekannte Formel:

$$(k-1)\sum_0^n k^r = k^{n+1} - 1$$

oder

$$\sum_0^n k^r = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

Auf die Aufgabe, eine gegebene Zahl als Potenzsumme einer gegebenen Grundzahl darzustellen, wobei noch über die Coefficientenreihe innerhalb des oben bestimmten Spielraums verfügt werden kann, sei an dieser Stelle nur aufmerksam gemacht.

3. Zauberkarten. — Nach dem Satze II. der vorigen Nr. können alle ganze Zahlen als absolute Summen von Potenzen der Zahl 2, und zwar ohne andere Coefficienten als 1 dargestellt werden. Eine solche Darstellung sei

$$(15) \quad a = 2^p + 2^q + 2^r + \ldots$$

wobei $p, q, r, \ldots$ lauter verschiedene ganze Zahlen sind, unter denen auch eine gleich null sein kann. Durch Division mit einem dieser Summanden, z. B. 2^p, ergiebt sich:

$$(16) \quad \frac{a}{2^p} = 1 + 2^{q-p} + 2^{r-p} + \ldots + \frac{R}{2^p}$$

wo R die Summe aller derjenigen Glieder ist, deren Exponenten $< p$ sind.

Der ganzzahlige Teil des Quotienten ist also stets eine ungerade Zahl. Bezeichnet man dieselbe mit $(2n+1)$, so kann statt (16) geschrieben werden

$$(17) \quad a = 2^p(2n+1) + R$$

wobei $R < 2^p$ ist. — In analoger Weise kann a unter den Formen

$$(18) \quad \begin{cases} a = 2^q(2n_1+1) + R_1 & (R_1 < 2^q) \\ a = 2^r(2n_2+1) + R_2 & (R_2 < 2^r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dargestellt werden.

Hätte man dagegen a durch eine Potenz von 2 dividirt, die in der Darstellung (15) nicht enthalten ist, z. B. 2^s, so würde man erhalten haben:

$$(19) \quad \frac{a}{2^s} = 2^{p-s} + 2^{q-s} + 2^{r-s} + \ldots + \frac{R'}{2^s}$$

d. h. der ganzzahlige Teil des Quotienten würde eine gerade Zahl sein. —

Schreibt man nun auf einer Karte alle Zahlen von der Form

$$2^0(2n+1) + R \qquad (R = 0)$$

bis zu einer bestimmten Grenze, z. B. 100 auf, auf einer zweiten alle Zahlen von der Form

$$2^1(2n+1) + R \qquad (R = 0,\ 1)$$

auf einer dritten alle Zahlen von der Form

$$2^2(2n+1) + R \qquad (R = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

u. s. w., so wird nach den Formeln (17) und (18) die Zahl a sich ausschliesslich, aber auch zuverlässig auf denjenigen Karten befinden,

die mit 2^p, 2^q, 2^r . . . gebildet sind. Die ersten Zahlen auf diesen Karten sind aber (für die Werte $n = 0$, $R = 0$) bzhw. 2^p, 2^q, 2^r ... selbst. Und da die Summe dieser Zahlen (nach (15)) a ist, so kann man die Zahl a sofort angeben, sobald man nur weiss, auf welchen Karten sie zu finden ist.

Für die obere Grenze 100 sind folgende Tabellen bzhw, Karten erforderlich:

1) $(2n+1)+0$

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99

2) $2(2n+1)+0, 1$

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59
62	63	66	67	70
71	74	75	78	79
82	83	86	87	90
91	94	95	98	99

3) $4(2n+1)+0, \ldots 3$

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	61
62	63	68	69	70
71	76	77	78	79
84	85	86	87	92
93	94	95		

4) $8(2n+1)+0, \ldots 7$

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	61
62	63	72	73	74
75	76	77	78	79
88	89	90	91	92
93	94	95		

5) $16(2n+1)+0, \ldots 15$

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63	80	81	82
83	84	85	86	87
88	89	90	91	92
93	94	95		

6) $32(2n+1)+0, \ldots 31$

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63	96	97	98
99				

7)	$64(2n+1)+0, \ldots 63$			
64	65	66	67	68
69	70	71	72	73
74	75	76	77	78
79	80	81	82	83
84	85	86	87	88
89	90	91	92	93
94	95	96	97	98
99				

Weiss man z. B. von einer Zahl, dass sie auf der 2., 3.. 4. und 7. Karte steht, so findet man

$$2+4+8+64 = 78$$

welches in der Tat die verlangte Zahl ist.

Hagen i./W., Juni 1891.

VI.

Curven von constanter Krümmung, Torsion, Totalkrümmung und Krümmungsverhältniss.

Von

R. Hoppe.

---

§ 1. Erklärungen.

Die Richtungscosinus der Tangente einer Curve s seien f, g, h, die der Binormale l, m, n, der Krümmungswinkel τ, der Torsionswinkel ϑ, der Torsionsbogen σ, die Krümmungsbreite λ, ein Strich bezeichne die Differentiation nach τ; dann sind τ, ϑ, σ, λ definirt durch

$$\partial\tau^2 = \partial f^2 + \partial g^2 + \partial h^2; \quad \partial\vartheta^2 = \partial l^2 + \partial m^2 + \partial n^2$$

$$\partial\sigma^2 = \partial f'^2 + \partial g'^2 + \partial h'^2$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}; \quad \partial\tau = \partial\sigma\cos\lambda; \quad \partial\vartheta = \partial\sigma\sin\lambda$$

Ist nun die Krümmung $\frac{\partial\tau}{\partial s} = \frac{1}{\varrho}$ constant, so sind die Gleichungen der Curve:

$$x = \varrho\int f\partial\tau; \quad y = \varrho\int g\partial\tau; \quad z = \varrho\int h\partial\tau \qquad (1)$$

Ist statt dessen die Torsion $\int \frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ constant, so sind sie:

$$x = \frac{\partial s}{\partial\vartheta}\int f\partial\vartheta; \quad y = \frac{\partial s}{\partial\vartheta}\int g\partial\vartheta; \quad z = \frac{\partial s}{\partial\vartheta}\int h\partial\vartheta \tag{2}$$

Ist die Totalkrümmung $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$ constant, so sind sie:

$$x = \frac{\partial s}{\partial\sigma}\int f\partial\sigma; \quad y = \frac{\partial s}{\partial\sigma}\int g\partial\sigma; \quad z = \frac{\partial s}{\partial\sigma}\int h\partial\sigma \tag{3}$$

Ist das Krümmungsverhältniss $\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}$, mithin auch die Krümmungsbreite λ constant, so hat man:

$$\tau = \sigma\cos\lambda; \quad \vartheta = \sigma\sin\lambda \tag{4}$$

wo die constanten Addenden der durch ihre Differentiale definirten Grössen τ, ϑ, σ als selbstverständlich weggelassen sind. In diesem Falle zeigen sogleich die Gl. (4) die bekannte Curvenclasse an, welche sich als Curven constanter Steigung (bezüglich auf eine feste Horizontalebene) charakterisirt *) (sonst auch Helix genannt). Auch deren Coordinatenwerte sind bekannt.

Hiernech bietet die allgemeine Darstellung einer Curve, für welche eins der 4 genannten Elemente constant ist, kein Problem. Sollen 2 derselben constant sein, in welchem Falle offenbar alle constant sind, so genügt allein die Schraubenlinie.

Wol aber können Probleme entstehen, wenn weitere Bedingungen hinzugefügt werden. Wir wollen deren nur 2 in Betracht ziehen. Man kann 1) auf gegebener Fläche die Linien von den genannten Eigenschaften suchen, 2) unter den unendlich vielen Curven von jenen Eigenschaften die algebraischen, (circularen oder logarithmischen) aussondern. Beide Probleme nehme ich nur speciell in Angriff und berühre das erstere nur, sofern das letztere indirect zu einzelnen Lösungen des erstern führt.

§ 2. Allgemeine Bemerkungen und Transformationen.

In meiner analytischen Curventheorie **) habe ich gezeigt, dass

*) Grunert Arch. 1. Reihe T. LVI. S. 65 — Hoppe, Lehrb. d. anal. Geom. S. 71.

**) Lehrb. d. anal. Geom. I. Teil, § 54. S. 60. — Grunert Arch. 1. Reihe, T. LVI. S. 57.

die Untersuchung der nicht ebenen Curven und der sie betreffenden Probleme wesentlich vereinfacht wird durch anfängliche Elimination des Bogens, d. i. der einzigen mit Lineardimensionen behafteten Bestimmungsgrösse. Eine nicht ebene Curve wird (mit Absehen von ihrer Lage im Raume) durch 2 Functionen bestimmt. Der Bogen vertrittt eine dieser Functionen. Nach seiner Elimination erhält man isolirt eine dimensionslose Curventheorie (die Theorie der Richtungen) welche es nur mit einer bestimmenden Function zu tun hat.

Die Natur der in § 1. betrachteten Curven gibt offenbar diese Methode an die Hand. Bei den Curven (1) (2) (3) hat der Bogen nur Einfluss auf je einen gemeinsamen constanten Factor von x, y, z. Es ergibt sich sofort der Satz:

„Alle dimensionslos gleichbestimmten Curven von constanter „Krümmung, Torsion oder Totalkrümmung sind einander ähnlich."

Bei den Curven von constantem Krümmungsverhältniss findet das Gegenteil statt: hier ist die dimensionslose Bestimmung schon im voraus als einzige gegeben, und die Verschiedenheit der Curve hängt allein von der hinzutretenden Function s ab.

Die Grössen f, g, h stellen sich gewöhnlich in der Form dar:

$$f = \frac{f_1}{k}, \qquad g = \frac{g_1}{k}, \qquad h = \frac{h_1}{k}$$

dann sind f_1, g_1, h_1 beliebig und

$$k^2 = f_1^2 + g_1^2 + h_1^2$$

Nimmt man nun k zur Unabhängigen, so wird

$$f_1 \frac{\partial f_1}{\partial k} + \ldots = k; \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial k}\right)^2 + \ldots = p^2 + 1$$

$$f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial k^2} + \ldots = -p^2; \quad \frac{\partial f_1}{\partial k} \frac{\partial^2 f_1}{\partial k^2} + \ldots = p \frac{\partial p}{\partial k}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial k^2}\right)^2 + \ldots = q^2$$

und man findet:

$$\partial\tau = \frac{p\,\partial k}{k}$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)^2 = \frac{q^2}{p^2} - \left(\frac{1}{k} + \frac{\partial p}{p\,\partial k}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial k}\right)^2 = \frac{\partial\sigma^2 - \partial\tau^2}{\partial k^2} = \frac{q^2}{p^2} - \frac{p^2+1}{k^2} - \frac{2\partial p}{kp\,\partial k} - \left(\frac{\partial p}{p\,\partial k}\right)^2$$

Die in (1) (2) (3) zu integrirenden Grössen enthalten nach Substitution dieser Werte, wie schon ursprünglich, 2 irrationale Factoren; k ist gemeinsam, p ist nur in $\partial\tau$ als Quadratwurzel, in $\partial\sigma$ und $\partial\vartheta$ im rationalen p^2 vorhanden. Die Quadratwurzel k kann man durch die Substitution

$$f_1 = \alpha\beta + \gamma; \quad g_1 = \alpha - \beta\gamma; \quad h_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 1)$$
$$k = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1)$$

rational machen; dann ergibt sich:

$$p^2+1 = \frac{2k(\partial\alpha^2 + \partial\beta^2 + \partial\gamma^2) - (\beta\,\partial\alpha - \alpha\partial\beta + \partial\gamma)^2}{\partial k^2}$$

§ 3. Specielle Lösungen der 4 Aufgaben.

Stehen τ und ϑ in linearer Relation, so ist zugleich mit der Krümmung auch die Torsion constant, und keine der 3 ersten Aufgaben gewinnt ein neues Resultat.

Dagegen bietet die Relation

$$\tau^2 + \vartheta^2 = a^2 - 1$$

für sämtliche leicht ausführbare Integrationen.

Hier hat man nämlich: *)

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\sin\lambda; \quad g = \cos\lambda\cos a\lambda + \frac{1}{a}\sin\lambda\sin a\lambda \\ h &= \cos\lambda\sin a\lambda - \frac{1}{a}\sin\lambda\cos a\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

*) Lehrb, d. anal. G. I. Teil. § 60. Gl. (53) S. 73. — Grun. Arch. 1. Reihe, T. LVI. S. 67. Gl. (41).

$$\tau = \sqrt{a^2-1}\sin\lambda; \quad \vartheta = -\sqrt{a^2-1}\cos\lambda; \quad \sigma = \sqrt{a^2-1}\,\lambda$$

Dies in die Gl. (1) eingeführt gibt nach vollzogener Integration für eine Curve constanter Krümmung:

$$x = \frac{\varrho}{2}\frac{a^2-1}{a}\sin^2\lambda \tag{6}$$

$$y = \frac{\varrho}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{[(a^2+2)\cos^2\lambda - 3]\sin a\lambda - 3a\sin\lambda\cos\lambda\cos a\lambda\}$$

$$z = \frac{\varrho}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{[3-(a^2+2)\cos^2\lambda]\cos a\lambda - 3a\sin\lambda\cos\lambda\sin a\lambda\}$$

Durch Elimination von λ ergibt sich hieraus:

$$y^2+z^2 = \frac{4}{a^2-4}\left(x-\frac{2a^2+1}{4a}\varrho\right)^2 = \frac{27}{4}\frac{\varrho^2}{(a^2-4)^2} \tag{7}$$

Diese Ausdrücke sind nicht anwendbar auf den Fall $a = 2$. Hier findet man:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{4}\varrho\sin^2\lambda \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{8}\varrho\{\sin\lambda\cos\lambda(5-2\sin^2\lambda)+3\lambda\} \\ z &= -\frac{\sqrt{3}}{32}\{9-24\sin^2\lambda+8\sin^4\lambda\} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und nach Elimination von $\sin\lambda$:

$$\left(x-\frac{9}{8}\varrho\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\varrho z = \frac{81}{128}\varrho^2 \tag{9}$$

Demnach liegt die Curve für $a > 2$ auf einem einschaligen Rotationshyperboloid, für $1 < a < 2$ auf einem Rotationsellipsoid, für $a = 2$ auf einem parabolischen Cylinder. Auf positive a beschränken wir uns, weil die negativen nur dieselben Figuren ergeben. Damit die Gebilde reell sind, muss $a > 1$ sein.

Wächst a von 2 bis ∞, so nimmt das Axenverhältniss des Hyperboloids von ∞ bis 0 ab; daher sind die Gl. (6) auf jedes einschalige Rotationshyperboloid anwendbar. Im Intervall $1 < a < 2$ dagegen hat der Coefficient von x^2 in Gl. (2) ein Minimum bei $a = \sqrt{2}$, nämlich 4. Demnach sind nur abgeplattete Rotations-

ellipsoide vertreten mit Axenverhältniss $\geqq 2$. Umgekehrt geben die Gl. (6) auf jedem einschaligen Rotationshyperboloid 1 constant gekrümmte Curve, auf jedem abgeplattetem Rotationsellipsoid mit Axenverhältniss > 2 hingegen 2 verschiedene, und zwar entsprechend zwei Werten a und a_1, wo

$$a^2+a_1^2 = 5 - \frac{4}{\varkappa^2}$$

wenn $\varkappa$ das Axenverhältniss bezeichnet. Ebenso geben die Gl. (8) 1 constant gekrümmte Curve auf dem parabolischen Cylinder, dessen Parameter

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ist. Jede der Curven (6) vertritt einen Cyklus, die Curve (8) eine unbegrenzte Schar von Curven, indem jeder Punkt (xyz) der erstern sich längs des Parallelkreises $x = \text{const}$, jeder der letztern parallel der y Axe verschieben lässt, so dass im ganzen die Fläche ganz oder zumteil bedeckt wird. Ausserdem entspricht auch jeder Curve eine symmetrische, die jedoch schon im System enthalten ist.

Die Curven (6) sind offenbar algebraisch für rationale, transcendent für irrationale a. Als einfachste Beispiele nehmen wir auf dem Hyperboloid $a = 3$, auf dem Ellipsoid $a = \frac{3}{2}$.

Sei $a = 3$: dann wird die Curve (6) nach Elimination von λ zwischen je 2 der 3 Gleichungen der gemeinsame Schnitt des Hyperboloids

$$y^2+z^2 - \frac{4}{5}\left(x - \frac{19}{12}\varrho\right)^2 = \frac{27}{100}\varrho^2$$

und der 2 Cylinder 5. Grades:

$$z^2 = \frac{512}{225}\varrho^2\left(1-\frac{3}{4}\frac{x}{\varrho}\right)^5$$

$$y^2 = 6\varrho x\left(1-\frac{x}{\varrho}+\frac{3}{10}\frac{x^2}{\varrho^2}\right)^2$$

Der Curvencyklus bedeckt die Zone von $x = 0$ bis $x = \frac{4}{3}\varrho$. Die symmetrische Zone wird von den symmetrischen Curven $a = -3$ bedeckt.

Sei zweitens $a = \frac{3}{2}$; dann wird die Curve (6) nach Elimination von λ der Schnitt des Rotationsellipsoids

$$y^2+z^2+\frac{16}{7}\left(x-\frac{11}{12}\varrho\right)^2=\frac{108}{49}\varrho^2$$

und der Fläche 7. Grades

$$(y^2-z^2)^2=\left(\frac{5\varrho^2}{441}\right)^2\left(1-\frac{12x}{5\varrho}\right)\left\{25-54\frac{12x}{5\varrho}+53\left(\frac{12x}{5\varrho}\right)^2-4\left(\frac{12x}{5\varrho}\right)^3\right\}^2$$

Die von den Curven bedeckte Zone erstreckt sich von $x = 0$ bis $x=\frac{5}{12}\varrho$, liegt demnach ganz zwischen den Polen des Ellipsoids

$$x=\left(\frac{11}{12}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\varrho=\begin{cases}1{,}89865\,\varrho\\-0{,}06521\,\varrho\end{cases}$$

Im obern Extrem $x=\frac{5}{12}\varrho$ schneidet die Tangente die x Axe, daher bildet hier die Curve eine Spitze; im untern $x = 0$ ist die Tangente normal zur x Axe, die Curve berührt den Parallelkreis. Die successiven Spitzen stehen um einen Quadranten des Parallelkreises von einander ab, es liegen mithin 4 durch sie begrenzte Bogen um die Fläche herum. Da das Curvensystem nicht symmetrisch zur Ebene $x=\frac{11}{12}\varrho$ ist, vielmehr ganz auf deren negativer Seite liegt, so muss auf der positiven Seite ein symmetrisches System zu ihm Platz finden.

Von besonderem Interesse ist noch die Neigung der Hauptnormale gegen die Flächennormale wegen des Meusnier'schen Satzes. Der Winkel zwischen beiden sei Θ. Die Richtungscosinus der Hauptnormale sind für beliebige a *)

$$f'=\frac{1}{a};\quad g'=-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\sin a\lambda;\quad h'=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\cos a\lambda$$

die der Normale der Fläche (7)

$$p=\frac{4:u}{4-a^2}\left(x-\frac{2a^2+1}{4a}\varrho\right);\qquad q=\frac{y}{u};\qquad r=\frac{z}{u}$$

wo

*) Lehrb. d. an. G. I. Teil. §. 60. Gl. (53) S. 73. — Grun. Arch. 1. Reihe, Tl. LVI. S. 67. Gl. (41).

$$u^2 = \frac{1}{4(4-a^2)^2}\{[4ax-(2a^2+1)\varrho]^2+27\varrho^2\}$$

Hieraus findet man mit Anwendung von Gl. (7):

$$\cos\Theta = f'p+g'q+h'r = 2\,\frac{(a^2-1)\sin^2\lambda - a^2+4}{\sqrt{\{[2(a^2-1)\sin^2\lambda-(2a^2+1)]^2+27\}}}$$

das ist für $\lambda = 0$

$$\cos\Theta_0 = \frac{4-a^2}{\sqrt{a^4+a^2+7}} \tag{10}$$

und für $\lambda = R$

$$\cos\Theta_1 = 1$$

Bezeichnet also ϱ_0 den Krümmungsradius des die Curve berührenden Normalschnitts der Fläche, so ist in den Spitzen $\varrho_0 = \varrho$; von da an nimmt $\varrho : \varrho_0 = \cos\Theta$ beständig ab bis zum Minimum (10), welches nur für $a = \pm 2$ null werden kann.

Für dieselben Werte (5) von f, g, h findet man die Gleichungen der Curve von constanter Torsion $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\partial\Theta}{\partial s}$:

$$x = \frac{\varrho_1}{2}\,\frac{a^2-1}{a}\,(\lambda - \sin\lambda\cos\lambda) \tag{11}$$

$$y = \frac{\varrho_1}{a}\,\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{(a^2+2-3a^2\sin^2\lambda)\cos a\lambda + a(a^2+2)\sin\lambda\cos\lambda\sin a\lambda\}$$

$$z = \frac{\varrho_1}{a}\,\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-4}\{(a^2+2-3a^2\sin^2\lambda)\sin a\lambda - a(a^2+2)\sin\lambda\cos\lambda\sin a\lambda\}$$

Für rationale a liegt sie auf algebraischem Cylinder. Für $a = 2$ werden die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{4}\varrho_1(\lambda - \sin\lambda\cos\lambda)\\ x &= \frac{\sqrt{3}}{4}\varrho_1\sin^2\lambda\,(2-\sin^2\lambda)\\ z &= \frac{\sqrt{3}}{8}\varrho_1\{3\lambda - \sin\lambda\cos\lambda\,(3-2\sin^2\lambda)\} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die durch Elimination von λ und $\sin\lambda$ daraus hervergehende Gleichung des Cylinders, auf dem sie liegt, ist vom 4. Grade zwischen y^2 und $(\sqrt{3}x-2z)^2$. Setzt man zur Abkürzung

$$\xi = x - \frac{2}{\sqrt{3}}z; \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{3}}y$$

so lautet sie:

$$(\xi^2+4\eta^2)^4+4\varrho_1^2(\xi^6-17\xi^4\eta^2-4\xi^2\eta^4-4\eta^6)+4\varrho_1^4\xi^4=0$$

und lässt sich schreiben:

$$\{(\xi^2+4\eta^2)^2-2\varrho_1^2\xi^2\}^2=4\varrho_1^2(2\eta^2-\xi^2)^2(\eta^2-2\xi^2)$$

wird also nur für

$$\eta^2 \geqq 2\xi^2$$

dann aber stets innerhalb leicht zu erkennender Intervalle der ϱ_1 erfüllt.

Aus den Werten (5) von f, g, h ergeben sich ferner die Gleichungen der Curve constanter Totalkrümmung $\frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial\sigma}{\partial s}$, nämlich:

$$x = -\varrho_2\frac{a^2-1}{a}\cos\lambda \tag{13}$$

$$y = \frac{\varrho_2}{a\sqrt{(a^2-1)}}\{(a^2+1)\cos\lambda\sin a\lambda - 2a\sin\lambda\cos a\lambda\}$$

$$z = -\frac{\varrho_2}{a\sqrt{(a^2-1)}}\{(a^2+1)\cos\lambda\cos a\lambda + 2a\sin\lambda\sin a\lambda\}$$

Sie liegt auf dem einschaligen Rotationshyperboloid:

$$(a^2-1)(y^2+z^2)-x^2 = 4\varrho_2^2 \tag{14}$$

und ist algebraisch für rationale a. Für $a=3$ z. B. wird sie gebildet durch den Schnitt des Cylinders 4. Grades:

$$27x^4 = 512\varrho_2^3(\varrho_2 - \sqrt{2}z) \tag{15}$$

Soll endlich das Krümmungsverhältniss $\mathrm{tg}\lambda = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}$ constant sein, so sind die Werte

$$f = \sin\lambda; \quad g = \cos\lambda\cos\sigma; \quad h = \cos\lambda\sin\sigma$$

als Functionen von σ allein schon im voraus bekannt*), und für jede beliebige Function s von σ sind

---

*) Lehrb. d. an. G. I. Teil. § 59. Gl. (45) S. 71. — Grun. Arch. 1. Reihe, T. LVI. S. 65. Gl. (33).

$$x = \int f \partial s; \quad y = \int g \partial s; \quad z = \int h \partial s$$

die Gleichungen der Curve. Diese sind algebraisch, wenn

$$s = \Sigma C \sin(\alpha\sigma + \beta)$$

gesetzt wird, wo die C und β beliebig constant, die α beliebig rational constant, aber nicht $= 0$ oder $= \pm 1$ sind, und Σ die Summe beliebig vieler solcher Terme bezeichnet. Die Gleichungen der Curve werden:

$$x = \sin\lambda \, \Sigma C \sin(\alpha\sigma + \beta)$$

$$y = \cos\lambda \, \Sigma \frac{C}{\alpha^2 - 1} \{\alpha \cos\sigma \sin(\alpha\sigma + \beta) - \sin\sigma \cos(\alpha\sigma + \beta)\}$$

$$z = \cos\lambda \, \Sigma \frac{C}{\alpha^2 - 1} \{\alpha \sin\sigma \sin(\alpha\sigma + \beta) + \cos\sigma \cos(\alpha\sigma + \beta)\}$$

Ist z. B.

$$s = \frac{c}{2} \sin 2\sigma$$

so findet man durch Elimination von σ

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 - \frac{4}{3} x^2 \cot^2\lambda &= \frac{1}{9} c^2 \cos^2\lambda \\ yz &= \frac{\cos^2\lambda}{9c \sin^3\lambda} x (4x^2 + 3c^2 \sin^2\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Die Curve liegt also auf einem einschaligen Rotationshyperboloid und wird gebildet durch den Schnitt einer kubischen Fläche erzeugt von einer gleichseitigen Hyperbel, deren Axen bei unveränderter Richtung normal zur x Axe in kubischer Relation zu den x variiren.

§ 4. Allgemeine Bemerkungen.

Zieht man durch einen Punkt P einer Fläche F eine Kürzeste und eine andre Curve s auf F, welche beide sich in P berühren, und ist Θ der Winkel zwischen den Schmiegungsebenen beider Curven, sind ferner ϱ_0 und ϱ ihre Krümmungsradien in P, so ist bekanntlich

$$\varrho = \varrho_0 \cos\Theta \qquad (17)$$

Sei nun ϱ für jeden Punkt von s gegeben. Nimmt man auf der Tangente in P ein unendlich kleines Stück PP' an, so ist durch die Tangente die Kürzeste in unbegrenzter Ausdehnung, durch diese ϱ_0, hierdurch nach Gl. (17) $\cos\Theta$, mithin zweideutig Θ bestimmt. Setzt man indes Stetigkeit der Fläche in genügend hoher Ordnung voraus, so behält Θ sein Vorzeichen solange, als es nicht verschwindet, und wird durch dessen Wahl eindeutig. Durch Θ ist dann die Schmiegungsebene in P und durch deren Schnitt mit der Fläche ein dritter Punkt P'' von s in gewähltem unendlich kleinem Abstand von P' bestimmt Mit den Punkten P', P'' kann man ebenso verfahren, wie mit P, P'; man erhält einen neuen Curvenpunkt und so fort. Ausserdem ergeben sich auch alle Curvenpunkte als Coincidenzpunkte der Schmiegungsebene.

Verschwindet einmal Θ, so kann es sein Vorzeichen wechseln, und die Curve findet eine Fortsetzung auf der andern Seite der Kürzesten; aber nur sofern ϱ als Function von s seine Werte zurückdurchläuft. Wächst ϱ über ϱ_0 hinaus, so kann sich die Curve in der erreichten Richtung nicht fortsetzen. Der Punkt $\varrho = \varrho_0$ ist im allgemeinen ein Rückkehrpunkt.

Vom Vorstehenden machen wir Anwendung auf den Fall, wo ϱ constant ist. Es hat sich der Satz ergeben:

„Auf jeder bis zu 2. Ordnung stetigen Fläche gehen durch jeden „Punkt in jeder Anfangsrichtung 2 Curven von gegebener constanter „Krümmung, soweit der Krümmungsradius des berührenden Normal„schnitts nicht kleiner als der gegebene Krümmungsradius ist. Die „Punkte, in welchen beide gleich werden, sind im allgemeinen Rück„kehrpunkte."

„Das ganze constant und gleich gekrümmte Liniensystem auf „einer Fläche teilt sich in 2 Systeme, die durch positives und nega„tives Θ unterschieden sind. In jedem Punkte und von da aus in „jeder Anfangsrichtung berührt sich eine und nur eine Curve des „einen und andern Teilsystems."

Vergleicht man hiermit die in § 3 gegebenen Beispiele constant gekrümmter Linien auf Rotationshyperboloiden und Rotationsellipsoiden, so zeigt sich, dass die gefundenen Curven bloss speciell ausgezeichnete aus dem System darstellen. Zunächst ist mit der besondern Fläche auch der Wert von ϱ individuell gegeben. Ausserdem gehen auch von jedem Punkte nur in zwei Richtungen Curven. Alle übrigen Curven des Systems sind in einer unbekannten allgemeinern Form enthalten.

Curven constanter Krümmung haben schon früher bisweilen Beachtung gefunden. Erst in neuester Zeit sind die Curven constanter Torsion von Maurice Fouché in Annales de l'École Normale T. VII p 335 untersucht worden. Es werden daselbst Bedingungen aufgestellt, unter denen solche Curven algebraisch sind, namentlich der Satz: Jeder sphärischen Curve, deren Projectionen auf die Coordinatenebenen (überhaupt auf eine willkürliche Ebene) algebraisch quadrabel sind, entsprechen unendlich viele (ähnliche) Curven constanter Torsion (d. h. also eine solche). Der grösste Teil der Untersuchung bezieht sich auf complexe Coordinaten und imaginäre Curven. Das Gegenwärtige ist darin (bis auf einige Beobachtungen von § 1., die bei richtiger Auffassung unmittelbar bekannt sind, hier jedoch, verschieden ausgedrückt, wesentlich identisch, als Rechnungsresultate erscheinen) nicht enthalten.

VII.

Neue Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, im allgemeinen und für Flächen II. Grades im besonderen.

Von

Josef Bazala,

Professor a. d. k. k. Staats-Oberrealschule in Bielitz.

I.

Synthetische Ableitung des Tangential- und des Normalbüschels.

§. 1.

Durch die auf der horizontalen Projectionsebene normal stehende Gerade A [Taf. III. Fig. 1] sollen für die Lichtstrahlenrichtung Sl Ebenen E gelegt werden, denen die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2, 0·3 . . . 1 zukommen.

Denkt man sich durch einen Punkt S der Geraden A einen Lichtstrahl Sl geführt und aus einem beliebigen Punkte l desselben auf die gesuchten Ebenen E normale Strecken $l\alpha[l'\alpha' \perp E']$ gefällt, so stellen dieselben, wenn man die Strecke Sl als Längeneinheit betrachtet, die sinus derjenigen Neigungswinkel vor, welche der Lichtstrahl Sl mit den genannten Ebenen einschliesst. Diese Strecken $l\alpha$, welche im Grundrisse in wahrer Grösse erscheinen, müssen daher

beziehungsweise die Längen 0, 0·1, 0·2, 0·3 . . . 1 haben. Wird aus S' mit dem Halbmesser $S'l'$ der Halbkreis k beschrieben, so braucht man, da die beiden Abstände $l'\alpha'$ und $\beta\gamma[\beta\gamma \perp S'l']$ einander gleich sind, um die gesuchten Ebenen zu erhalten, nur die als Längeneinheit angenommene wahre Grösse von Sl auf der zu l' normal gezogenen Geraden nach $S'l_0$ aufzutragen, diese Strecke in 10 gleiche Teile zu teilen, durch die Teilungspunkte Parallele zu $S'l'$ zu führen und S' mit den auf k sich so ergebenden Punkten β durch Gerade zu verbinden.

Will man die Normalen der durch A gehenden, die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2, 0·3 . . . 1 besitzenden Ebenen darstellen, so braucht man blos die angegebene Construction in einer um 90° gedrehten Lage auszuführen.

Wir nennen nach Dr. L. Burmester diese beiden Büschel Tangential-, beziehungsweise Normalbüschel, $S'l'$ die Richtung und $S'l_0$ die Scalenlänge derselben. Die Strecke $S'l'$, mit welcher der Kreis k zu beschreiben ist, wollen wir den Radius des betreffenden Büschels nennen. [1])

II.

Beleuchtungs-Constructionen bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

A. Für das elliptische Paraboloid.

§. 2.

In Fig. 2 ist ein elliptisches Paraboloid, dessen Achse AB normal zur Grundrissebene steht, durch den zur Aufrissebene parallelen Hauptschnitt M und die Grundspur P dargestellt.

Bevor wir bei der vorliegenden Fläche für die Lichtstrahlenrichtung Sl die Isophoten construiren, bestimmen wir den Grundriss der Selbstschattengrenze o. Wir suchen zunächst den in M liegenden Punkt derselben $[l''$ berührend an M'', $B''\beta = \alpha B''$, $\beta o'' \parallel x_1$, $o''o' \perp x_1']$, bestimmen dann mittelst des die kleine Achse von P im Mittelpunkte A berührenden Kreises $\varkappa$ die zu $S'l'$ conjugirte

1) Dr. L. Burmester gelangte zur Construction dieser Büschel auf analytischem Wege [S. L. Burmester „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen", Leipzig 1871.]

Richtung $Ac_0 [Ab \parallel CD,\ b\varepsilon \perp x';\ S'l'b_0,\ b_0\varepsilon c_0$ [1])] und führen parallel zu letzterer den Grundriss der Selbstschattengrenze o.

Um die in irgend einer Seitenlinie M_1 bei Annahme von 10 Beleuchtungsstufen liegenden Isophotenpunkte zu erhalten, benutzen wir einen Cylinder C_1, welcher das Paraboloid in M_1 berührt, und dessen Richtung t_1 zu M_1' conjugirt sein muss Die Isophoten von C_1, welche Erzeugende sind, schneiden M_1 in den gesuchten Isophotenpunkten. Sollen die Isophoten der Cylinderfläche C_1 dargestellt werden, so hat man einen Normalschnitt N_1 derselben zu zeichnen, in seiner Ebene den entsprechenden Tangentialbüschel T_{N_1} zu construiren, dann parallel zu den Strahlen des letzteren Tangenten an N_1 zu führen und durch die sich so ergebenden Berührungspunkte die Cylinder-Erzeugenden zu ziehen.. Wir legen die Normalschnitte der sämtlichen den einzelnen Seitenlinien entsprechenden Berührungscylinder durch die Flächenachse AB [$A'e_1$ senkr. auf t_1] und drehen, um in N_1, N_2, N_3 . . die Tangentialbüschel darstellen zu können, diese Ebenen um AB in eine zur Aufrissebene parallele Lage. Sehr zweckmässig ist es dabei, alle zur Anwendung kommenden Tangentialbüschel auf einen gemeinsamen, in AB liegenden Scheitel S zu verlegen und für dieselben eine gemeinsame Scalenlänge Sl anzunehmen. Bestimmt man zu dem Behufe ein für allemal die wahre Grösse $S''l_0$ von Sl, teilt dieselbe in 10 gleiche Teile und führt durch die Teilungspunkte aus S'' concentrische Kreise, so erspart man bei den einzelnen Tangentialbüscheln das Auftragen der Scalenteile. Weil dann die Projectionen der Strecke Sl auf die einzelnen Normalschnitte sowol die Richtungen als auch die Radien der entsprechenden Büschel bilden, so kann die Construction der parallel zur Aufrissebene gedrehten Tangentialbüschel sehr erleichert werden, wenn man ein für allemal über $S'l'$ als Durchmesser den Kreis k beschreibt und durch l'' eine zu x parallele Gerade führt. Man braucht dann nur die Strecke $S'd_1$ nach $\lambda\lambda_1$ zu übertragen, um in $S''\lambda_1$ die Richtung und den Halbmesser für den dem Normalschnitte N_1 entsprechenden Tangentialbüschel T_{N_1} zu erhalten. Auf dem zu $S''\lambda_1$ normalen Radius würde schon durch die concentrischen Kreise die Scala desselben entstehen.

Damit wir den Normalschnitt N_1 des Cylinders C_1 nicht darzustellen brauchen, projiciren wir denselben samt dem in seiner Ebene liegenden Tangentialbüschel T_{N_1} in der Richtung der Cylindererzeu-

---

1) Diese Construction conjugirter Durchmesser der Linien II. Ordnung findet man in Dr. L. Burmester's „Theorie und Darst. d. Beleuchtung . . .", p. 35.

genden auf die Ebene M_1 und von hier in der Richtung $a_1 a$ auf den Hauptschnitt M. Der dadurch in letzterem entstehende Strahlenbüschel T_M muss dann zu T_{N_1} affin sein, wobei AB die Affinitätsachse ist. Man kann T_M am schnellsten erhalten, wenn man den Tangentialbüschel T_{N_1} mit einer zu AB parallelen Geraden schneidet und die dadurch entstehende Punktreihe auf den affin entsprechenden Träger in der Richtung $c_1 a$ projicirt. Parallel zu den Strahlen des Büschels T_M sind dann an M'' Tangenten zu führen, ihre Berührungspunkte zu markiren und letztere schliesslich auf die Seitenlinie M_1 in der Richtung aa_1 zu projiciren.

Weil M'' eine Parabel ist, so ist es zweckmässig, statt der Richtungen der an M'' zu führenden Tangenten die der entsprechenden Normalen zu bestimmen. Das ist möglich, wenn man den ganzen rücksichtlich der Strahlenbüschel T_{N_1} und T_M angedeuteten Vorgang in einer um 90^0 gedrehten Stellung durchführt, d. h., wenn man ursprünglich statt des Tangentialbüschels den der Ebene N_1 entsprechenden Normalbüschel S_{N_1} construirt. An Stelle der Affinitätsachse AB tritt dann die Affinitätsachse m, und der Büschel S_{N_1} ist durch eine zu m parallele Gerade zu schneiden, damit sich aus ihm einfachst möglich der affine Normalbüschel S_M ergibt. Verlegt man den Scheitel des letzteren in den Brennpunkt F der Parabel M'' und schneidet ihn durch die Directrix r derselben, so ergeben sich die auf M'' zu bestimmenden Punkte, wenn man durch die Punktreihe r Parallele zu $A''B''$ zieht. Zu denselben Punkten muss man aber auch gelangen, wenn man mit Beibehaltung des Scheitels S'' den Normalbüschel S_M durch eine zu r parallele Gerade schneidet, die von S'' dieselbe Entfernung hat, wie r von F, und dann durch die sich dadurch ergebende Punktreihe einen Parallelstrahlenbüschel P_M mit der Richtung $A''B''$ führt. Der letztere hat mit dem Büschel S_{N_1} den Strahl $S''A''$ gemeinsam, weshalb beide perspectivisch sein müssen. Ebenso muss auch der Aufriss des dem Büschel P_M in der Ebene M_1 affin entsprechenden Parallelstrahlenbüschels P_{M_1} zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch sein. Bestimmt man deshalb im Grundrisse zu dem in M_1 liegenden Punkte o der Selbstschattengrenze den affinen Punkt o auf M und zieht durch beide Punkte die Strahlen der Parallelbüschel, so treffen dieselben den entsprechenden Strahl o des Büschels S_{N_1} in 2 Punkten, durch welche die zu x_1 parallelen perspectivischen Achsen r_1 und ϱ_1 zu ziehen sind. Wird der Büschel S_{N_1} durch dieselben geschnitten, so liefert der dann durch die Punktreihe r_1 gehende Parallelstrahlenbüschel die auf M'' gesuchten Punkte, während der aus der Punktreihe ϱ_1 entstehende Parallelstrahlenbüschel nicht nur die Grundrisse der auf M_1 liegenden Isophotenpunkte gibt, sondern auch durch die

Aufrisse derselben geht. Letztere erhält man, wenn man durch die auf M'' entstehenden Punkte Parallele zu x_1 zieht.

Die ganze Construction kann noch dadurch ein wenig vereinfacht werden, dass man bei dem Beginne derselben die Tangente t_1 gar nicht führt, sondern N_1 gleich normal zu der durch den Kreis $\varkappa$ sich ergebenden Richtung zieht.

Der mit der Scala zusammenfallende Strahl $S''\lambda_1$ des Normalbüschels liefert bei obigem Vorgange denjenigen Punkt der Seitenlinie M_1, welchem ein Maximum der Beleuchtungsstärke zukommt (Maximal-Isophotenpunkt). Es ist auch leicht einzusehen, dass man durch Unterteilung der Scala Punkte einer beliebigen Beleuchtungsstärke erhalten und auch zu jedem Punkte der gegebenen Fläche durch Ausführung obiger Construction in umgekehrter Aufeinanderfolge die Beleuchtungsstärke bestimmen kann.

Empfehlenswert ist es, vor allem diejenigen Seitenlinien zu behandeln, bei welchen der Maximal-Isophotenpunkt einer der 10 angenommenen Beleuchtungsstufen angehört. Die Scalen der betreffenden Normalbüschel müssen durch die Schnittpunkte der Geraden g mit den concentrischen Kreisen gehen und die ihnen entsprechenden Seitenlinien bekommt man, wenn man die zwischen den genannten Schnittpunkten und dem Punkte λ liegenden Strecken von S' aus bei dem Kreise k als Sehnen aufträgt und dann den Kreis $\varkappa$ benutzt. Jede dieser Seitenlinien muss in ihrem Maximal-Isophotenpunkte eine Isophote berühren.

Wichtig ist auch die Vornahme der den Lichtpol enthaltenden, dann der durch den den Lichtstrahl Sl gehenden Seitenlinie und der beiden Hauptschnitte der Fläche.

Wir wollen noch in dem construirten Isophotenpunkte 5 die Isophotentangente bestimmen. Dieselbe ergibt sich, wenn man einen Lichtstrahl, z. B. den durch den Punkt 5 gehenden l, auf die das Paraboloid in dem Punkte 5 berührende Ebene E_5 projicirt, hierauf die sich dadurch ergebende Richtung als neue Lichtstrahlenrichtung betrachtet und für dieselbe im Punkte 5 die Tangente der Selbstschattengrenze construirt; letztere ist schon die gesuchte Isophotentangente [1]). Um die Ebene E_5 zu erhalten, bestimme man im Punkte 5 die Tangente τ an die Seitenlinie M_1

$$[B''\sigma = \gamma B'']$$

1) S. d. Verf. „Allgemeine Theorie der Isophotentangenten und Construction derselben für Flächen II. Grades“ [Arch. d. Math. u. Phys., 2. Reihe, Teil V, p. 113.]

und suche ihren Grundspurpunkt i, durch welchen die Grundspur u der Berührungsebene parallel zu t_1 geht. Die in der Hauptschnittebene M liegende Spur derselben ergibt sich dann in $\sigma\zeta$. Um nun l auf die Ebene $u\sigma$ zu projiciren, führen wir zu letzterer durch den Punkt 5 eine Normale n [n'' senkr. auf $\sigma''\zeta''$, n' senkr. auf u] und bringen die durch l und n gehende Ebene, deren Grundspur Hh ist, mit der Ebene $u\sigma$ zum Schnitte. Die Schnittkante 5μ ist die neue Lichtstrahlenrichtung und die ihr entsprechende, durch den Punkt 5 gehende Ebene E_5 der Selbstschattengrenze ist zu 5μ conjugirt. Durch den gemeinsamen Punkt ν der Ebenen E_5 und E_5 geht die verlangte Isophotentangente t.

Die behandelten Beleuchtungsconstructionen lassen sich in ungeänderter Form auch ausführen, wenn kein Hauptschnitt des Paraboloides zu einer Projectionsebene parallel ist, und auch dann, wenn statt desselben irgend eine andere Seitenlinie gegeben ist.

B. Für andere Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind.

§. 3.

Um die vorgeführte Beleuchtungsconstruction auf ein Ellipsoid anzuwenden, denken wir uns dasselbe durch die zur Grundrissebene normale Flächenachse BC und den zu BC normalen Hauptschnitt P gegeben. Wir zeichnen über BC als Durchmesser einen zur verticalen Projectionsebene parallelen Kreis M und legen ihn unserer Construction in derselben Weise zu Grunde, wie dies im vorigen Paragraphen bezüglich des Hauptschnittes M geschehen ist. Construirt man dann für eine bestimmte Seitenlinie M_1 den Normalbüschel S_{N_1} des Berührungscylinders wieder so, dass sein Scheitel S'' in die Verlängerung von $B''C''$ fällt [Fig. 3], so ergibt sich aus ihm in bekannter Weise der affin entsprechende, sich auf M'' beziehende Normalbüschel S_M. Verschiebt man letzteren, bis sein Scheitel in den Mittelpunkt A'' von M'' fällt, so ist er auch in dieser Stellung zum Büschel S_{N_1} perspectivisch, weil in $A''S''$ zwei einander entsprechende Strahlen zusammen fallen, und gibt gleich die auf M'' zu bestimmenden Punkte. Um die perspectivische Achse ϱ_1 beider Büschel zu erhalten, kann man auch hier, wie beim Paraboloide, vorerst den Grundriss der Selbstschattengrenze bestimmen und zu dem sich in M_1 ergebenden Grenzisophotenpunkte O den entsprechenden Punkt auf M'' suchen. Durch letzteren geht der Nullstrahl des Büschels A'', und wo dieser den Nullstrahl des Büschels S_{N_1} trifft, ist ein Punkt der perspectivischen Achse ϱ_1.

Die auf M_1 liegenden Isophotenpunkte bekommt man dann am schnellsten, wenn man den Büschel A'' nicht nur durch den Kreis M'' schneidet, sondern auch durch einen zweiten, zu M'' concentrischen Kreis N_1, dessen Durchmesser gleich ist der kleinen Achse der Ellipse M_1'' [Vergl. Fig. 2 unserer „Allgemeinen Theorie der Isophotentangenten . . . "].

Man kann aber das vorherige Zeichnen der Selbstschattengrenze auch vermeiden, wenn man einen Strahl des Büschels A'' direct bestimmt. Denkt man sich nämlich den dem Normalschnitte N_1 [vgl. Fig. 2] entsprechenden Tangentialbüschel T_{N_1} durch eine in der Entfernung $A'e_1$ von S parallel zu AB geführte Gerade geschnitten, so muss die entsprechende Gerade beim affinen Tangentialbüschel T_M die Entfernung $A'a'$ von S haben. Trägt man demnach, da wir die genannten Tangentialbüschel in einer um 90° gedrehten Stellung ausführen, die Strecke $A'e_1$ nach $S''\alpha$ [Fig. 3] auf und zieht r_1 normal zu $A''S''$, so ergibt sich auf r_1 eine Punktreihe, von welcher wir einen Punkt, z. B. 6, markiren. Aus ihr erhält man, wenn man

$$\alpha S_M = A'a'$$

macht, in $S_M 6$ den entsprechenden Strahl des nach S_M verschobenen Normalbüschels S_M. Parallel zu $S_M 6$ wird der Strahl 6 des Büschels A'' gezogen, und durch den Schnittpunkt des letzteren mit dem Strahle $S''6$ bekommt man die Affinitätsachse ϱ_1 zwischen den Büscheln S_{N_1} und A''.

Bei dem Ellipsoide sind für das Zeichnen der Grundriss-Isophoten auch die Isophotenpunkte der Horizontalcontour von grosser Wichtigkeit. Sie werden als Isophotenpunkte des die Fläche nach der Horizontalcontour berührenden Cylinders mittelst des im Grundrisse herzustellenden Tangentialbüschels erhalten, der $S'l'$ zur Richtung und zum Radius und die wahre Grösse von Sl zur Scalenlänge hat.

Unsere Construction lässt sich auch ganz einfach durchführen, wenn bei der beleuchteten Fläche die gegebenen Linien M'' und P ganz beliebig sind. Man zeichnet in diesem Falle die Evolute E von M'' und geht im übrigen so vor, wie es zuletzt bezüglich des Ellipsoides angedeutet wurde. Nur hat man hier nicht den Büschel A'', sondern den Büschel S_M zu bestimmen und parallel zu dessen Strahlen Tangenten an E zu führen. Aus den sich dadurch auf M'' ergebenden Fusspunkten werden schliesslich die entsprechenden

Punkte in M_1 mit Benutzung der Grundrisse von M und M_1 construirt [1]).

Wie sich unsere Construction bei Behandlung der beiden Hyperboloide gestaltet, werden wir im nächsten Paragraphen sehen.

---

1) Vergl. d. Verf. „Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung" [Arch. d. Math. u. Phys. 2. Reihe, Teil I. p. 266.]

Bei dieser Gelegenheit erlaubt sich der Verfasser, die in der citirten Abhandlung in Folge eines Versehens stehen gebliebenen Druckfehler anzuführen:

Seite 267, Zeile 21	v. ob.,	statt $h_1''h'$ setze	$h''h'$ $S'S = S'S''$ setze $S'S_0 = S'S''$
269	4		$e_1,\ a_1'$ e_1a_1'
	5		M_1' M'
	14 v. u.		der die
270	10 v. o.		α_9 α_9
271	8 v. o.	soll es heissen:	der Selbstschattengrenze die Schlagschattengrenze erhalten
272	9 v. u.,	statt e_1B setze	$(e_1)B$
273	13 v. o.		e_4B $(e_4)B$
	6 v. u.		umgekehrte umgeklappte
	4		$e(v_1 \parallel (l)$ $e(v_1) \parallel (l')$
275	8		$e,\ a$ $(e_1)a$
276	3 v. o,		$[(1)\alpha\beta,$ $[(1)\alpha\beta,$
	4		r ν
277	4 v. u.		k_1 h_1

Taf. VI, Fig. 1, statt x_1' setze x_1

E E''

M_2 M_2'

M_9 M_9'

A A'

M' M_1'

Zum Schnittpunkte der Geraden M_4' und t_4 setze a_4

Fig. 1a, Zum Schnittpunkte der gestrichelten Geraden $S'8$ und l_0 setze 0_0

Zum Schnittpunkte der Geraden $S'8$ und D' setze D_0

statt k setze k_0

III.

Beleuchtungs-Constructionen bei axonometrischer Darstellung.

A. Für das elliptische Hyperboloid.

§. 4.

In Fig. 4 ist bei axonometrischer Darstellung ein elliptisches Hyperboloid, dessen eine imaginäre Achse zur Projectionsebene

---

Fig. 2. Ganz oben statt 0 setze σ

Zum Berührungspunkte der durch ε gehenden gestrichelten Geraden setze a_5

Zum Schnittpunkte der Geraden M_1' und t_1 setze a_1

$m n$ t_1 e_1

Fig. 2a, Statt des Punktes S in der Geraden x setze S'

statt v setze v_1

$v\varepsilon$ verlängere bis δ

Zum Punkte 0 auf D_1 setze s_1

statt des Punktes 0 auf (D_1) setze (0)

$\mathfrak{S}$ setze $(\mathfrak{S})$

Zum Mittelpunkte von k_0 setze S_0

Taf. VII, Fig. 3, Ganz oben, statt M setze μ

Die Gerade Aa bezeichne mit M'

Aa_1 M_1'

statt t setze t_1

Die Gerade $S'\lambda'$ beeeichne mit l'

Sh l

Zum Mittelpunkte von k_0 setze S_0

Fig. 4, Statt t_4 setze t_4''

t_1 t_1''

P P''

Zum Schnittpunkte der Linien Q'' und x_1 setze a''

Die Parabel bezeichne mit I'

Die durch den Punkt 9 gehende Gerade bezeichne mit t_9

statt a setze a'

a_1 a_1'

Die Gerade $n e_3 e_5$ bezeichne mit $n m$

Fig. 4a, Statt S setze S'

9 $9'$

t_5 t_5'

parallel ist, so angenommen worden, dass AB die reelle Flächenachse, M ein Hauptschnitt mit den Asymptoten T, P ein zu AB normaler Flächenschnitt, x die zur Projectionsebene parallele Achse des letzteren und ν der Neigungswinkel der Ebene P gegen die Projectionsebene ist [1]).

Wir wählen die Ebene P als Constructionsgrundriss und benutzen wieder zur raschen Darstellung conjugirter Durchmesser von P einen Kreis $\varkappa$ mit dem Punkte ε. Die Lichtstrahlenrichtung ist durch Al und Al' vollkommen bestimmt. Um den in Fig. 2 im Grundrisse dargestellten Teil der ganzen Beleuchtungsconstruction auch hier ausführen zu können, müssen wir die Ebene P um x so lange drehen, bis sie zur Bildebene parallel wird. Dabei kommt l' nach (l'), so dass wir über $S'(l')$ als Durchmesser den Kreis (k) führen können.

Sollen die in einer beliebigen Seitenlinie M_1 des Hyperboloides liegenden Isophotenpunkte dargestellt werden, so bestimme man die umgeklappte Stellung (t_1) der entsprechenden Tangente t_1 $[t_1\beta\alpha, \beta(\beta) \parallel AB, \alpha(\beta)(t_1)]$, und den zugehörigen Normalschnitt (N_1) des Berührungscylinders $[(N_1)$ senkr. auf $(t_1)]$. Construirt man noch ein für allemal die wahre Grösse ci_2 der Projicirenden ll'

$$[ci = ll', \quad ii_2 \parallel x]$$

so hat man alle Angaben zur Darstellung des in N_1 zu construirenden Tangentialbüschels T_{N_1}. Um die einzelnen Büschel bequem zeichnen zu können, legen wir auch bei axonometrischer Darstellung alle Scheitel derselben auf einen Punkt S der Flächenachse AB und drehen alle Normalschnitte vorerst um AB in die Lage M und aus dieser um die durch S gehende, zu x parallele Gerade m in eine zur Bildebene parallele Stellung. Wird jetzt der Tangentialbüschel T_{N_1} auf die im §. 2. angegebene Art dargestellt

$$[S\lambda = ci_2, \quad \lambda g \parallel x, \quad \lambda l_0 = A(l'); \quad \lambda\lambda_1 = S'd_1 \quad \text{u. s. w.}]$$

und um m in die Ebene M zurückgedreht, so müssen die Projectionen der beiden congruenten Tangentialbüschel affin sein. Denkt man sich hierauf den Normalschnitt N_1 des Berührungscylinders samt dem in seiner Ebene liegenden Büschel T_{N_1} aus der Ebene M in die Ebene N_1 zurückgedreht und von hier auf die Ebene M so projicirt, dass sich M als Projection von N_1 ergibt, so muss der

---

1) S. d. Verf. „Constructionen über Flächen II. Grades in allgemeiner Parallelprojection" (Progr. d öffentl. Oberrealschule i. d. Josefstadt in Wien, 1881|2).

dadurch in der Ebene M entstehende Tangentialbüschel T_M ebenfalls zu dem Büschel T_{N_1} affin sein; SA ist dabei die Affinitätsachse. Nun sind parallel zu den Strahlen der Projection des Büschels T_M an das Bild M Tangenten zu führen und ihre Berührungspunkte zu bestimmen.

Die auf M entstehenden Berührungspunkte werden aber schneller erhalten, wenn man statt der Richtungen der Tangenten die durch S gehenden Richtungen der Normalen bezüglich des Bildes M bestimmt. Dies geschieht dadurch, dass man die ganze soeben besprochene Construction der Tangentialbüschel in einer um 90° gedrehten Stellung ausführt. Fällt man dann von S eine Normale auf die Asymptote F von M und zieht durch ihren Fusspunkt δ die zu x parallele Gerade $\{r_1\}$, so liefert der Normalbüschel S_M auf $\{r_1\}$ eine Punktreihe, die, mit 0 durch Strahlen verbunden, auf M die gesuchten Berührungspunkte gibt.

Denkt man sich den Tangentialbüschel T_{N_1} im Normalschnitte N_1 durch eine zu AS parallele Gerade g_N geschnitten, welche von S die Entfernung $A(e_1)$ hat, so entspricht dieser Punktreihe in dem Büschel T_M diejenige g_M, welche von S die Entfernung Aa hat. Werden diese beiden Büschel in einer zur Bildebene parallelen Lage construirt, und dreht man dann ihre Ebene um m, bis sie in die Lage M kommt, so werden die Projectionen der Punktreihen g_N und g_M proportionale Verkleinerungen der Punktreihen g_N und g_M sein. Anstatt aber die Punktreihe g_M mit Beibehaltung ihres Trägers im Verhältnisse $Ci_2 : Ci$ zu verkleinern, kann man zur Projection des Büschels T_M auch gelangen, wenn man die Punktreihe g_M beibehält und ihre Entfernung Aa vom Scheitel S im Verhältnisse $Ci : Ci_2$ vergrössert

$$[C\gamma = Aa, \quad \gamma\gamma_2 \parallel x]$$

Da wir aber die genannten Büschel in einer um 90° gedrehten Stellung darstellen, so wollen wir, um die ganze Construction soweit möglich zu vereinfachen, den Scheitel S so annehmen, dass die Strecke $S\xi$ gleich wird der Strecke $C\gamma_2$. Man kann ja das rechtwinkelige Dreieck $S\xi\delta$, von welchem die Richtung der Hypotenuse und die Kathete $S\xi$ bekannt sind, vorerst weiter oben construiren und es dann so lange verschieben, bis der Eckpunkt δ in die Asymptote T fällt. Wir zeichnen nun bei dem Normalbüschel S_{N_1} den Träger $[r_1]$ jener Punktreihe, welche der Punktreihe g_N des Tangentialbüschels entspricht, in der Entfernung $A(e_1)$ von S. Die der Punktreihe $[r_1]$ congruente in der Projection des Normalbüschels S_M muss dann auf $\{r_1\}$ liegen. Weil aber der durch die Punktreihe $\{r_1\}$ und den Mittel-

punkt 0 des Hyperboloides bestimmte Strahlenbüschel ebenfalls zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegt, so bestimmen wir zunächst auf M nur einen Berührungspunkt, z. B. den Punkt 4, und construiren dann mittelst der beiden Strahlen $S4$ und 04 der zwei zuletzt genannten Büschel die perspectivische Achse r_1 derselben.

Die auf M entstehenden Punkte sind schliesslich auf die Seitenlinie M_1 zu projiciren. Denken wir uns dabei auch den Centralbüschel $0r_1$ mitprojicirt, so entsteht in der Ebene M_1 ein neuer Centralbüschel $0\varrho_1$, idessen Bild zum Büschel S_{N_1} gleichfalls perspectivisch liegen muss. Wir projiciren deshalb zunächt wieder nur den Punkt

$$4[4a\sigma,\quad a_1\sigma 4,\quad 44 \parallel a\,a_1]$$

führen durch den neuen Punkt 4 den Strahl des Büschels $0\varrho_1$ und bestimmen aus den beiden einander entsprechenden Strahlen der Büschel S_{N_1} und $0\varrho_1$ den Punkt 4 ihrer Affinitätsachse ϱ_1. Einen zweiten Punkt q derselben bekommt man auf der Geraden r_1, wenn man $0q$ parallel zu aa_1 zieht. Der Normalbüschel S_{N_1} ist also gleichzeitig durch die beiden Träger r_1 und ϱ_1 zu schneiden. Aus der Punktreihe r_1 ergeben sich dann die Punkte auf M. Nun werden die durch die Punktreihe ϱ_1 gehenden Strahlen geführt und schliesslich durch die auf M liegenden Punkte Parallele zu aa_1 gezogen.

Auch bei axonometrischer Darstellung lässt sich diejenige Seitenlinie, welche die Lichtpole der Fläche enthält, leicht finden. Ebenso ist es auch hier zweckmässig, den Meridian, welcher den Lichtstrahl Al enthält und auch den Hauptschnitt M der Fläche nicht unbehandelt zu lassen. Die in § 2. angegebene Construction von Isophotentangenten ist auch bei axonometrischer Darstellung durchführbar.

Von grosser Wichtigkeit für das Zeichnen der Isophoten sind auch die in der Contour liegenden Isophotenpunkte. Sie lassen sich einfach als Isophotenpunkte eines auf der Bildebene normal stehenden Cylinders mittelst eines Normalbüschels darstellen, dessen Richtung und Radius durch Sl angegeben wird, und dessen Scalenlänge gleich Sl_0 ist. Dabei ist es am zweckmässigsten, vorerst die Contour und ihre Asymptoten T_c zu construiren [1]), dann den Scheitel des erwähnten Normalbüschels nach S zu verlegen, von S eine Normale auf T_c zu fällen und in der mehrerwähnten Weise fortzufahren.

---

1) S. d. Verf. „Constructionen über Flächen II. Grades in allgemeiner Parallelprojection".

B. Für andere Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind.

§. 5.

Wird ein windschiefes Hyperboloid axonometrisch so dargestellt, dass eine reelle Axe x_1 der Fläche parallel zur Projectionsebene ist[1]), so kann man bei demselben die im vorigen Paragraphen behandelte Beleuchtungsconstruction mit nur wenigen Aenderungen durchführen. Der gemeinsame Scheitel der verschiedenen Normalbüschel S_N wird hier auf einen Punkt S_n der Flächenachse x_1 verlegt und die Hauptschnittebene M, in welcher diese Büschel darzustellen sind, muss man sich um x_1 so lange gedreht denken, bis sie zur Projectionsebene parallel wird. Man kann dann wieder durch S_n Normale zu den Asymptoten T des Bildes M ziehen und die durch ihre Fusspunkte gehende Gerade $\alpha\beta$ in der im vorigen Paragraphen kennen gelernten Weise benutzen. Auch bei dieser Fläche muss der sich bezüglich des Hauptschnittes M ergebende Centralbüschel 0_M zu dem ursprünglich zu construirenden Normalbüschel S_N perspectivisch sein. Da aber der sich auf M_1 beziehende Centralbüschel in diesem Falle zum Büschel S_{N_1} nicht perspectivisch liegt, so muss er aus dem Büschel 0_M durch Projection direct bestimmt werden. Bei dem windschiefen Hyperboloide soll man auch wegen des einfachen Vorganges die Isophotenpunkte des elliptischen Hauptschnittes construiren; dabei wird der entsprechende Tangentialbüschel in der umgelegten Lage des Constructionsgrundrisses P ausgeführt und mit Benutzung einer zur Projectionsebene parallelen Schnittgeraden in die räumliche Stellung aufgedreht. Die hierauf den Strahlen des Büschels auf P entsprechenden Berührungspunkte erhält man mittelst des Kreises $\varkappa$; sie werden schliesslich von P auf den elliptischen Hauptschnitt der Fläche central projicirt.

Ist ein Ellipsoid bei axonometrischer Darstellung durch einen Hauptschnitt P und die zu ihm normale Flächenachse BC gegeben, so betrachtet man wieder P als Constructionsgrundriss und legt die Normalbüschel durch einen auf der Verlängerung von BC liegenden Punkt S. Ebenso wird auch bei axonometrischer Darstellung das über BC geführte kreisförmige Bild M der ganzen Construction zu Grunde gelegt. Wenn irgend eine Seitenlinie M_1 behandelt wird, so ist auch hier der die auf M liegenden Punkte liefernde Centralbüschel A_M zu dem zuerst zu construirenden Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch, und denkt man sich bei dem Projiciren der Linie M

1) Vergl. Fig. 5 unserer „Allg. Theorie d. Isophotentangenten . . . "

auf die Seitenlinie M_1 auch den Büschel A_M mitprojicirt, so ergibt sich in der Ebene M_1 ein neuer Büschel A_{M_1}, dessen Bild gleichfalls zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegt. Bei der Construction der Isophotenpunkte benutze man wieder beide perspectivische Achsen.

Auch bei einem axonometrisch dargestellten elliptischen Paraboloide bietet unsere Beleuchtungsconstruction keine neuen Schwierigkeiten. Weil auch in diesem Falle die Bilder der beiden dem Hauptschnitt M und der Seitenlinie M_1 entsprechenden Parallelbüschel zu dem zugehörigen Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegen, so kann der in §. 2. behandelte Vorgang auch bei axonometrischer Darstellung ohne weiters ausgeführt werden. Die beiden perspectivischen Achsen sind in diesem Falle sogar parallel.

Unsere Construction lässt sich bei axonometrischer Darstellung auch dann leicht anwenden, wenn die die beleuchtete Fläche bestimmenden gegebenen Linien P und M nicht der II. Ordnung angehören.

IV.

Beleuchtungs-Constructionen bei perspectivischer Darstellung.

§. 6.

Die behandelten Flächen nehmen bei perspectivischer Darstellung die einfachste Lage dann ein, wenn die Flächenachse AB zur Bildebene parallel ist; die Fluchtlinie $\mu\nu$ der Parallelcurven muss dann durch den Augpunkt gehen. Wir nehmen an, dass von einer solchen Fläche die Achse AB, eine Parallelcurve P und die zur Bildebene parallele Seitenlinie M gegeben sei. Durch den Schnittpunkt A von AB mit der Ebene P führen wir das Bild l eines Lichtstrahles und auch das Bild l' seiner orthogonalen Projection auf die Ebene P. Um dann die den einzelnen Seitenlinien M_1 entsprechenden Tangentialbüschel, deren gemeinsame Scheitel wir auch bei perspectivischer Darstellung auf einen Punkt S der Flächenaxe AB verlegen, construiren zu können, drehen wir die Ebene P, welche auch hier als Constructionsgrundriss betrachtet wird, analog der axonometrischen Darstellung um die Schnittkante M' der Ebenen P und M in eine zur Bildebene parallele Lage; sie wird dadurch die Erweiterung der Ebene M. Wir werden wieder die Normalschnitte der Berührungscylinder samt den entsprechenden

Normalbüscheln drehen, bis sie in die Ebene M zu liegen kommen. Man kann überhaupt, damit die Erklärung des Verfahrens soweit möglich einfach werde, M als in der Bildebene liegend betrachten. Dadurch gestaltet sich die Construction der einzelnen Normalbüschel sogar einfacher, als bei axonometrischer Darstellung. Ebenso bietet die schliesslich vorzunehmende Projection der auf M entstehenden Punkte auf die Seitenlinie M_1 gar keine Schwierigkeiten.

Das in den früheren Paragraphen bezüglich der Lichtpole und einiger speciell liegender Seitnnlinien gesagte hat auch bei perspectivischer Darstellung seine volle Giltigkeit. Ebenso lassen sich bei derselben die Isophotenpunkte jener Parallelcurven leicht bestimmen, in welchen die gegebene Fläche von zu AB parallelen Cylindern berührt wird.

Bei der Behandlung des Ellipsoides hat man, wie bei axonometrischer Darstellung, über AB den Kreis M zu führen und den Umstand zu benutzen, dass die beiden den Linien M und M_1 entsprechenden Centralbüschel wieder zum Normalbüschel S_{N_1} perspectivisch liegen. Ebenso einfach gestaltet sich die Behandlung der anderen Flächen II. Ordnung.

V.

Beleuchtungs-Construction für das windschiefe Paraboloid.

A. Bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

§. 7.

Bei dem in Fig. 5 gezeichneten hyperbolischen Paraboloide wollen wir zunächst den als eine Gerade sich ergebenden Grundriss der Selbstschattengrenze 0 bestimmen. Der im Hauptschnitte P liegende Punkt derselben ergibt sich auf die bei dem elliptischen Paraboloide angegebene Art, und um den im zweiten Hauptschnitte Q liegenden Punkt der Selbstschattengrenze zu erhalten, bestimmen wir gleich sämtliche Isophotenpunkte von Q. Zu dem Behufe denken wir uns Q in dem in die horizontale Projectionsebene umgeklappten Kreuzrisse dargestellt. Um aber diesen Hauptschnitt nicht zeichnen zu müssen, führen wir r normal zu x' und machen σF gleich der Subnormale der Parabel Q

$$[\varrho\alpha = 2\overline{B''C''},\quad C'''F \text{ senkr. auf } C'''\alpha]$$

In F construiren wir nun den entsprechenden Normalbüschel, welcher den Kreuzriss von Sl zur Richtung und zum Radius und die wahre Grösse von Sl zur Scalenlänge hat, schneiden ihn durch die Gerade r und projiciren die sich dadurch ergebenden Punkte in der Richtung x' nach Q'. Durch die beiden Punkte der Selbstschattengrenze ergibt sich schliesslich der Grundriss derselben.

Der weiteren Construction der Isophoten legen wir das zur verticalen Projectionsebene parallele, aus lauter congruenten Parabeln bestehende Curvensystem zu Grunde. Die Richtungen $t_1, t_2, t_3 \ldots$ der dann den einzelnen Schnitten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ entsprechenden Umhüllungscylinder bekommen wir mittelst des Hauptschnittes Q im Kreuzrisse. Für den Schnitt P_1 ergibt sich schon in $\gamma_1 F$ die Richtung der Normalen seines in Q liegenden Punktes und in t_1''' [t_1''' senkr. auf $\gamma_1 F$] die Tangentenrichtung, so dass $\sigma\delta_1$ gleich der Subtangente und die Hälfte davon gleich der Abscisse des in P_1 liegenden Punktes des Hauptschnittes Q ist.

Wir legen sämtliche Normalschnitte, welche in diesem Falle normal zur Kreuzrissebene sind, durch einen Punkt S der Flächenachse und drehen dieselben um die Gerade m so lange, bis sie in die Ebene P zu liegen kommen. Um in dieser Stellung den Normalbüschel für den Normalschnitt N_1 zu erhalten, zeichnen wir ein für allemal über $S'''l'''$ als Durchmesser den Kreis k und tragen die sich dann ergebende Strecke $S'''d_1$ auf der durch l'' und l' gehenden Geraden g nach $\lambda\lambda_1$ auf. $S''\lambda_1$ gibt schon die Richtung und den Radius des betreffenden Büschels an. Schneidet man denselben durch eine zu x_1 parallele Gerade ϱ_1, welche von S'' dieselbe Entfernung hat, wie der Brennpunkt des parabolischen Normalschnittes N_1 von seiner Directrix, so kann man die sich auf ϱ_1 ergebenden Punkte durch zu x normale Ebenen auf N_1 projiciren. Durch die dadurch auf N_1 entstehenden Punkte gehen aber die Isophoten des Berührungscylinders, welche ebenfalls in den erwähnten Ordinalebenen liegen und den Schnitt P_1 in den gesuchten Isophotenpunkten treffen. Beide Projectionen der letzteren müssen demnach in den Strahlen liegen, welche man durch die Punktreihe ϱ_1 normal zu x_1 führt. Die Gerade ϱ_1 wird am einfachsten erhalten, wenn man durch den auf P_1 liegenden Punkt 0 der Selbstschattengrenze den zu x_1 normalen Strahl zieht und denselben mit dem Nullstrahle des Normalbüschels zum Schnitte bringt. Um die Aufrisse der gesuchten Isophotenpunkte zu bekommen, hat man schliesslich die Hälfte der Subtangente $\sigma\delta_1$ von den sich auf P'' ergebenden Punkten aus nach aufwärts aufzutragen. Damit man aber die Parabel P'' nicht zu erweitern braucht, ist es zweckmässig, statt dessen die entsprechende

Strecke von den auf P_2'' entstehenden Punkten aus nach abwärts aufzutragen.

Die den normal beleuchteten Punkt enthaltende Schnittebene P_3 bekommt man, wenn man $S'''l'''$ bis zur Geraden r verlängert.

Das in diesem Paragraphen behandelte Verfahren lässt sich auch in ungeänderter Weise auf das elliptische Paraboloid anwenden.

B. Bei axonometrischer Darstellung.

§. 8.

Der zuletzt eingeschlagene Vorgang ist besonders geeignet, in einem axonometrischen Bilde des hyperbolischen Paraboloides die Isophoten direct zu liefern. In Fig. 6 der Taf. III. ist von einer solchen Fläche ein Stück axonometrisch dargestellt, welches in derselben Weise begrenzt ist, wie das in Fig. 5 bezeichnete [1]), wobei B den Flächenscheitel und BA die Flächenachse vorstellt.

Weil die Constructionen, welche früher im Kreuzrisse ausgeführt wurden, jetzt in der Hauptschnittebene yz zu machen sind, projiciren wir die Lichtstrahlenrichtung $0l$ auf diese Ebene

$$[l'\beta \parallel x, \quad \beta l''' \parallel z, \quad ll''' \parallel x]$$

und stellen das ganze in ihr auszuführende Constructionsgebilde in wahrer Grösse in einer Nebenfigur 6a dar. Verlegt man nach $B\sigma$ die Achse und nach B den Scheitel des genannten Hauptschnittes, so hat man die wahren Grössen von

$$CB''[BB'' \parallel y] \quad \text{und} \quad BB'' \quad \text{nach} \quad B\sigma \quad \text{[Fig. 6 a]}$$

beziehungsweise auf σC aufzutragen

$$B\alpha = B\sigma$$

zu machen und CF normal zu $C\alpha$ zu führen, um in σF die Subnormale für den Hauptschnitt CB zu erhalten. Damit sich in der Nebenfigur die Projection Fl''' der Lichtstrahlenrichtung ergibt, tragen wir die wahren Grössen von $\beta l'''$ und 0β beziehungsweise nach Fb und bl''' auf.

---

1) S. d. Verf. „Constructionen über Flächen II. Ordnung in allg. Parallelprojection".

Auch bei axonometrischer Darstellung ist es zweckmässig, vorerst die auf dem hyperbolischen Grenzschnitte entstehende geradlinige Projection $0'$ der Selbstschattengrenze zu construiren. Der auf Q' liegende Punkt derselben ergibt sich, wenn man in der Nebenfigur die Gerade Fo normal zu Fl''' führt und die sich dadurch ergebende Ordinate σo mit der entsprechenden Verkürzung auf Q' nach Ao' aufträgt. Einen zweiten, im Hauptschnitte P liegenden Punkt der Selbstschattengrenze erhält man, wenn man an den Grenzschnitt P_2 eine zu $l\beta$ parallele Tangente führt, ihren Berührungspunkt o bestimmt und dann oo' parallel zu z und $o'o'$ parallel zu y führt. Fallen die beiden construirten Punkte des Grundrisses der Selbstschattengrenze zu nahe an einander, so kann man auch mit Benutzung der Grenzhyperbel die zu $0l'$ conjugirte Richtung suchen.

Um nun die Isophotenpunkte der einzelnen zu P parallelen Flächenschnitte P_1, P_3, P_4 . . . zu erhalten, bestimmen wir nach dem aus der Figur 5 ersichtlichen Verfahren vorerst die entsprechenden Punkte auf dem Grenzschnitte P_2 und projiciren sie dann auf die Schnitte P_1, P_3, P_4 . . . Aus Fig. 5 ergibt sich, dass man die aus S'' beschriebenen concentrischen Kreise samt den aus ihnen entstehenden Normalbüscheln, Punktreihen und Parallelbüscheln auch als in der Ebene P_2 liegend betrachten kann. Wir machen von diesem Umstande bei der axonometrischen Darstellung Gebrauch und verlegen dem entsprechend den Scheitel S sämtlicher Normalbüschel in die Parabelachse $0C$. Um dann die einzelnen Büschel in wahrer Grösse construiren zu können, denken wir uns die Constructionsebene P_2 zuerst um $0C$ so lange gedreht, bis x parallel zur Bildebene wird, und hierauf um die durch S parallel zu letzterer gehende Gerade m so lange gedreht, bis die Ebene P_2 in eine zur Bildebene parallele Stellung kommt. In dieser Lage ist nun die Construction der Fig. 5 auszuführen. Wir tragen deshalb die wahre Grösse von $\beta l'$ nach $S\lambda$ auf, ziehen λg parallel zu z und tragen Fl''' [Fig. 6a] nach $\lambda\delta$ auf, um in $S\delta$ die wahre Grösse der Strecke Sl zu erhalten.

Soll nun der durch P_1' gehende, zu P_2 parallele Schnitt P_1 behandelt werden, so hat man die wahre Grösse von $A\gamma_1$ in der Nebenfigur nach $\sigma\gamma_1$ aufzutragen und $\gamma_1 Fd_1$ zu führen. Die sich dadurch ergebende Strecke Fd_1 wird dann in der Hauptfigur nach $\lambda\lambda_1$ aufgetragen und aus $S\lambda_1$ resultirt der dem Schnitte P_1 entsprechende Normalbüschel S_{N_1}. Letzterer ist nun in einer bestimmten Entfernung von S durch eine zu m parallele Gerade $[r_1]$ zu schneiden. Wird die den Büschel S_{N_1} und die Punktreihe $[r_1]$ enthaltende Constructionsebene nach einander um die Achsen m und z gedreht,

bis sie in die Ebene P_2 zu liegen kommt, und durch die sich dadurch ergebende neue Lage $\{r_1\}$ der Punktreihe $[r_1]$ der zu z parallele Strahlenbüschel gezogen, so muss der Letztere zu dem ursprünglich construirten Büschel S_{N_1} perspectivisch sein. Die perspectivische Achse ϱ_1 beider Büschel, welche zu m parallel ist, wird am schnellsten erhalten, wenn man durch den sich auf P_1' mit Benutzung der Selbstschattengrenze der Fläche ergebenden Punkt o' die zu y parallele Gerade $o'o'$ führt und dann $o'o$ parallel zu z zieht. Schneidet man jetzt den Büschel S_{N_1} mit der Geraden ϱ_1 und zieht durch die sich dadurch ergebenden Punkte Parallele zu z, so erhält man die gesuchten Punkte auf P_2. Da nun letztere auf den Flächenschnitt P_1 zu projiciren sind, so führe man ac' parallel zu y und $c'c$ parallel zu z. ca gibt dann die Richtung und Länge der betreffenden projicirenden Geraden an.

Auch hier kann man den den Lichtpol der Fläche enthaltenden Schnitt bestimmen, wenn man von der Nebenfigur ausgeht.

Um die sehr wichtigen Isophotenpunkte der Contourparabel zu erhalten, bestimme man vorerst ihren Scheitel, ihre Achse und die Subnormale. Der dann etwa im Brennpunkte der Contour zu construirende Normalbüschel hat Ol zur Richtung und zum Radius und $S\delta$ zur Scalenlänge.

Der soeben behandelte Vorgang lässt sich auch bequem bei perspectivischer Darstellung durchführen [1]).

Bielitz in Oesterr.-Schlesien, im Februar 1891.

---

1) Die in dieser Abhandlung vorgeführten Constructionen der Isophoten hat der Verfasser bei windschiefen Flächen II. Ordnung bereits im Jahre 1877 in seiner Abhandlung „Ueber die Construction der Linien von gleicher Beleuchtungsstärke auf windschiefen Flächen", welche sich als Manuscript im Archiv der „k. k. wissenschaftlichen Prüfungscommission für das Lehramt an Gymnasien und Realschulen zu Wien" befindet, durchgeführt.

VIII.

Zur Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Integrale.

Von

Emil Oekinghaus.

I.

Die nachfolgenden Entwickelungen werden sich auf einige Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale beziehen und zwar auf Grund der von uns schon früher aufgestellten Integralfunctionen, weshalb wir in Kürze die Betrachtungen wiederholen wollen, welche zu diesen hyperelliptischen Functionen hinüberführen. Ueber eine Merkwürdigkeit der Cassinischen Curve berichten wir am Schlusse.

Es sei die Gleichung $n$ten Grades

$$\Delta = x^n + ax^{n-1} \ldots px + q = 0$$

zugrunde gelegt.

Mit dieser sind die folgenden Relationen verknüpft, welche wir schon früher für den 4. Grad entwickelt haben, aber allgemein für jeden Grad gelten:

$$\Sigma \frac{x_k}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}} = 0, \quad k = 0, 1, 2 \ldots k-2$$

Enthält die obige Gleichung noch andere Variabele y etc., so ergiebt die Differentiation von $\Delta(x, y)$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Delta}{\partial y}\,dy = 0$$

und in Benutzung dieser auf die obige Identität resultirt

$$\Sigma x^k \frac{dx}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}} = 0$$

Es sei

$$\Delta x, y = X_1 y^2 + 2X_2 y + X_3 = 0$$

worin die X Functionen von x sind; dann ist wegen

$$X_1 y + X_2 = \sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}$$

$$\Sigma \frac{x^k\,dx}{X_1 y + X_2} = \Sigma \frac{x^k\,dx}{\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} = 0$$

also auch

$$\Sigma \int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} = C$$

Wir werden diese Relation auf eine Gleichung anwenden, welche wir in der Abhandlung: „Trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen" bei der Untersuchung der Verhältnisse zwischen Kreis und Kegelschnitt aufgestellt und als Cosinusresolvente bezeichnet haben, welche u. a. auch zur Trisection des Winkels führte.

Wir nennen die 4 Winkel, welche die 4 Radien des Kreises nach den Schnittpunkten desselben mit dem Kegelschnitt mit der Centrale R beider Curven bilden, $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3\,\psi_4$. R habe gegen die grosse Achse die Neigung φ_1, und der Radius des Kreises sei s. Die Verbindungsgeraden von Kreis und Kegelschnitt schliessen in ihrem vollständigen Vierseit drei Winkel $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ ein, für welche wir a. a. O. folgende Gleichung aufgestellt haben:

$$\cos\gamma^3 + \frac{2R^2(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) - 2a^2b^2 + (a^2+b^2)s^2}{c^2s^2}\cos\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{4R^2}{c^2s^2}(a^4\sin\varphi^2 + b^4\cos\varphi^2) - 1\right)\cos\gamma$$
$$+ \frac{2R^2\,\frac{a^2+b^2}{c^2}(a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2) + 2a^2b^2 - (a^2+b^2)s^2}{c^2s^2} = 0$$

Im Anschluss an die vorhin aufgestellte Integralfunction betrachten wir $\cos\gamma$ als x und die in der vorliegenden Gleichung vorkommenden Parameter R, s, φ als y, wodurch wir verschiedene neue Functionen erhalten. Ist also zunächst

$$R = y$$

so erhält man schliesslich nach gehöriger Reduction der Form $X_2^2 - X_1 X_3$ nach Einführung von

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \tfrac{1}{2}(1-\cos\gamma)$$

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\frac{c^2}{a^2(1-b^2/\varepsilon^2)}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\left(1+\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi^2\right)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)} = C$$

welches Integral auch noch unter dem Zeichen mit

$$\cos\gamma = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$

multiplicirt werden darf.

Die Σ bezieht sich, wie man sieht, auf drei Integrale, deren Amplituden $\frac{1}{2}\gamma_1\,\frac{1}{2}\gamma_2\,\frac{1}{2}\gamma_3$ sind. Die Summe dieser Integrale ist für alle Kreise von gleichem Radius ε und gleicher Neigung φ desselben gegen die grosse Achse eine constante Grösse.

Man erkennt sofort, dass die vorstehende Relation ein Additionssatz ist für diejenigen Abel'schen Integrale, bei denen unter dem Integralzeichen eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck fünften Grades in Bezug auf die Integrationsvariabele steht, wie sich ergiebt, wenn wir

$$\cos\gamma \quad \text{oder} \quad \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = x$$

setzen. Man hat nämlich

$$\Sigma \int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-u^2x)}} = C$$

welche Form an schon bekannte und untersuchte erinnert.

Um nun zu einem bestimmten Theorem zu kommen, gehen wir auf die kubische Gleichung für $\cos\gamma$ zurück, indem wir die Relation

$$\cos\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2}{1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2}$$

darin einführen und demgemäss folgende Gleichung erhalten:

$$b^4\cos\varphi^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^6 - (a^2b^2\cos\varphi^2 - (a^2+b^2)b^2\sin\varphi^2 + R^{-2}b^2c^2(a^2-\varepsilon^2))\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^4$$
$$+ (a^2b^2\cos\varphi^2 - (a^2+b^2)a^2\sin\varphi^2 - R^{-2}a^2c^2(b^2-\varepsilon^2))\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2 - a^4\sin\varphi^2 = 0$$

Wir setzen

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad \beta^2 = \frac{c^2}{a^2}\frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}, \quad \gamma^2 = 1+\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi^2$$

also

$$\alpha'^2 = 1-\alpha^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \gamma_1{}^2 = -\alpha'^2\cot\varphi^2$$

Aus dem Absolutglied ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = \frac{a^4}{b^4}\operatorname{tg}\varphi^2$$

also

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = -\frac{1}{\alpha'^2\gamma'^2}$$

Diese Relation bildet eine erste Bedingungsgleichung zwischen den Amplituden der Function. Es tritt noch eine zweite auf. Wir bilden aus der letzten Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$ die Summen $\Sigma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$ und $\Sigma\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma^4$ und man erhält durch passende Zusammenstellung zunächst

$$\alpha'^2\gamma'^2\,\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma'^2 - \beta'^2\,\Sigma\cot\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (1+\alpha'^2)(\alpha'^2+\beta'^2)+\gamma'^2(1+\beta'^2)$$

oder auch, wenn wir durch $\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2$ dividiren und die obige Relation benutzen,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2\left(\frac{1}{\beta^2}+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2\right)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2\left(\frac{1}{\beta^2}+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2\right)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2\left(\frac{1}{\beta^2}+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2\right)$$
$$= (1+\alpha'^2)(\alpha'^2+\beta'^2)+\gamma'^2(1+\beta'^2)$$

Ist diese Bedingungsgleichung zwischen den drei Amplituden $\frac{1}{2}\gamma_1$ $\frac{1}{2}\gamma_2\frac{1}{2}\gamma_3$ und den Moduln $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ zugleich mit der zweiten

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = -\frac{1}{\alpha'^2\gamma'^2}$$

erfüllt, so ist die Summe der drei hyperelliptischen Integrale

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{(1-\alpha^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)(1-\beta^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)(1-\gamma^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)}} = C$$

stets eine constante Grösse. Diese Relationen bilden also zusammen ein Additionstheorem dieser Integrale dar, deren Amplituden eine geometrische Bedeutung besitzen.

Um die Constante zu bestimmen, bemerke man, dass die Relationen für alle R und also auch für

$$R = 0$$

gültig sind. Damit rückt aber das Kreiscentrum in den Mittelpunkt des Kegelschnitts und die entsprechenden Wurzeln der kubischen Gleichung sind

$$\cos\gamma_1 = +1, \quad \cos\gamma_2 = -1, \quad \cos\gamma_3 = \frac{2a^2b^2 - s^2(a^2+b^2)}{c^2s^2}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = \frac{a^2}{c^2}\left(1-\frac{b^2}{s^2}\right)$$

Die Constante setzt sich also aus 2 Integralen zusammen. Das eine ist wegen

$$\tfrac{1}{2}\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$$

ein vollständiges, welches wir $H\frac{1}{2}\pi$ oder K nennen; das andere möge die Amplitude $\frac{1}{2}\sigma$ haben, hervorgehend aus

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{a^2}{c^2}\left(1-\frac{b^2}{s^2}\right) = \frac{1}{\beta^2}$$

und die Integralfunction wird nun zu

$$H\tfrac{1}{2}\gamma_1 + H\tfrac{1}{2}\gamma_2 + H\tfrac{1}{2}\gamma_3 = H\tfrac{1}{2}\pi + H\tfrac{1}{2}\sigma$$

Der bisher vorausgesetzte Kegelschnitt ist eine Ellipse, das umgekehrte Vorzeichen von b^2 ergiebt also eine Hyperbel.

Die analytischen Determinationen stehen also in Abhängigkeit von den geometrischen.

Wie schon bemerkt, kann man unterm Integralzeichen noch mit $\sin\frac{1}{2}\gamma^2$ multipliciren, ohne dass das Theorem seine Gültigkeit verliert.

Bemerkenswert ist, dass die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi$$

von der Centrale R und dem Halbmesser des Kreises s unabhängig ist. Sie gilt auch noch für die Asymptoten der Hyperbel mit den Halbachsen 0, also für zwei sich schneidende Geraden unter dem Winkel γ_1 oder γ_2 etc, für welche also auch $\frac{b}{a}$ bekannt ist. Die obige Relation bietet dann noch Veranlassung zu interessanten Entwickelungen zwischen einem Kreise und zweien ihn schneidenden Graden.

Ferner möge noch bemerkt werden, dass die zu Anfang aufgestellte Cosinusgleichung in der Form

$$\cos\gamma^3 + \alpha\cos\gamma^2 + \beta\cos\gamma + \gamma = 0$$

durch Gleichsetzen entsprechender Coefficienten zu einer geometrischen Auflösung dieser und ähnlicher Gleichungen dienen kann, freilich unter Beachtung, dass eine Wurzel negativ sein muss. Die Achsen des Kegelschnitts a, b sind im allgemeinen beliebig. Das Kreiscentrum sei x, y, der Radius $= s$

$$x^2 = \frac{a^4}{c^2}\,\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)}{P}, \quad y^2 = \frac{b^4}{c^2}\,\frac{(1-\alpha+\beta-\gamma)}{P}$$

$$s^2 = \frac{8a^4b^4}{c^6P}$$

$$P = \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)^3 + \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)^2\alpha + \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)\beta + \gamma$$

Die Wurzeln γ sind, wie schon angegeben, die 3 Winkel des von Kreis und Kegelschnitt gebildeten Vierseits.

Liege z. B. vor

$$\cos\gamma^3 - \tfrac{1}{2}\cos\gamma^2 - \tfrac{1}{3}\cos\gamma + \tfrac{1}{18} = 0$$

so würden für die gleichseitige Hyperbel die folgenden Coordinaten bestehen

$$x^2 = \frac{a^2}{2}\,\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)}{\gamma}, \quad y^2 = \frac{a^2}{2}\,\frac{(1-\alpha+\beta-\gamma)}{\gamma}$$

$$s^2 = \frac{a^2}{\gamma}$$

oder für $a = 1$

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}, \quad y = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}, \quad s = 3\sqrt{2}$$

Die Construction des Kreises mit seinem Vierseit ergeben die Winkel γ, oder ausgewertet

$$\cos\gamma_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_2 = \tfrac{1}{3}, \quad \cos\gamma_3 = -\tfrac{1}{3}$$

Für diese Argumente hat man also auch

$$\Sigma\int \frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{(1-2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)\,(1-\tfrac{2}{19}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)\,(1-\tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)}} = H\tfrac{1}{2}\pi + H\tfrac{1}{2}\sigma$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{\sqrt{19}}{6}$$

In der zugrunde gelegten Resolvente können wir ferner den Parameter s oder den Kreisradius variabel annehmen und dadurch zu einer neuen Entwickelung hyperelliptischer Integrale gelangen. Nach einer Reihe von Reductionen finden wir

$$\Sigma\int \frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}+\cos\gamma\right)\left\{\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2}+\frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right)R^2-1\right)\cos\gamma^2 + \frac{2R^2}{c^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\cos\varphi^2+\frac{a^2}{b^2}\sin\varphi^2\right)\cos\gamma + \frac{R^2}{c^2}(a^2+b^2)\left(\frac{\sin\varphi^2}{b^2}-\frac{\cos\varphi^2}{a^2}\right)+1\right\}}} = C$$

oder

$$\Sigma\int \frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}+\cos\gamma\right)(M+\cos\gamma)(N+\cos\gamma)}} = C$$

$$M = \frac{R^2(a^4\cos\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)+a^2b^2q^2}{R^2c^2(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)-a^2b^2c^2}$$

$$N = \frac{R^2(a^4\cos\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)-a^2b^2q^2}{R^2c^2(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)-a^2b^2c^2}$$

$$q^4 = R^4-2c^2R^2\cos 2\varphi+c^4$$

Die Summe der obigen drei Integrale ist stets constant, sofern die Amplituden γ concentrischen Kreisen entsprechen.

Liegt das Kreiscentrum auf der Ellipse, so geht die Relation über in

$$\Sigma\int \frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\left(1+\frac{b^4}{a^4}\cot\varphi^2\right)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)}} = C$$

und führen wir hierin ein

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\psi = \frac{a}{b}$$

also die neue Variabele ψ, so resultirt die elliptische Integralfunction

$$\Sigma\int \frac{d\psi}{\sqrt{\left(1-\left(1+\frac{b^2}{a^2}\cot\varphi^2\right)\cos\psi^2\right)}} = C$$

und es ist

$$\frac{b}{a}\cot\varphi = \cot E$$

wo E die excentrische Anomalie bedeutet.

Man kann endlich in der Resolvente φ als variabel betrachten und die Gleichung in der Form

$$X_1\sin\varphi+X_2\cos\varphi+X_3 = 0$$

aufstellen, worin X Functionen der Wurzeln sind. Die Integralfunction wird dann

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} = C$$

Die Resolvente nimmt nun die einfache Form

$$X_2 \cos 2\varphi + X_3 = 0$$

an, daher ist

$$\Sigma \int \frac{d\cos\gamma}{\sqrt{(X_2 + X_3)(X_2 - X_3)}} = C$$

worin

$$X_2 = \frac{R^2}{s^2}\cos\gamma^2 + \frac{2R^2}{c^4 s^2}(a^4 - b^4)\cos\gamma + \frac{R^2(a^2+b^2)^2}{c^4 s^2}$$

$$X_3 = -\cos\gamma^3 - (R^2(a^2+b^2) - 2a^2b^2 + (a^2+b^2)s^2)\frac{\cos\gamma^2}{c^2 s^2}$$
$$- \frac{2R^2(a^4+b^4)}{c^4 s^2}\cos\gamma$$
$$+ \cos\gamma - \frac{R^2(a^2+b^2) + 2a^2b^2 - (a^2+b^2)s^2}{c^2 s^2}$$

Bei der Bildung der Summe $X_2 + X_3$ und der Differenz $X_2 - X_3$ lässt sich ein Factor $1 - \cos\gamma$, bzhw. $1 + \cos\gamma$ herausheben, deren Product $\sin\gamma^2$ ist; da aber

$$d\cos\gamma = -\sin\gamma\, d\gamma$$

ist, so erhält man schliesslich nach einigen Reductionen die Function

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\cos\gamma^2 + 2\frac{b^2R^2 - a^2b^2 + a^2s^2}{c^2s^2}\cos\gamma + n\right)\times \left(\cos\gamma^2 + 2\frac{a^2R^2 - a^2b^2 + b^2s^2}{c^2s^2}\cos\gamma + n'\right)}} = C$$

$$n = \frac{2R^2b^2(a^2+b^2) - 2a^2b^2c^2 + (a^4 - b^4)s^2}{c^4 s^2}$$

$$n' = \frac{2R^2a^2(a^2+b^2) + 2a^2b^2c^2 + (a^4 - b^4)s^2}{c^4 s^2}$$

$$m = \frac{b^2R^2 - a^2b^2 + a^2s^2}{c^2s^2}, \quad m' = \frac{a^2R^2 - a^2b^2 + b^2s^2}{c^2s^2}$$

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2m\cos\gamma + n)(\cos\gamma^2 + 2m'\cos\gamma + n')}} = C$$

Zwischen den Werten $mm'nn'$ findet folgende Bedingungsgleichung statt:

$$(m + m' - \tfrac{1}{2}(n - n'))^2 = 2(m' - m + 1)(n + n')$$

Für $\cos\gamma = x$ ergiebt sich eine Function 6. Grades, deren Radical man folgende Form geben kann

$$s = \sqrt{(1 - x^2)(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)}$$

oder eine entsprechend andere, wenn

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = x$$

eingeführt wird. Die abgeleitete Function gilt für alle Kreise vom Halbmesser s, deren Centra auf einem mit dem Kegelschnitt concentrischen Kreise vom Halbmesser R liegen.

Die Functionen vereinfachen sich bedeutend für eine gleichseitige Hyperbel. Die Constante stellt sich wieder als eine Summe von Integralen dar, deren Amplituden sich aus der speciellen Lage des Kreises ergeben, wonach dessen Mittelpunkt entweder in der X- oder Y-Achse liegen kann, also $\varphi = 0$ oder $= 90^0$ ist.

Wir wählen jetzt als Variabele zwischen Kreis und Ellipse denselben excentrischen Winkel φ, welcher bei der Rectification der Ellipse vorkommt und leiten folgende Gleichung ab:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^4(s^2 - R^2 - b^2 - 2bR\sin\alpha) + 4Ra\cos\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^3$$
$$+ (2s^2 - 2R^2 + 2b^2 - 4a^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2 + 4Ra\cos\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi + s^2 - R^2 - b^2$$
$$+ 2Rb\sin\alpha = 0$$

Nach den von uns früher mitgetheilten Methoden ergiebt sich hieraus die Resolvente

$$\cos\gamma^3 - \frac{2(s^2 - R^2) - a^2 - b^2}{c^2}\cos\gamma^2 + \left(\frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2) - 1\right)\cos\gamma$$
$$- \frac{2(s^2 - R^2 + a^2 + b^2)}{c^2} - \frac{4R^2}{c^4}(-a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2) = 0$$

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4), \quad \gamma_2 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4) \quad \text{etc.}$$

Nach den anfangs aufgestellten Relationen betrachten wir hierin $\cos\gamma$ als x und R als y und erhalten nach Durchführung der Rechnungen

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\left(1-\frac{c^2}{a^2-s^2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)(1-(1+\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha^2)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)}} = C$$

Auch hier haben die γ geometrische Bedeutung. Errichtet man nämlich in den Schnittpunkten von Ellipse und Kreis Normalen zur grossen Achse, so geben ihre Schnittpunkte mit dem die Ellipse umschliessenden Kreise vom Radius a vier Punkte, deren Verbindungsgeraden ein Kreisviereseit liefern mit den durch sie gebildeten Winkeln $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Die Constante C der hyperelliptischen Integralfunction folgt aus der Bemerkung, dass die Function für alle R, also auch für

$$R = 0$$

gilt, wodurch die Wurzeln der Resolvente sich auf

$$\cos\gamma_{12} = \pm 1, \quad \cos\gamma_3 = \frac{2s^2 - a^2 - b^2}{c^2}$$

reduciren. Also ist hier

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 180^0, \quad \sin\tfrac{1}{2}\gamma_3{}^2 = \frac{a^2-s^2}{c^2} = \sin\tfrac{1}{2}\sigma^2$$

Die hyperelliptische Function hat also folgende Form

$$H\tfrac{1}{2}\gamma_1 + H\tfrac{1}{2}\gamma_2 + H\tfrac{1}{2}\gamma_3 = H\tfrac{1}{2}\pi + H\tfrac{1}{2}\sigma$$

Hierin ist, wie früher, $H\frac{1}{2}\pi$ das vollständige Integral.

Verallgemeinern wir auch hier wieder das geometrische Theorem in ein analytisches, indem wir einführen die Moduli

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{a^2} \quad \text{etc.}$$

so gelangen wir wieder zu demselben Satze, den wir als den ersten vorhin aufgestellt haben.

Nehmen wir ferner in derselben kubischen Resolvente α variabel, wonach also jetzt der geometrische Ort der Kreiscentra ein Kreis vom Halbmesser R ist, so führen die bekannten Reductionen auf die Function

$$\Sigma \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\cos\gamma^2 - (m+1)\cos\gamma + m + \frac{4R^2a^2}{c^4}\right)\times \left(\cos\gamma^2 - (m-1)\cos\gamma - m + \frac{4R^2b^2}{c^4}\right)}} = C$$

$$m = \frac{2(e^2 - R^2) - a^2 - b^2}{c^2}$$

deren Amplituden aus

$$\cos\gamma^3 - m\cos\gamma^2\left(\frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2) - 1\right)\cos\gamma + m + \frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2 - b^2\sin\alpha^2) = 0$$

folgen. Die Constante folgt aus der speciellen Lage des Kreises für $\alpha = 90^0$, es ist dann $\gamma_1 = 0$ und die andern Wurzeln folgen aus

$$\cos\gamma^2 - (m-1)\cos\gamma - m + \frac{4R^2 b^2}{c^4} = 0$$

und diese geben die Amplituden der Integralconstanten.

Ganz allgemein und von geometrischen Rücksichten frei kann man die Function in der Form schreiben

$$\Sigma\int \frac{d\gamma}{\sqrt{(\cos\gamma^2 - (m+1)\cos\gamma + m + g)(\cos\gamma^2 - (m-1)\cos\gamma - m + h)}}$$

$$\frac{4R^2 a^2}{c^4} = g, \quad \frac{4R^2 b^2}{c^4} = h$$

und die Elimination von $\sin\alpha^2$ aus den Wurzelformeln der Resolvente führt auf die Bedingungen

$$\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2 + \cos\gamma_3 = m$$

$$\cos\gamma_1\cos\gamma_2\cos\gamma_3(g-h) + (\cos\gamma_1\cos\gamma_2 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 + \cos\gamma_3\cos\gamma_1)(g+h) = 2gh - m(g-h) - (g+h)$$

Sind diese Bedingungen zwischen den 3 Amplituden γ erfüllt, so besteht die Function

$$H\gamma_1 + H\gamma_2 + H\gamma_3 = H\sigma_1 + H\sigma_2$$

während die Amplituden der Integralconstanten aus

$$\frac{\cos\sigma_1}{\cos\sigma_2} = \frac{m-1 \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4h}}{2}$$

folgen. Man kann übrigens statt $\cos\gamma$ auch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$ einführen, wonach z. B.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_1\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{a}{b}\cot\alpha$$

und ähnliche andere Ausdrücke sich ergeben.

Alle bisher abgeleiteten Functionen stellen in gewissem Sinne Additionstheoreme hyperelliptischer Integrale dar, deren Amplituden und Moduli geometrische Bedeutung besitzen. In bestimmten Fällen können übrigens auch elliptische Integrale auftreten, beispielsweise, wenn wir die Resolvente der Gleichung der Normalen der Ellipse den Entwickelungen zugrunde legen.

Von einem Punkte $R(\alpha)$ ziehen wir Normalen an die Ellipse und von den 4 Fusspunkten Parallelen zur kleinen Achse b; die Schnittpunkte dieser mit dem die Ellipse umschliessenden Kreise $(r = a)$ liefern durch ihre Verbindungsgeraden ein Kreisvierseit mit den Winkeln $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$, welche aus der Gleichung

$$\cos\gamma^3 + \left(\frac{R^2}{c^4}\,(a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2) - 1\right)\cos\gamma + \frac{R^2 ab}{c^4}\sin 2\alpha = 0$$

hervorgehen.

Vergl. die Abhandl.: Trigon. Aufl. biquadr. Gl. 1884.

Wir betrachten α als Veriabele und erhalten nach bekannten Principien

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma^4 - \left(1 - \frac{a^2+b^2}{c^4}\,R^2\right)\cos\gamma^2 + \frac{a^2 b^2\,R^4}{c^8}}} = C$$

welche auch unter dem Zeichen noch mit $\cos\gamma$ multiplicirt werden darf. Diese Function kann in eine elliptische reducirt werden. Die Constante lässt sich berechnen aus einer speciellen Lage von $R(\alpha)$ Für $\alpha = 90^0$ wird

$$\gamma_1 = 90^0 \quad \text{und} \quad \sin\gamma_2 \quad \text{und} \quad \sin\gamma_3 = \pm\frac{bR}{c^2}$$

welches die Amplituden der Constante sind. Die Reduction wollen wir hier indessen nicht durchführen, da dieselbe leicht ist, aber noch bemerken, dass die obige kubische Gleichung leicht mit der aus

$$\cos 3\gamma = 4\cos\gamma^3 - 3\cos\gamma$$

folgenden

$$\cos\gamma^3 - \tfrac{3}{4}\cos\gamma - \tfrac{1}{4}\cos 3\gamma = 0$$

identificirt werden kann, deren Resultat auf eine Trisection des Winkels mit Hülfe der Normalen der Ellipse führt, was wenigstens theoretischen Wert besitzt.

Das vermittelst der Kegelschnitte und des Kreises die Trisection ermöglicht ist, haben wir in der oben citirten Abhandlung bewiesen.

In Bezug auf die Normalen der Ellipse wollen wir hier eine Integralfunction ableiten, welche mit einem Integral der Centralbewegung auf Grund des Newton'schen Attractionsgesetzes in Verbindung steht.

In der Ebene eines Kegelschnitts ziehen wir von einem Punkte xy Normalen an denselben, und bezeichnen die entsprechenden Radienvectoren von einem Brennpunkt an die 4 Fusspunkte mit r. Der Brennpunkt ist zugleich der Coordinatenanfangspunkt. Für

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

findet man folgende Gleichung

$$r^4 - 4ar^3 + (pa + 5a^2 + (2-e^2)u)\,r^2$$
$$- 2(a^2p + a^3 + (2-e^2)(xe+2p)u)\,r + a^3p + (xe+2p)^2u = 0$$

$$u = \frac{ae^2 \cdot y^2}{p(1-e^2)^2}$$

Wir nehmen r und $xe+2p$ variabel an und suchen die entsprechende Function. Sie ist

$$\Sigma \int \frac{dr}{y(r-a)\sqrt{-r^2+2ar-a^2(1-e^2)}} = C$$

welche wir noch mit $r(r-a)$ multipliciren.

Demnach erhalten wir

$$\Sigma \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2+2ar-a^2(1-e^2)}} = Cy$$

Wir nehmen nun an, dass der Kegelschnitt von einem nach dem Newton'schen Gesetze afficirten Punkte beschrieben werde, welcher die 4 Normalenfusspunkte in den vom Perihel an gerechneten Zeiten $t_1 t_2 t_3 t_4$ passirt. Von diesen 4 Punkten wird einer in die eine, die drei andern in die andere Hälfte der Bahn fallen. Da nun das oben gefundene Integral die Zeit der Bewegung definirt, so existirt nach Feststellung der Vorzeichen und der Constanten für alle Normalen der Kegelschnitte der Centalbewegung die folgende Relation

$$-t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \tfrac{1}{2}T - \frac{2\sqrt{p}}{ke}\,y$$

worin T die Umlaufszeit bedeutet.

Es ist aber y oder $R\sin\alpha$ die Gleichung einer der grossen Achse parallelen Geraden; daher sagt die abgeleitete Formel, dass alle

Normalen, welche von Punkten einer der grossen Achse parallelen Geraden an die Planetenbahn gezogen werden können, in ihren Fusspunkten Bogen und damit entsprechende Zeiten begrenzen, deren algebraische Summe eine constante Grösse ist.

Wenn wir anstatt t_4 die Ergänzung zu $\frac{1}{2}T$ setzen, indem wir diese Zeit vom Aphel an rechnen, so erhalten wir die die einfachere Formel

$$t_1 - t_2 - t_3 + t_4 = \frac{2\sqrt{p}}{ke}\, y$$

Man bemerke, dass die Constante nur vom Parameter und der Exentricität abhängt und die Formel also für alle Gattungen der Kegelschnitte gültig ist. Indessen ist bei der Parabel nachzusehen, was aus t_4 wird, da der entsprechende Normalenfusspunkt in die Unendlichkeit fällt. Dass diese Zeit nicht gleich null gesetzt werden darf, dieselbe vielmehr einer bestimmten Grenze zustrebt, lässt sich so entwickeln: Die Normale bilde mit der grossen Achse den Winkel $\delta\omega$, und schneide mit letzterer auf der elliptisch-parabolischen Grenzcurve den Bogen $\delta\sigma$ ab, welchen wir mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{k}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

gleichförmig beschrieben denken. Alsdann ist

$$t_4 = \frac{\delta\sigma}{v_0}$$

Da ferner die Normale auf der Achse die Strecke

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p$$

abschneidet und

$$\varrho\,\delta\omega = \delta\sigma$$

ist, so folgt

$$t_4 = \varrho\,\frac{\delta\omega}{v_0} = p\,\frac{\delta\omega}{v_0}$$

Und indem wir noch berücksichtigen, dass

$$y = (ac(1+e) - x)\,\delta\omega$$

so folgt nach Einsetzen dieser Ausdrücke

$$t_4 = \sqrt{p}\,\frac{1+e}{k} - \frac{y}{e(1+e) - \frac{x}{a}}$$

d. i. indem wir $e = 1$ einführen

$$t_4 = \frac{\sqrt{p}}{k} y$$

und die Zeitrelation für die Normalen der Parabel, deren drei sind, reducirt sich auf

$$t_1 - t_2 - t_3 = \frac{\sqrt{p}}{k} y$$

Wir haben also auch für die Parabel den Satz, dass die algebraische Summe der Zeiten, welche zur Zurücklegung der durch die 3 Normalen begrenzten vom Perihel an gerechneten Bogen eine constante Grösse ist, wenn der geometrische Ort der Schnittpunkte der Normalen eine der grossen Achse parallele Gerade $R \sin \alpha$ ist.

Die Gleichung dieser Normalen in Bezug auf die wahre Anomalie v ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^3 + \left(1 + \frac{R}{q} \cos \alpha\right) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \frac{R}{q} \sin \alpha$$

Lassen wir $R \sin \alpha$ in die Directrix der Parabel fallen, so ist

$$R \cos \alpha = 2q$$

und die Gleichung wird

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^3 = \frac{y}{3q} = \frac{kt}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}$$

welche eine reelle Wurzel besitzt.

Man kann dieselbe benutzen, um aus der Anomalie eines eine Parabel beschreibenden Kometen die verflossene Zeit mittels einer durch den betreffenden Parabelpunkt gehenden Normalen zu finden. Die von letzterer auf der Directrix abgeschnittene Strecke

$$y = \frac{k}{\sqrt{p}} t$$

ist der Zeit der kometarischen Bewegung proportional. Die Lösung dieser speciellen Aufgabe, Zeit aus Ort, wird also durch die Parabel selbst vermittelt.

Ein Kreis schneide einen Kegelschnitt in 4 Punkten. Die Centrale beider sei $\frac{1}{2}R$, ihr Winkel gegen a gleich α, der Halbmesser sei gleich s, die Winkel, welche die 4 Halbmesser des Kreises nach den Schnittpunkten mit der Centrale bilden, seien $\vartheta_1 \vartheta_2$ etc. Alsdann hat man als Gleichung derselben

$$((R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4-2c^2s(R+s)\sin 2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3$$
$$+2((R^2-s^2)(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2$$
$$-2c^2s(R-s)\sin 2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+(R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2=0$$

In dieser nehmen wir $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta$ und R variabel und verfahren wie früher. Man findet schliesslch

$$\Sigma\int\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta^2 d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2}\sin\vartheta^2}}=C$$

Und da man noch mit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta^2 d\frac{1}{2}\vartheta$ multipliciren darf

$$\Sigma\int\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta^2 d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2}\sin\vartheta^2}}=C$$

mithin auch

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2}\sin\vartheta^2}}=C$$

Nennen wir r den Ellipsenradius, in dessen Richtung R liegt, so ist auch

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{rs}{ab}\right)^2\sin\vartheta^2}}=C$$

Sieht man s als den zu r conjugirten Halbmesser an, welche den Conjugationswinkel ω mit ihm bildet, wonach also

$$rs\sin\omega=ab$$

ist, so folgf auch noch

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\sin\omega^2\sin\vartheta^2}}=C$$

Durch Substitution der beiden ersten Integrale erhält man noch

$$\Sigma\int\frac{d\sin\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{rs}{ab}\right)^2\sin\vartheta^2}}=C$$

deren Integration ergiebt

$$\arcsin\left(\frac{r\,s}{a\,b}\sin\vartheta_1\right)+\arcsin\left(\frac{r\,s}{a\,b}\sin\vartheta_2\right)+\arcsin\left(\frac{r\,s}{a\,b}\sin\vartheta_3\right)$$
$$+\arcsin\left(\frac{r\,s}{a\,b}\sin\vartheta_4\right)=C$$

und hiermit verbindet sich noch die allgemein gültige Relation

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4=360^0-4\varphi$$

Betrachten wir dagegen den Radius des Kreises in Beziehung auf den Wurzelwert als variabel, so findet man

$$\Sigma\int\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{a^2+b^2-R^2+c^2\sin 2\alpha\,.\sin 2\vartheta+(R^2-c^2\cos 2\alpha)\cos 2\vartheta}}=C$$

multiplicirt man diese Function mit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta^2$ und addirt sie zur vorstehenden, so folgt

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\frac{a^2+b^2-R^2}{R^4-2c^2R^2\cos 2\alpha+c^4}+\cos 2(\vartheta-\varepsilon)}}$$

wenn wir einführen

$$\operatorname{tg}2\varepsilon=\frac{c^2\sin 2\alpha}{R^2-c^2\cos 2\alpha}$$

Diese Ausdrücke haben geometrische Bedeutung. Ziehen wir nämlich vom Mittelpunkt des Kreises nach den Brennpunkten des Kegelschnittes zwei Strahlen, welche einen Winkel β einschliessen, so lässt sich die folgende Formel leicht erweisen

$$\cos\beta=-\frac{a^2+b^2-R^2}{\sqrt{R^4-2c^2R^2\cos 2\alpha+c^4}}$$

und die Function nimmt die Form an

$$\Sigma\int\frac{d(\vartheta-\varepsilon)}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\beta^2-\sin(\vartheta-\varepsilon)^2}}=C$$

In dem genannten Dreieck. dessen Grundlinie $=2c$, dessen Mittellinie R ist, seien die durch letztere geteilten Winkel des Winkels β gleich γ und γ_1, dann besteht die Formel

$$\operatorname{tg}(\gamma-\gamma_1)=\frac{c^2\sin 2\alpha}{R^2-c^2\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\varepsilon,\quad \varepsilon=\frac{\gamma-\gamma_1}{2}$$

so dass auch ε geometrisch bekannt ist.

Wir betrachten endlich noch folgenden Fall:

Es sei der Mittelpunkt des Kreises vom Radius s um die Strecke R von einem Brennpunkt eines Kegelschnitts entfernt. Der Winkel, den R mit der X-Achse einschliesst, sei α. Die Schnittpunkte beider Curven verbinde man mit dem Kreiscentrum durch Radien, welche mit der verlängerten R die Winkel ϑ etc. einschliessen mögen. Aus den beiden Relationen

$$R\sin\alpha + s\sin(\vartheta+\alpha) = \frac{p\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}$$

$$R\cos\alpha + s\cos(\vartheta+\alpha) = \frac{p\cos\varphi}{1-e\cos\varphi}$$

folgt nach Elimination von φ die Gleichung

$$\begin{aligned}
&(R^2+s^2-p^2-e^2R^2\cos\alpha^2-2peR\cos\alpha-e^2s^2\cos\alpha^2+2Rse^2\cos\alpha^2,\\
&\quad+2pes\cos\alpha-2Rs)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4\\
&\quad+(4Rse^2\sin\alpha\cos\alpha+4pes\sin\alpha-4e^2s^2\sin\alpha\cos\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3\\
&\quad+(2R^2+2s^2-2p^2-2e^2R^2\cos\alpha^2-4peR\cos\alpha-e^2s^2\\
&\quad+3e^2s^2\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2\\
&\quad+(4Rse^2\sin\alpha\cos\alpha+4pes\sin\alpha+4e^2s^2\sin\alpha\cos\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta\\
&\quad+R^2+s^2-p^2-e^2R^2\cos\alpha^2-2peR\cos\alpha-e^2s^2\cos\alpha^2\\
&\quad-2Rse^2\cos\alpha^2-2pes\cos\alpha+2Rs=0
\end{aligned}$$

In Bezug auf $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta$ sehen wir R als variabel an, und erhalten nach den anfangs aufgestellten Regeln

$$\Sigma\int\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4-8(1-e^2)\sin\vartheta^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha.\sin\vartheta+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

$$\Sigma\int\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta^2\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4-8(1-e^2)\sin\vartheta^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha.\sin\vartheta+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4-8(1-e^2)\sin\vartheta^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha\sin\vartheta+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

und aus den beiden ersten durch Subtraction für $\sin\vartheta=x$

$$\Sigma\int\frac{dx}{\sqrt{x^4-8(1-e^2)x^2-16\frac{pe}{s}\sin\alpha.x+8\frac{p^2}{s^2}}}=C$$

Die Summe dieser Integrale ist constant für alle Kreise von constantem Radius, deren Centra auf einer gegen die Achse mit dem Winkel α geneigten Geraden liegen. Die drei ersten Functionen sind hyperelliptisch, die 4. elliptisch. Man kann also speciell der letztern in der Form

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 - Ax^2 - Bx + C}}$$

eine geometrische Bedeutung abgewinnen, wenn man aus den Constanten $A\,B\,C$ die Werte $\frac{p}{s}$, e, $\sin\alpha$ entwickelt und $x = \sin\vartheta$ setzt. Sehr einfach wird sie für die Parabel, da dann die Functionen

$$\Sigma \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta^4 - 16\frac{p}{s}\sin\alpha.\sin\vartheta + 8\frac{p^2}{s^2}}} = C$$

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 16\frac{p}{s}\sin\alpha.x + 8\frac{p^2}{s^2}}} = C$$

auftreten.

Wenn wir die ϑ so wählen, dass sie 2 rechte Winkel nicht überschreiten, so müssen die Amplituden noch der Bedingung

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 - \vartheta_4 = 4\alpha$$

genügen.

In gleicher Weise erhält man für s als Variabele die hyperelliptische Function

$$\Sigma \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{A\sin\vartheta^4 + B\sin\vartheta^3 + C\sin\vartheta^2 + D\sin\vartheta + 1}} = C$$

$$A = \frac{1}{16}\left(\frac{R}{p}(1 - e^2\cos\alpha^2) - e\cos\alpha\right)^2 - \frac{1}{16}$$

$$B = \tfrac{1}{2}\frac{Re}{p}\sin\alpha\left(2 - 2e^2\cos\alpha + \frac{Re}{p}\cos\alpha\right)$$

$$C = \frac{R}{p}\left(2e\cos\alpha - \frac{R}{p}(1 - e^2)\right)$$

$$D = 2\frac{eR}{p}\sin\alpha$$

und analog wie vorhin für $\sin\vartheta = x$

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+1}} = C$$

und die Amplitudenrelation

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4 = 4\alpha$$

gilt auch hier. Die obigen Functionen gelten für alle Kegelschnitte und Kreise mit hinsichtlich der letzteren festem Mittelpunkt und beliebigem Radius.

Die merkwürdigste und schönste Integration liefert uns die Cassinische Linie in Verbindung mit einem sie in vier Punkten schneidenden Kreise. Das Kreiscentrum habe wieder die Polarcoordinaten $R(\alpha)$. Wir ziehen von den beiden Brennpunkten nach den 4 Schnittpunkten Strahlen, welche die Winkel Θ bilden, und entwickeln die für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta$ geltende Gleichung, indem wir die Curvengleichung

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\varphi + c^4 = r^4$$

zugrunde legen. Nach einigen Entwickelungen folgt

$$\left((1-\beta)^2 - 4\frac{R^2}{q^2}\left(\frac{c^2}{q^2}-1\right)\cos\alpha^2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^4 - 4\frac{R}{c}(\beta-1)\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3$$
$$+\left(2\beta^2-2+4\frac{R^2}{c^2}-\frac{8c^2}{q^4}R^2\cos\alpha^2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2 - 4\frac{R}{c}(\beta+1)\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta$$
$$+(1+\beta)^2 - 4\frac{R^2}{q^2}\left(\frac{c^2}{q^2}+1\right)\cos\alpha^2 = 0$$

Hierin nehmen wir den Radius s oder β d. i.

$$\beta = \frac{R^2+c^2-s^2}{q^2}$$

variabel und verfahren wie früher. Nach einigen Reductionen erhalten wir die für alle concentrischen Kreise gültige Formel

$$\Sigma \int_{-\frac{4R}{c}\cos\alpha} \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 d\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\sin\frac{1}{2}\Theta^2\right)\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\frac{1}{2}\Theta^2\right)}} = C$$

$$\Sigma \int_{\frac{4R}{c}\cos\alpha} \frac{\sin\frac{1}{2}\Theta^2 d\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\sin\frac{1}{2}\Theta^2\right)\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\frac{1}{2}\Theta^2\right)}} = C$$

$$\Sigma \int_{\frac{4R}{c}\cos\alpha}^{} \frac{d\tfrac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\right)\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2\right)}} = C$$

Diese Functionen sind dadurch ausgezeichnet, dass sie weder s noch R noch α enthalten, also ganz unabhängig sind von der Lage oder Grösse des Kreises, welcher auch in eine Gerade übergehen kann.

Die Constanten oder die Moduli der Function sind nur abhängig von den die Curve constituirenden Grössen c und q.

Die Integralfunction hat demnach einigen Wert für die Theorie der elliptischen Functionen und zwar um so mehr, als man dieselbe noch auf solche der ersten Art mit einer Amplitude reduciren kann, die ebenfalls eine geometrische Bedeutung hat. Der Focalwinkel Θ zwischen zwei Brennstrahlen der Cassinischen Curve steht nämlich mit dem von den zwei Scheitelstrahlen gebildeten Winkel γ in folgender Verbindung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{c^2+q^2}{c}}$$

Diese Scheitelwinkel sind die Winkel, welche die von den Endpunkten der grossen Achse nach einem beliebigen Punkte der Curve gezogenen Geraden mit einander einschliessen. Im folgenden nehmen wir stets den spitzen Nebenwinkel von γ. Die Ableitung dieser Formel kann vermittelst

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{2ra\sin\varphi}{r^2-a^2}, \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{2rc\sin\varphi}{r^2-c^2}$$

$$r^2 = c^2+q^2\cos\Theta \quad \text{etc.}$$

geschehen. Unter Benutzung der obigen Relation geht nun die Integralfunction über in

$$\int \frac{d\gamma_1}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_1{}^2}} + \int \frac{d\gamma_2}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_2{}^2}} + \int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_3{}^2}} + \int \frac{d\gamma_4}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_4{}^2}} = 0$$

welche also für alle Kreise oder Gerade in beliebiger Lage in Be-

ziehung auf die Cassinischen Linien gültig ist und sich durch Eleganz und Einfachheit auszeichnet.

Aus der allgemeinen Formel

$$\Sigma \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 d\gamma}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma^2}}$$

geht noch die folgende

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\gamma^2\right)\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma^2}} = C$$

also ein elliptisches Integral dritter Art hervor.

Die Einfachheit des Modulus dieser Integrale führt auf den Gedanken, denselben aus den Constanten der obigen Gleichung für

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta = \sqrt{1+\frac{q^2}{c^2}}\cot\gamma$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3 + B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2 - C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta + D = 0$$

zu entwickeln. Setzt man

$$\frac{c^2}{q^2} = x$$

so folgt nach einigen Rechnungen der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&x(A^2B-2AC)(x(1-D)+1+D)^2\\
&+(C^2-A^2D)(x(1-D)+1+D)(x^2(2-B)+Bx)\\
&=\frac{x}{4}(A^2(x(1-D)+1+D)-(C^2-A^2D)(x-1))^2\\
&+(C^2-A^2D)(x(1-D)+1+D)
\end{aligned}$$

also für x eine kubische Gleichung, deren Wurzeln drei verschiedene Werte von $\frac{c^2}{q^2}$ oder der Elemente der Cassinischen Linie repräsentiren. Bedingung ist nur, dass die Werte Θ der Curve den Wurzeln der Gleichung genügen.

Die Integralfunction der Cassinischen Linie

$$\Sigma \int \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma^2}} = C$$

ist sehr merkwürdig, weshalb wir noch etwas bei ihr verweilen wollen. Die Constante ist entweder = null oder = $2K$. Wir wollen für die getrennten Ovalen der Curve die verschiedenen Formen der Functionen aufführen.

Legen wir durch diese Ovalen einen beliebigen Kreis oder eine Gerade und zwar durch die obern Hälften der Curven, so ist die Function

$$F_1 + F_2 = F_3 + F_4$$

wonach also γ_1 und γ_2 in der einen, γ_3, γ_4 in der anderen Hälfte liegen.

Geht nun der Kreis oder die Gerade durch einen äussern Scheitelpunkt, für welchen also

$$\gamma_4 = 90^0$$

so ist

$$F_1 + F_2 = F_3$$

Wandert nun der 4. Schnittpunkt von Kreis und Curve in die untere linke Hälfte der letztern, so ändert das entsprechende Integral sein Vorzeichen, und man hat

$$F_1 + F_2 = F_3 - F_4$$

Rückt der 3. Schnittpunkt in den innern Scheitelpunkt, so ist wegen $\gamma_3 = 0$

$$F_1 + F_2 = K - F_4 \quad \text{oder} \quad F_1 + F_2 + F_4 = K$$

Wandert auch der 3 Schnittpunkt in die untere linke Hälfte, so wird

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 2K$$

Berührt der Kreis oder die Gerade die linke Ovale, so ist

$$F_1 + F_2 + 2F_3 = 2K$$

Berührt er auch die rechte, so folgt

$$F_1 + F_3 = K$$

Für eine tangirende Gerade lässt sich dies leicht bewahrheiten Man hat nämlich für diesen Grenzfall

$$\sin 2\varphi = \frac{q^2}{c^2}, \quad r^4 = c^4 - q^4, \quad \cos\Theta = -\frac{2c^2}{q^2}\sin\varphi^2$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2 = \sqrt{\frac{c^2+q^2}{c^2-q^2}}$$

also

$$\operatorname{tg}\gamma^2 = \sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}} = \sqrt{1-k^2} = k'$$

Die Bedingung für

$$2F_1 = K$$

oder

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\cos\gamma^2}} = \frac{K}{2}$$

ist aber

$$\operatorname{cotg}\gamma^2 = \frac{1}{k'}$$

welche mit der abgeleiteten übereinstimmt. Die obigen Relationen geben Lösungen von Additionsproblemen elliptischer Integrale der ersten Art

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

wenn man aus

$$k = \frac{q^2}{c^2}$$

die ensprechende Cassinische Curve construirt und die

$$\gamma = 90^0 - \varphi$$

als spitze Scheitelwinkel darin einträgt. Tut man dies für die drei Argumente $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$, und legt einen Kreis durch diese Punkte, so entspricht der 4. Kreispunkt in seinem Winkel

$$\gamma_4 = 90^0 - \varphi_4$$

der gesuchten Amplitude für diejenige Function, welche unter den angeführten enthalten ist, unter welchen also die Relation

$$F_1 + F_2 = F_3$$

nur ein specieller Fall ist.

Ist k^2 grösser als die Einheit, so tritt eine geschlossene Cassinische Curve mit Grenzbedingungen

$$\cos\gamma_0 = \frac{c^2}{q^2}$$

auf, während die Relationen im wesentlichen die entwickelten sind.

An sie knüpfen sich eine zahlreiche Menge von Formeln zwischen den Amplituden unter den Beziehungen von

$$\cos\varphi, \sin\varphi, \sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}$$

wie

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta\sigma = \cos\varphi_3\cos\varphi_4 - \sin\varphi_3\sin\varphi_4\,\Delta\sigma$$

$$\cot\sigma = \frac{\cot\gamma_1\,\Delta\gamma_2 + \cot\gamma_2\,\Delta\gamma_1}{1-\cot\gamma_1\cot\gamma_2\,\Delta\gamma_1\,\Delta\gamma_2} = \frac{\cot\gamma_3\,\Delta\gamma_4 + \cot\gamma_4\,\Delta\gamma_3}{1-\cot\gamma_3\cot\gamma_4\,\Delta\gamma_3\,\Delta\gamma_4}$$

u. a. m.

Man bemerke noch, dass in der Relation

$$F_1 + F_2 = F_3 - F_4$$

für $F_1 = F_2 = F_4$ hervorgeht

$$F_3 = 3F_1$$

was eintritt, wenn der Kreis die erste Ovale in einem Punkte γ_1 berührt, und die andere in einem ähnlich liegenden Punkte schneidet. Die gesuchte γ_3 gehört dem 4. Schnittpunkte an.

Die Cassinische Linie, hat also, wie wir bewiesen, für die elliptischen Integrale dieselbe Bedeutung, wie die Kegelschnitte.

II.

Die folgenden Entwickelungen werden im Anschluss an die „Transformationen der ellipt. Integrale u. Funct etc." eine Reihe hyperelliptischer Integrale aufstellen, welche auf elliptische reducirbar sind.

Am a. O. haben wir auf S. 171 eine Kettenlinie zugrunde gelegt in der Form

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und haben für x, y, s vermittelst

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{s}{y\sqrt{k'}}$$

folgende Reihen abgeleitet

$$\tfrac{1}{8}x = \frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \tfrac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} \cdots$$

$$y = \frac{E}{k'K} - \frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K} \cdots\right)$$

$$s = \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{5q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right)$$

deren Argument u das Integral

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1+k'^2-2k'y)}}$$

ist. Eine weitere Entwickelung für hyperelliptische Integrale lässt sich und zwar für den 5. Grad auf Grund der Formeln

$$y_3 = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}, \qquad s_3 = \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$$

$$u_3 = \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3{}^2}}, \qquad \sin\varphi_3 = \frac{s_3}{y_3-k'}$$

anbahnen. Man hat zunächst

$$y_3+s_3 = e^{3x}, \qquad y_3-z_3 = e^{-3x}$$

$$e^x = \sqrt[3]{y_3+s_3}, \qquad e^{-x} = \sqrt[3]{y_3-s_3}$$

und weil

$$s_3 = \sqrt{y_3{}^2-1}$$

so folgt weiter

$$e^x = \sqrt[3]{y_3+\sqrt{y_3{}^2-1}}$$

und

$$e^{-x} = \sqrt[3]{y_3-\sqrt{y_3{}^2-1}}$$

Aus beiden folgt durch Addition

$$y = \frac{\sqrt[3]{y_3+\sqrt{y_3{}^2-1}} + \sqrt[3]{y_3-\sqrt{y_3{}^2-1}}}{2}$$

welches die reelle Wurzel der Gleichung

$$y^3 - \tfrac{3}{4}y - \tfrac{1}{4}y_3 = 0 \text{ ist.}$$

Bez. d. Aufl. d. kubischen u. höheren Gleichungen durch die Kettenlinie sehe man a. a. O. S. 262 nach.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$y_3 = 4y^3 - 3y$$
$$dy_3 = 3(4y^2-1)\,dy$$

Führen wir diese Ausdrücke in

$$u_3 = \frac{dy_3}{\sqrt{(y_3^2-1)(1+k'^2-2k'y_3)}}$$

ein, so erhalten wir das hyperelliptiche Integral

$$u_3 = \int \frac{3\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{1+k'^2}{2k'}+3y-4y^3\right)}} = \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2}}$$

Die Variabele y dieser Art von hyperelliptischen Integralen und der dieser Form analogen kann man also als die Ordinate einer Kettenlinie

$$y = \frac{e^{+x}+e^{-x}}{2}$$

betrachten, deren entsprechendes x zugleich mit $3x = x_3$ auch y_3 und damit s_3 bestimmt, womit dann auch die entsprechende Amplitude φ_3 des elliptischen Integrals desselben Arguments vermittelst

$$\sin\varphi_3 = \frac{s_3}{y_3-k'}$$

erhalten wird.

Verfährt man in ähnlicher Weise für

$$y_5 = \frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2}, \quad s_5 = \frac{e^{5x}-e^{-5x}}{2}$$

so ergiebt sich das hyperelliptische Integral

$$u = \int \frac{5\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{1+k'^2}{2k'}-5y+20y^3-16y^5\right)}} = \int \frac{d\varphi_5}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_5^2}}$$

für welche dieselbe Construction von

$$5x = x_5$$

etc. wie vorher durchzuführen ist.

Demnach ist allgemein das hyperelliptische Integral

$$u_n = \int \frac{n\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{1+k'^2}{2k'}+\left(ny-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}y^3+\right.\right.}$$
$$\left.\left.+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}y^5-\ldots\right)(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\right)}$$

auf das elliptische

$$u_n = \int \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi_n^2}}$$

zurückzuführen, wenn n eine ungerade Zahl ist, denn die gesuchte Amplitude φ_n ergiebt sich durche eine leichte Construction aus

$$\sin \varphi_n = \frac{s_n}{y_n - k'}$$

und y_n und s_n sind bekannt durch

$$x_n = nx$$

weil durch die bekannte Variabele y des Integrals auch x und demnach auch das übrige bekannt ist. Vermöge der Eigenschaften der Kettenlinie ist der letzte Ausdruck leicht geometrisch zu deuten. Vergl. a. a. O. S. 173.

Vermöge

$$y = \frac{\sqrt[n]{y_n + s_n} + \sqrt[n]{y_n - s_n}}{2}$$

hat man unter Benutzung der angeführten Reihen

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{E}{k'K} + \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u_n}{2K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u_n}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u_n}{2K} + \ldots\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{E}{k'K} - \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u_n}{2K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u_n}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u_n}{2K} - \ldots\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

wodurch die Umkehrung des hyperelliptischen Integrals bewerkstelligt ist.

Man kann auch zur Darstellung von y sich der Formeln auf S. 174 und 185 ibid. bedienen und demnach

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1 + 2q\sin\frac{\pi u_n}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K} + \ldots}{1 - 2q\sin\frac{\pi u_n}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K} + 2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K} + \ldots}\right)^{\frac{2}{n}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-2q\sin\frac{\pi u_n}{2K}-2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K}+2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K}+\ldots}{1+2q\sin\frac{\pi u_n}{2K}-2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{2K}-2q^9\sin\frac{3\pi u_n}{2K}+\ldots}\right)^{\frac{2}{n}}$$

benutzen. Führt man die elliptische Transcendente

$$\Theta = 1-2q\cos\frac{\pi u_n}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u_n}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u_n}{K}+\ldots$$

ein, so ist auch noch vermittelst dieser Thetafunction

$$y=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Theta\left(\frac{K}{2}-u_n\right)}{\Theta\left(\frac{K}{2}+u_n\right)}\right)^{\frac{2}{n}}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Theta\left(\frac{K}{2}+u_n\right)}{\Theta\left(\frac{K}{2}-u_n\right)}\right)^{\frac{2}{n}}$$

Ferner sei

$$y_2=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2},\qquad s_2=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$

dann ist

$$y_2=2y^2-1=2s^2+1$$

und

$$u_2=\int\frac{2\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{(1+k')^2}{2k'}-2y^2\right)}}=\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_2{}^2}}$$

$$y=\frac{E}{Kk'}-\frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u_2}{K}-\frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u_2}{K}+\ldots\right)$$

oder man hat

$$u_2=\int\frac{2\,ds}{\sqrt{2k'(s^2+1)\left(\frac{(1-k')^2}{2k'}-2s^2\right)}}$$

$$s^2=\frac{2\pi^2}{K^2k'}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u_2}{2K}-\frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u_2}{2K}+\ldots\right)$$

Führen wir hierin

$$s=\operatorname{tg}\delta$$

wo δ der Winkel der Tangente am Punkte xy der Kettenlinie ist, ein, so folgt

$$u_2=\int\frac{2\,d\delta}{(1+k')\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2-\sin\delta^2}}$$

welches Integral man mit dem bekannten der Pendelbewegung in Beziehung setzen kann, wenn der Ausschlagwinkel α durch

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-k'}{1+k'}$$

bestimmt wird. Der Elongationswinkel ϑ ist dann gegeben durch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{2\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi t}{2T} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi t}{2T} + \ldots\right)$$

$$k' = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{4}\beta^2, \quad \alpha+\beta = 180^0$$

Eine weitere Transformation der durch die Kettenlinie vermittelten Integrale führt für gerade n auf

$$u_4 = \int \frac{4\,dy}{\sqrt{2k'(y^2-1)\left(\frac{(1-k')^2}{2k'} + 8y^2 - 8y^4\right)}}$$

$$u_4 = \int \frac{4\,ds}{\sqrt{2k'(s^2+1)\left(\frac{(1-k')^2}{2k'} - 8s^2 - 8s^4\right)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Auf S. 191 der „Transformationen" haben wir die Formel entwickelt

$$\frac{e^{\frac{1}{4}ix}-1}{e^{\frac{1}{4}ix}+1} = \frac{2q\,\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K} \cdots}{1 - 2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K}}$$

Dafür können wir schreiben

$$\frac{e^{\frac{1}{4}ix}-e^{-\frac{1}{4}ix}}{e^{\frac{1}{4}ix}+e^{-\frac{1}{4}ix}} = \frac{s_{\frac{1}{4}}}{y_{\frac{1}{4}}}$$

wo $s_{\frac{1}{4}}$, $y_{\frac{1}{4}}$ wie x Coordinaten der Kettenlinie sind, und zwar ist

$$y_{\frac{1}{4}} = \frac{e^{\frac{1}{4}ix}+e^{-\frac{1}{4}ix}}{2}, \qquad s_{\frac{1}{4}i} = \frac{e^{\frac{1}{4}ix}-e^{-\frac{1}{4}ix}}{2}$$

also ist wegen

$$y_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\cos\delta_{\frac{1}{4}}}, \quad s_{\frac{1}{4}} = \operatorname{tg}\delta_{\frac{1}{4}}$$

auch

$$\frac{s_{\frac{1}{4}}}{y_{\frac{1}{4}}} = \sin\delta_{\frac{1}{4}} = \frac{e^{\frac{1}{4}ix}-1}{e^{\frac{1}{4}ix}+1}$$

Der obige Quotient der Jacobi'schen Transcendenten ist damit geometrisch definirt und zwar durch den Tangentenwinkel δ_1 des Punktes $x_1 y_1$, wofür

$$x = 4x_1^3$$

gilt. Erhebt man entsprechende Coordinaten zur 4 Potenz, so resultirt

$$y = 8y_1^4 - 8y_1^2 + 1$$

Es ist aber das Argument u mit y durch die Definition

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1+k'^2-2k'y)}}$$

verknüpft. Führen wir hierin anstatt y seinen obigen Wert

$$y = \frac{8}{\cos\delta_1^4} - \frac{8}{\cos\delta_1^2} + 1$$

ein und setzen

$$\sin\delta_1 = z$$

so erhält man

$$u = \int_{(1-k')} \frac{4dz}{\sqrt{\left(\left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)^2 - z^2\right)\left(\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2 - z^2\right)}}$$

$$z = \frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \ldots}{1 - 2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots}$$

Indem wir hierin einführen

$$\sin\psi = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\sin\delta_1$$

wird

$$u = \frac{4}{(1+\sqrt{k'})^2}\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^4\sin\psi^2}}$$

und die Umkehrung dieses Integrals

$$\sin\psi = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\,\frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K}}{1 - 2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K}}$$

Wir haben ferner auf S. 191 die Formel

$$\frac{1+\sqrt{k}\sin\varphi}{1-\sqrt{k}\sin\varphi} = e^{A}\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

aufgestellt, welche wir noch zu einigen Transformationen benutzen wollen.

Wir setzen

$$x = \frac{4\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{4}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots$$

als Abscisse einer Kettenlinie fest, und führen ein

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad s = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{tg}\delta$$

und es ist

$$y = \frac{1+k\sin\varphi^2}{1-k\sin\varphi^2}, \qquad s = \frac{2\sqrt{k}\sin\varphi}{1-k\sin\varphi^2}$$

also

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{k}\sin\varphi$$

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

Wir haben nun nachgewiesen, dass für diejenigen Coordinaten, welchen

$$x_n = nx$$

entspricht, also für

$$y_n = \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}, \qquad s_n = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2}$$

in Bezug auf die entsprechenden Tangentenwinkel δ und δ_n, deren Complemente E und E_n seien, die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_n = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E^n$$

besteht. E ist also hier der Winkel zwischen Tangente und Y-Achse. Demnach ist auch

$$\operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta_n) = \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{3}{2}\delta)^n$$

also wegen

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{k}\sin\varphi$$

$$\frac{1-\sqrt{k}\sin\varphi_n}{1+\sqrt{k}\sin\varphi_n} = \left(\frac{1-\sqrt{k}\sin\varphi}{1+\sqrt{k}\sin\varphi}\right)^n$$

Diese Ausdrücke können aber in die zu Grunde gelegte Formel eingeführt werden, und man hat also für die beiden Integrale

$$u = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}, \quad u_n = \int \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi_n{}^2}}$$

die Relation

$$\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt[4]{q}}\sin\frac{\pi u_n}{2K} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt[4]{q^3}}\sin\frac{3\pi u_n}{2K}$$
$$= n\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt[4]{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt[4]{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Beispielsweise würde für $n = 3$ zu setzen sein

$$\varphi_n = \varphi_3$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{3\sin\varphi + k\sin\varphi^3}{1+3k\sin\varphi^2}$$

Allgemein ist für φ_n

$$k\sin\varphi_n{}^2 = \frac{y_n - 1}{y_n + 1}, \qquad y = \frac{1+k\sin\varphi^2}{1-k\sin\varphi^2}$$

$$y^n = 2^{n+1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(ny - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}y^5 \ldots\right)$$

wenn n ungerade, und

$$y_n = 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\left(1 - \frac{n^2}{2}y^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}y^4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}y^6\right)$$

wenn n gerade ist.

Hierdurch erhält man allgemein $\sin\varphi_n$ durch $\sin\varphi$ ausgedrückt, und man hat für diese Amplituden und Integrale die obige Relation zwischen den betreffenden Argumenten u und u_n.

III.

Ein bemerkenswerter Fall der Transformationen ist der, dass sich aus ihnen eine Reihe von Functionalgleichungen dritten, vierten und höheren Grades entwickeln lassen, von welchen wir eine schon mitgeteilt haben. Es sind Gleichungen, deren Absolutglied eine Reihe nach Art der elliptischen Functionen ist, und deren eine Wurzel sich ebenfalls durch eine solche darstellen lässt.

Auf Seite 179 der „Transformationen“ haben wir für

$$y = \frac{1+k'\Delta}{k'+\Delta}, \qquad u = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$$

die Gleichung

$$y^3 - \frac{1+k'^2}{2k'}y^2 + \frac{\pi^6}{2k'^3K^6}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)^2 = 0$$

gefunden, deren eine Wurzel

$$y = \frac{E}{k'K} - \frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\cdots\right)$$

oder auch (a. a. O. S. 175)

$$y = \frac{(1-k')^2}{4k'} + \frac{(1+k')^2}{4k'}\cos 8\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

ist.

Wir führen ein

$$y = \frac{1+k'^2}{2k'} - x^2$$

also

$$x = \frac{k}{\sqrt{2k'}}\sqrt{\frac{\Delta - k'}{\Delta + k'}}$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$x^3 - \frac{1+k'^2}{2k'}x + \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right) = 0$$

welche zu den irreducibeln gehört. Und eine Wurzel ist

$$x = \frac{1+k'}{\sqrt{2k'}}\sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\right)$$

Diese merkwürdige Reihe stellt also einen Wurzelwert der reducirten Gleichungen 3. Grades mit 3 reellen Wurzeln dar. Man kann sie als eine indirecte Lösung der Gleichung

$$x^3 - Ax + B = 0$$

betrachten, deren Coefficient

$$A = \frac{1+k'^2}{2k'}$$

den Modul

$$k' = A - \sqrt{A^2 - 1}$$

ergiebt.

Würde also aus dem Absolutglied

$$B = \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}\,K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right)$$

umgekehrt der Wert von $\cos\frac{\pi u}{2K}$ sich ermitteln lassen, so wäre damit die Wurzel x gemäss der obigen Reihe bekannt. Infolge von

$$x = \frac{k}{\sqrt{2k'}}\sqrt{\frac{\Delta - k'}{\Delta + k'}}$$

können wir eine S. 157 gegebene Reihe benutzen, und man hat

$$x = \frac{4\pi}{\sqrt{2k'}\,K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

wonach wir also für die Unbekannte zwei Reihen zur Verfügung haben. Führen wir noch den bekannten trigonometrischen Winkel E ein, so ist noch

$$\cos(60^0 + E) = \frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{3}{1+k'^2}}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2(1+k'^2)}{3k'}}\cos E, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2(1+k'^2)}{3k'}}\cos(60^0 - E)$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{2(1+k'^2)}{3k'}}\cos(60^0 + E)$$

Im Anschluss hieran, wollen wir noch die Discriminante D der kubischen Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

durch eine Reihe darstellen. Führen wir ein

$$\operatorname{tg}\tau = 3x^2 - 2ax + b$$

und eliminiren aus beiden x, so folgt

$$\operatorname{tg}\tau^2 - (a^2 - 3b)\operatorname{tg}\tau^2 - D = 0$$

Identificiren wir diese mit der obigen Gleichung für y, indem wir setzen

$$\operatorname{tg}\tau = y$$

und

$$a^2 - 3b = \frac{1+k'^2}{2k'}$$

so wird

$$D = -\frac{x^6}{2k'^3K^6}\left(\frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right)$$

und es ist

$$3x^2 + 2ax + b = \frac{E}{k'K} - \frac{4\pi^2}{k'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Andererseits kann man auch

$$u_1 = x_2 - x_3, \quad u_2 = x_3 - x_1, \quad u_3 = x_1 - x_2$$

einführen als Wurzel von

$$u^3 - (a^2 - 3b)u + \sqrt{-D} = 0$$

und es folgt

$$u = \frac{1+k'}{\sqrt{2k'}}\sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{1}{3}\frac{q^2}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right)$$

$$(z_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right)$$

Die bisher entwickelten Formeln und Reihen enthielten den Cosinus. Man sieht aber auch, dass dieselben sich durch Sinusfunctionen ersetzen lassen unter Benutzung der Relation

$$\Delta\operatorname{am}(K-u) = \frac{k'}{\Delta\operatorname{am} u}$$

So hat man also auch für

$$z^3 - \frac{1+k'^2}{2k'}z + \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right) = 0$$

$$z = \frac{1+k'}{\sqrt{2k'}}\sin\left(\frac{4q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right)$$

und dem entsprechend die übrigen

$$z = \frac{4\pi}{kK}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right), \quad \text{etc.}$$

Man kann ferner solche Gleichungen für den 4. und 5. Grad ableiten, wenn wir in

$$u = \int\frac{d\varphi}{\Delta} \quad \text{für} \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y-k'}$$

welcher Wert aus

$$y = \frac{1 + k'\Delta}{k' + \Delta}$$

folgt, die Abscisse y der Kettenlinie einführen, man hat

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 + k'^2 - 2k'y)(y^2 - 1)}}, \quad \frac{1 + k'^2}{2k'} = A$$

woraus

$$dy = \sqrt{2k'(y^2 - 1)(A - y)}\, du = 0$$

Wir differentiiren nun die oben aufgestellte kubische Gleichung für y in der Form

$$y\sqrt{A - y} = \frac{\pi^3}{\sqrt{2k'^3}\, K^3}\left(\frac{q}{1 - q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1 - q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\right)$$

und benutzen den vorhergehenden Differentialausdruck, wodurch wir folgende Gleichung erhalten

$$y^4 - \tfrac{4}{3}Ay^3 + (\tfrac{4}{3}A^2 - 1)y^2 + \tfrac{4}{3}Ay - \tfrac{4}{3}A^2 = \frac{\pi^8}{36k'^4 K^8}\left(\frac{q}{1 - q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{27q^3}{1 - q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\right)$$

deren eine Wurzel wieder unter der oben angegebenen Form bekannt ist.

Wir differentiiren diese Gleichung noch einmal und führen

$$x^2 = A - y$$

ein und erhalten

$$x^5 - \tfrac{5}{3}Ax^3 + \tfrac{1}{9}(4A^2 - 3)x = \frac{\pi^5}{24\sqrt{2k'^5}K^5}\left(\frac{q}{1 - q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{81q^3}{1 - q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} \cdots\right)$$

welche sich als eine reducirte Gleichung 5. Grades darstellt.

Denken wir uns eine Gleichung dieses Grades

$$z^5 - Pz^3 + Qz - R = 0$$

mit der obigen identisch und setzen

$$z = \frac{x}{n}$$

also

$$x^5 - Pn^2x^3 + Qn^4x - Rn^5 = 0$$

und demnach

$$Pn^2 = \tfrac{5}{3}A, \quad Qn^4 = \tfrac{2}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}$$

$$Rn^5 = \frac{\pi^5}{24\sqrt{2k'^5}\,K^5}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{81q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

so folgt

$$n^4 = \frac{25}{2(6P^2-25Q)}$$

$$A = \frac{3P}{\sqrt{12P^2-50Q}}, \qquad k' = \frac{3P-\sqrt{50Q-3P^2}}{\sqrt{12P^2-50Q}}$$

mit der Bedingung

$$4 > \frac{50Q}{3P^2} > 1$$

und das Absolutglied ist folglich nach einer Transformation

$$R = \frac{\pi^5}{24K^5 n^5\sqrt{2k'^5}}\left(\frac{1^4 q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{3^4 q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{5^4 q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right)$$

und die Wurzel der Gleichung 5. Grades ist

$$z = \frac{1+k'}{n\sqrt{2k'}}\sin\left(\frac{4q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Die auf S. 145 abgeleitete Function

$$\tfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}$$

wollen wir zur Aufstellung eines transcendenten elliptischen Integrals benutzen. Wir führen ein

$$\frac{1-\Delta}{1+\Delta} = y^2$$

also

$$\Delta = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad d\Delta = -\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$$

und demzufolge ist

$$d\varphi = \frac{1-y^2}{1+y^2}\,\frac{2\,dy}{k\sqrt{y^4 - 2\frac{1+k'^2}{1-k'^2}y^2 + 1}}$$

Wir multipliciren nun die linke Seite der obigen Gleichung mit $\frac{d\varphi}{\Delta}$ und die rechte mit du, und integriren, dann folgt

$$\frac{\pi}{4kK}\int^{\arcsin\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\,y} \frac{dy}{\sqrt{y^4-2\frac{1+k'^2}{1-k'^2}y^2+1}}$$

$$= -\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} \cdots$$

welche für

$$y\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}} = \sin\psi$$

übergeht in

$$-\int \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2-\sin\psi^2}}$$

$$= 4K\frac{(1+k')}{\pi}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\right) + C$$

Die Constante folgt aus

$$0 = 4K\frac{(1+k')}{\pi}\left(\frac{q}{1+q^2} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cdots\right) + C$$

und so erhält man das merkwürdige Integral

$$\int_0^{\psi} \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2-\sin\psi^2}}$$

$$= \frac{8K}{\pi}(1+k')\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u^2}{4K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u^2}{4K} + \cdots\right)$$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}, \qquad \sin\varphi = \frac{2\sin\psi}{1-k'+(1+k')\sin\psi^2}$$

Demnach kann man das vorstehende Integral und analoge andere in Reihen entwickeln. Man könnte sie elliptisch-transcendente Integrale nennen.

Der grösste Wert desselben geht aus

$$\sin\psi = \frac{1-k'}{1+k'}$$

hervor und ist

$$\int_0^{\psi} \frac{\psi\, d\psi}{\sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2 - \sin\psi^2}}$$

$$= \frac{4K}{\pi}(1+k')\left(\frac{q}{1+q^2} + \frac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6} + \frac{1}{25}\frac{q^5}{1+q^{10}} + \cdots\right)$$

Zum Zweck einer Verification haben wir angenommen

$$k = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

also

$$k' = \tfrac{1}{2}, \quad q = 0{,}085\,795\,73. \quad q^2 = 0{,}007\,361, \quad K = 2{,}156\,515$$

wodurch das letzte Integral übergeht in

$$\int \frac{\psi\, d\psi}{\sqrt{1-(3\sin\psi)^2}} = 2 \cdot \frac{K}{\pi}\left(\frac{q}{1+q^2} + \frac{1}{9}\frac{q^3}{1+q^6} + \cdots\right)$$

$$\frac{K}{\pi} = 0{,}686\,43$$

Es sei

$$3\sin\psi = x, \quad \psi = \arcsin\frac{x}{3}, \quad 3\cos\psi\, d\psi = dx$$

dann ist

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\frac{x}{3}\cdot dx}{3\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}$$

$$= -\int_0^1 \frac{x\left(1+\frac{x^2}{54}+\frac{x^4}{108}\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{18}+\frac{x^4}{216}\cdots\right)dx}{9\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\left(x+\frac{2}{27}x^3+\frac{8}{1215}x^5\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\varphi + \frac{2}{27}\sin\varphi^3 + \frac{8}{1215}\sin\varphi^5 + \cdots\right)d\varphi$$

wenn

$$x = \sin\varphi$$

gesetzt wird. Die Ausführung der Integration und die Wertbestimmung zeigt die Uebereinstimmung der beiden Seiten der obigen Gleichung und damit die Richtigkeit des transcendenten Integrals.

Wir wenden endlich noch die Formel S. 146 an

$$\tfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}=\frac{\pi u}{8K}+\tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K}+\tfrac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}$$

indem wir einführen

$$\frac{1-\Delta}{1+\Delta}=y^2,\quad y\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}=\sin\tau$$

und beiderseitig die Gleichung mit

$$\frac{d\varphi}{\Delta}=u$$

multipliciren und integriren unter Benutzung von

$$\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{2\,dy}{k\sqrt{\left(\left(\frac{1+k'}{1-k'}\right)^2-y^2\right)\left(\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2-y^2\right)}}$$

Man findet wie vorher in analoger Art das transcendente Integral

$$\int\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\sin\tau^2}}$$

$$=2(1+k')\,\frac{K}{\pi}\left(\frac{\pi^2u^2}{16\,K^2}+\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\tfrac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u^2}{2K}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{9}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u^2}{2K}\right)$$

$$\sin\tau=\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}},\qquad \sin\varphi=\frac{2\sin\tau}{1-k'+(1+k')\sin\tau^2}$$

Um noch einige Gleichungen zu entwickeln, benutzen wir die Reihe für

$$\sin\mathrm{am}\,u=\sin\varphi=y$$

für welche besteht

$$y=\frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)$$

$$dy=\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,du$$

Differentiirt giebt dies

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \frac{\pi^2}{4K^2}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{2\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)$$

nochmals differentiirt folgt

$$y^3 - \frac{1+k^2}{2k^2}y + \frac{\pi^3}{4k^3K^3}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{9\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)$$

und ferner

$$y^5 - \frac{5}{8}\frac{1+k^2}{k^2}y^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{24k^4}y$$
$$- \frac{\pi^5}{192k^5K^5}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{81\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)$$

Die obige Reihe für y ist eine Wurzel dieser Gleichungen.

Nach den Formeln S. 238 findet man ähnlich

$$y^3 - \frac{1+k'^2}{1-k'^2}y + \frac{2\pi^3}{k^3K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right)$$
$$y = \frac{4\pi}{kK}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)$$

und ähnlich für den 5. Grad, wenn wir setzen

$$\frac{1+k'}{1-k'} = \alpha$$

$$y^5 - \frac{1}{12}\left(\frac{11\alpha^2+9}{\alpha}\right)y^3 + \frac{1}{12}(\alpha^2+7)y$$
$$- \frac{\pi^5}{6k^5K^5}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{81q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\sin 4\left(\frac{\pi u}{8K} + \frac{\frac{1}{2}q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right)$$

Die Reihe für $\sin\mathrm{am}\, u^2$ führt nach einigen Differentiationen auf

$$x^3 - \frac{1+k^2}{k^2}x^2 + \frac{x}{k^2} - \frac{\pi^6}{k^6K^6}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{K-{}^1E}{k^2K} - \frac{2\pi^2}{k^2K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right)$$

Die Reihe für

$$\cos\mathrm{am}\,\varphi = y$$

liefert wie auch die für $\frac{k'\sin\mathrm{am}\, u}{\Delta}$

$$y^3 - \frac{(1-2k'^2)}{2k^2}y - \frac{\pi^3}{4k^3K^3}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{9\sqrt{q^3}}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\right)$$

$$y = \frac{2\pi}{4K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)$$

und ferner die Reihe für Δ

$$y^3 - \frac{(1+k'^2)}{2}y - \frac{\pi^3}{K^3}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}\ldots\right) = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)$$

Weitere Differentiationen würden Gleichungen 5. Grades hervorbringen.

Nach den Formeln S. 276 folgt für

$$x^3 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}x + \frac{4\pi^6}{k^6K^6}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)^2 = 0$$

$$x = y + \frac{1}{y}$$

$$\log y = 8\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

u. a. m.

Zum Schluss geben wir einige Näherungswerte für K und E.

Auf S. 148 haben wir die Reihen aufgestellt

$$(1+\sqrt{k'})^2 = \frac{2\pi}{K}\left(1 + \frac{4q^4}{1+q^8} + \frac{4q^8}{1+q^{16}} + \frac{4q^{12}}{1+q^{24}}\ldots\right)$$

$$\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}} = \frac{2\pi}{K}\left(1 - \frac{4q^4}{1+q^8} + \frac{4q^8}{1+q^{16}} - \frac{4q'^2}{1+q^{24}}\ldots\right)$$

oder

$$(1+\sqrt{k'})^2 = \frac{2\pi}{K}(1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36}\ldots)^2$$

$$\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}} = \frac{2\pi}{K}(1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36})^2$$

$$\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{k'})^2 = \frac{2\pi}{K}(q + q^9 + q^{25} + \ldots)^2$$

Aus der Addition der beiden reducirten vorletzten Relationen folgt

$$1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}}=\sqrt{\frac{8\pi}{K}}\,(1+2q^{16}\ldots)$$

woraus

$$\frac{\pi}{K}=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}})^2-\frac{4\pi}{K}\,q^{16}$$

bis q^{16} genau folgt.

Um E darzustellen, folgt aus den obigen Formeln zunächst

$$(1+\sqrt{k'})^2+\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}}=\frac{4\pi}{K}\,(1+4q^8+4q^{16}\ldots)$$

Auf S. 156 steht aber abgeleitet

$$\frac{E}{K}=1-\frac{k^2}{1-\sqrt{k'}}+\frac{\pi^2}{K^2}\,(1+8q^8-8q^{16}+\ldots)$$

In diese Formel setzen wir den Wert für $\left(\frac{\pi}{K}\right)^2$ aus der vorhergehenden ein, und erhalten

$$\frac{E}{K}=1-\frac{k^2}{1-\sqrt{k'}}+\frac{1}{16}((1+\sqrt{k'})^2+\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}})^2\,(1-32q^{16})$$

oder

$$\frac{E}{K}=\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{2}\right)^4-k'+\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{2(1+k')\sqrt{k'}}$$

und da

$$K=\frac{8\pi}{(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}})^2}$$

so ist auch

$$E=\pi\,\frac{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{k'})^4-8k'+(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{8(1+k')\sqrt{k'}}}{(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{8(1+k')\sqrt{k'}})^2}$$

beide bis q^{16} genau.

IX.

Zur Theorie der quadratischen Reste.

Von

Karl Reich.

I. „Hat die Primzahl p die Form $4n-1$ und fügt man jedem „von allen incongruenten quadratischen Resten a von p die gegebene „durch p nicht teilbare Zahl h hinzu, so gibt es unter den so ent„standenen $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen $\frac{1}{4}(p-3)$ solche, welche wiederum „quadratische Reste von p sind".

Beweis. Wenn a und $a+h$ quadratische Reste von p sind, so gibt es Zahlen x und y, welche den Congruenzen

$$x^2 \equiv a+h, \quad y^2 \equiv a \pmod{p}$$

Genüge leisten. Hieraus folgt

$$(x+y)(x-y) \equiv h \pmod{p} \tag{1}$$

Und umgekehrt: Wenn zwei Zahlen x und y der Congruenz (1) genügen, so ist nicht allein y^2, sondern auch y^2+k quadratischer Rest von p. Es handelt sich also darum, die Anzahl derjenigen von null verschiedenen Lösungen (x, y) der Congruenz (1) ausfindig zu machen, von denen keine zwei (x_1, y_1) und (x_2, y_2) so beschaffen sind, dass

$$y_1^2 \equiv y_2^2 \pmod{p}$$

ist. Zu dem Behufe scheide man zunächst aus der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots p-1 \qquad (2)$$

die beiden Wurzeln ϱ und $p-\varrho$ der Congruenz

$$x^2 \equiv \left(\frac{h}{p}\right) h \pmod{p}$$

aus. Bedeutet alsdann r irgend eine der noch übrigen $p-3$ Zahlen der Reihe (2), so gibt es in derselben Reihe eine, aber auch nur eine von r und $p-r$ notwendig verschiedene Zahl s von der Beschaffenheit, dass

$$rs \equiv h \pmod{p}$$

ist. Setzt man

$$x+y \equiv r, \quad x-y \equiv s \pmod{p}$$

so entspricht jedem der $p-3$ Paare r, s eine Lösung (x, y), welche sich aus den Congruenzen

$$2x \equiv r+s, \quad 2y \equiv r-s \pmod{p}$$

sofort ergibt. Da umgekehrt einer bestimmten Lösung (x, y) ein bestimmtes Paar r, s entspeicht, so gibt es $p-3$ verschiedene Lösungen der Congruenz (1), von denen aber je vier, wie

$$(x, y); \quad (x, p-y); \quad (p-x, y); \quad (p-x, p-y)$$

welche den Paaren

$$r, s; \quad s, r; \quad p-s, p-r; \quad p-r, p-s$$

entsprechen, zu dem nämlichen quadratischen Reste a führen. Also gibt es $\frac{1}{4}(p-3)$ quadratische Reste a, welche die Eigenschaft haben, dass die Zahlen $a+h$ wiederum quadratische Reste von p sind. —

Da $-a = b$ quadratischer Nichtrest von p ist, $b+h = -(a-h)$ aber Rest oder Nichtrest, je nachdem $a-h$ Nichtrest oder Rest ist, so folgt aus dem eben bewiesenen Satze unmittelbar der andere:

„Hat p die Form $4n-1$ und fügt man jedem von allen incon-„gruenten quadratischen Nichtresten b von p die durch p nicht teil-„bare Zahl h hinzu, so gibt es unter den so entstandenen $\frac{1}{2}(p-1)$ „$\frac{1}{4}(p-3)$ solche, welche wiederum Nichtreste von p sind".

In gleicher Weise wie den ersten Satz beweist man den folgenden:

„Hat p die Form $4n+1$ und fügt man jedem von allen incon-„gruenten quadratischen Resten a von p die durch p nicht teilbare „Zahl h hinzu, so gibt es unter den so entstandenen $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen „$\frac{1}{4}(p-5)$ oder $\frac{1}{4}(p-1)$ Reste, je nachdem h Rest oder Nichtrest „von p ist".

Bedeutet β einen bestimmten Nichtrest von $p = 4n+1$, so ist $\beta a = b$ ein Nichtrest, $\beta h = h'$ ein Nichtrest oder Rest, je nachdem h ein Rest oder Nichtrest ist und $b+h'$ ein Nichtrest, wenn $a+h$ ein Rest von p ist. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus dem letzterem Satze der andere:

„Hat p die Form $4n+1$ und fügt man jedem von allen incon-
„gruenten quadratischen Nichtresten b von p die durch p nicht
„teilbare Zahl h hinzu, so gibt es unter den so entstandenen $\frac{1}{2}(p-1)$
„Zahlen $\frac{1}{4}(p-5)$ oder $\frac{1}{4}(p-1)$ Nichtreste, je nachdem h Nichtrest
„oder Rest von p ist".

Bei Benutzung des Legendre'schen Symbols kann man die bisher gefundenen Sätze in den einen zusammenfassen:

„Bedeutet h eine gegebene durch die ungerade Primzahl p nicht
„teilbare Zahl, so gibt es

$$m' = \tfrac{1}{4}(p-3-\tfrac{1}{4}[1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}]\left(\frac{hc}{p}\right)$$

„incongruente Zahlen c, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{b+h}{p}\right)$ constant und
„gleich sind".

Wenn man voraussetzt, „dass $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ immer gleich ist $-\left(\frac{c}{p}\right)$,
wenn $c+h$ durch p teilbar ist", so ist die Anzahl m'' der incon-
gruenten Zahlen c, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant und entgegengesetzt gleich sind, $= \frac{1}{2}(p-1)-m'$. Mit Rücksicht hierauf kann man statt des letzten Satzes den allgemeineren setzen:

„Bedeutet h eine gegebene durch die ungerade Primzahl p nicht
„teilbare Zahl, so gibt es

$$m = \tfrac{1}{4}(p-1)-\left(\frac{c+h}{p}\right)\left\{\tfrac{1}{4}\left(\frac{c}{p}\right)+\tfrac{1}{4}\left[1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left(\frac{h}{p}\right)\right\}$$

„incongruente Zahlen c, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant sind".

Wenn man insbesondere $h = 1$ setzt, so erhält man die folgenden Sätze:

„Hat die Primzahl p die Form $4n-1$, so gibt es ebensowol
„unter ihren quadratischen Resten wie auch unter ihren Nichtresten,
„welche zwischen kp und $(k+1)p$ liegen, $\frac{1}{4}(p-3)$ Paare unmittel-

„bar aufeinander folgender Zahlen c und $c+1$". So sind z. B. unter den zwischen 0 und 11 liegenden Resten von 11 die zwei Paare 3, 4; 4, 5, unter den Nichtresten die zwei Paare 6, 7; 7, 8.

„Hat die Primzahl p die Form $4n+1$, so gibt es unter ihren „zwischen kp und $(k+1)p$ liegenden Resten $\frac{1}{4}(p-5)$, unter ihren „zwischen denselben Grenzen liegenden Nichtresten $\frac{1}{4}(p-1)$ Paare „unmittelbar aufeinander folgender Zahlen c und $c+1$". So sind z. B. unter den zwischen 0 und 13 liegenden Resten von 13 die 2 Paare 3, 4; 9, 10, unter den Nichtresten die 3 Paare 5, 6; 6, 7; 7, 8.

II. „Bezeichnet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht „teilbare Zahl, und lässt man c alle incongruenten quadratischen „Reste [Nichtreste] von p durchlaufen, für welche $c+h$ gleichfalls „Rest [Nichtrest] von p ist, so besteht die Congruenz

$$\Sigma c(c+h) \equiv h^2(\tfrac{1}{2}(p+1))^5 \pmod{p}$$

„sofern $p > 5$ ist".

Beweis. Sind zunächst $c = a$ und $a+h$ quadratische Reste von von p, und behält man die früheren Bezeichnungen bei, so ist

$$16a(a+h) \equiv 16x^2y^2 \equiv r^4+s^4-2r^2s^2 \pmod{p}$$

Bei einiger Ueberlegung findet man leicht: Wenn p die Form $4n-1$ hat, so ist

$$\Sigma(r^4+s^4) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4-h^2,$$

$$\Sigma r^2s^2 \equiv h^2\,\frac{p-3}{4} \pmod{p}$$

wenn dagegen p die Form $4n+1$ hat, so ist entweder

$$\Sigma(r^4+s^4) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4-2h^2$$

$$\Sigma r^2s^2 \equiv h^2\,\frac{p-5}{4} \pmod{p}$$

oder

$$\Sigma(r^4+s^4) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4$$

$$\Sigma r^2s^2 \equiv h^2\,\frac{p-1}{4} \pmod{p}$$

je nachdem h Rest oder Nichtrest von p ist. Daher ist für alle Fälle

$$\Sigma 16a(a+h) \equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4-\tfrac{1}{2}(p-1)h^2 \pmod{p}$$

Nun ist die Summe

$$1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4=\frac{p(p^2-1)}{2^5\cdot 5}(p^2-\tfrac{7}{3})$$

teilbar durch p, wenn $p>5$ ist [1]). Demnach wird

$$\Sigma 16a(a+h)\equiv \tfrac{1}{2}(p+1)h^2 \pmod{p}$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Congruenz mit $(\frac{1}{2}(p+1))^4$, so erhält man die zu beweisende Congruenz

$$\Sigma a(a+h)\equiv(\tfrac{1}{2}(p+1))^5h^2 \pmod{p}$$

Durch Multiplication derselben mit β^2 ergibt sich

$$\Sigma b(b+h')\equiv(\tfrac{1}{2}(p+1))^5h'^2 \pmod{p}$$

wo $b=a\beta$ und $h+h'$ Nichtreste von p sind, wenn β einen bestimmten Nichtrest von p bedeutet. —

Lässt man z alle incongruenten quadratischen Reste von p durchlaufen, so wird

$$\Sigma z(z+h)=\Sigma z^2+\Sigma zh\equiv 0 \pmod{p}$$

denn es ist

$$\Sigma z^2\equiv 1^4+2^4+\ldots+(\tfrac{1}{2}(p-1))^4\equiv 0 \pmod{p}$$

wenn $p>3$ ist; ebenso ist Σzh, d. i. die Summe aller incongruenten quadratischen Reste oder Nichtreste von p, (je nachdem h Rest oder Nichtrest von p ist) $\equiv 0 \pmod{p}$, wenn $p>3$ ist. Hieraus und aus dem vorhin bewiesenen Satze folgt der andere:

„Bezeichnet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht teilbare

---

1) Vermittelst der Bernoulli'schen Reihe findet man bei Berücksichtigung der Identität

$$m-2\binom{2m+1}{2}B_1+2^3\binom{2m+1}{4}B_3-\ldots$$
$$\ldots(-1)^m 2^{2m-1}\binom{2m+1}{2m}B_{2m-1}=0$$

dass die Summe

$$1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}+\ldots+\left[\frac{p-1}{2}\right]^{2m}$$
$$=\frac{p(p^2-1)}{2^{2m+1}(2m+1)}\left(p^{2m-2}-\frac{2m^2+m-3}{3}p^{2m-4}+\ldots\right)$$

teilbar ist durch die Primzahl p, wenn $p>2m+1$ ist.

„Zahl, und lässt man c alle incongruenten quadratischen Reste „[Nichtreste] von p durchlaufen, für welche $c+h$ Nichtrest [Rest] „von p ist, so besteht die Congruenz

$$\Sigma c(c+h) \equiv -(\tfrac{1}{2}(p+1))^5 h^2 \pmod{p}$$

„sofern $p > 5$ ist".

Man kann beide Sätze in dem folgenden zusammenfassen:

„Bedeutet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht teilbare „Zahl, und lässt man c alle in Bezug auf den Modul p incongruenten „Zahlen durchlaufen, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant bleiben, „so ist

$$2^5 \Sigma c(c+h) \equiv \left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{c+h}{p}\right) h^2 \pmod{p}$$

„wenn $p > 5$ ist".

Dieser und manch anderer Satz lässt sich auch leicht aus dem folgenden viel allgemeineren Satze ableiten, dessen Beweisführung nach der eben angewandten Methode ich dem Leser überlassen kann:

„Bedeutet h eine gegebene durch die Primzahl p nicht teilbare „Zahl, und durchläuft c alle in Bezug auf den Modul p incongru„enten Zahlen, für welche nicht allein $\left(\frac{c}{p}\right)$, sondern auch $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ „constant bleibt, so ist

$$s_k = \Sigma c^k \equiv (-1)^{k+1} 2^{p-2k-2}\left(\frac{c+h}{p}\right)\left[\left(2^{2k-1} + \binom{2k-1}{k-1}\right)\left(\frac{c}{p}\right) + 2^{2k-1}\left(\frac{-h}{p}\right)\right] h^k \pmod{p}$$

„wobei k eine positive ganze Zahl bedeutet, welche $< \frac{1}{2}(p-1)$ ist".

Wir wollen im folgenden die Auswertung der Determinanten einiger besonderer Systeme vornehmen. Hiezu bedürfen wir jedoch einiger Identitäten, die ich vorerst ableiten will.

Bei positiven x besteht die identische Gleichung

$$\binom{2x-1}{x-2} - \frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} + \frac{2}{3}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} + \frac{2}{4}\binom{5}{2}\binom{2x-7}{x-4} + \cdots \cdots + \frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\binom{1}{0} \qquad (1)$$

Für $x = 1$ besteht diese Gleichung zu Recht, da $\binom{1}{-1} = 0$ ist. Wenn $x > 1$ ist, so vereinige man in der Function

$$\chi(x) = \binom{2x-1}{x-2} - \frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} - \frac{2}{3}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\binom{1}{0}$$

je zwei Glieder wie

$$-\frac{2}{y}\binom{2y-3}{y-2}\binom{2x-2y+1}{x-y} \quad \text{und}$$

$$-\frac{2}{x-y+2}\binom{2x-2y+1}{x-y}\binom{2y-3}{y-2} \quad \text{zu}$$

$$-\frac{2x+4}{y(x-y+2)}\binom{2y-3}{y-2}\binom{2x-2y+1}{x-y}$$

und erhält so

$$\chi(x) = \binom{2x-1}{x-2} - \frac{2x+4}{2x}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} - \frac{2x+4}{3(x-1)}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} - \ldots$$

Das letzte Glied dieser Reihe ist

$$-\frac{2}{\frac{x+2}{2}}\binom{\frac{x-1}{2}}{\frac{x-2}{2}}^2 \quad \text{oder}$$

$$-\frac{2x+4}{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x+3}{2}}\binom{\frac{x}{2}}{\frac{x-1}{2}}\binom{\frac{x-2}{2}}{\frac{x-3}{2}}$$

je nachdem x gerade oder ungerade ist. Durch successive Vereinigung der aufeinander folgenden Glieder erhält man leicht

$$\binom{2x-1}{x-2} = \frac{x-1}{x+1}\binom{1}{0}\binom{2x-1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x+1}\binom{1}{0}\binom{2x-1}{x-1} - \frac{2x+4}{2x}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2} = \frac{x-3}{x+1}\binom{3}{1}\binom{2x-3}{x-2}$$

$$\frac{x-3}{x+1}\binom{3}{1}\binom{2x-3}{x-2} - \frac{2x+4}{3(x-1)}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3} = \frac{x-5}{x+1}\binom{5}{2}\binom{2x-5}{x-3}$$

. . . . . .

Und da allgemein

$$\frac{x-2y-1}{x+1}\binom{2y+1}{y}\binom{2x-2y-1}{x-y-1}-\frac{2x+4}{(y+2)(x-y)}\binom{2y+1}{y}\binom{2x-2y-3}{x-y-2}$$
$$=\frac{x-2y-3}{x+1}\binom{2y+3}{y+1}\binom{2x-2y-3}{x-y-2}$$

ist, so wird schliesslich $\chi(x)$ entweder

$$=\frac{x-2y-3}{x+1}\binom{2y+3}{y+1}\binom{2x-2y-3}{x-y-2}-\frac{2}{\frac{x+2}{2}}\left(\frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{x-2}{2}}\right)^2 \text{ für } y=\frac{x-4}{2}$$

oder

$$=\frac{x-2y-2}{x+1}\binom{2y+3}{y+1}\binom{2x-2y-3}{x-y-2} \text{ für } y=\frac{x-3}{2}$$

je nachdem x gerade oder ungerade ist. In beiden Fällen aber ergibt sich, dass $\chi(x)=0$ ist. —

Von der Identität (1) nicht wesentlich verschieden sind die anderen:

$$\binom{2x+1}{x}=3\binom{2x-1}{x-1}+\frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2x-3}{x-2}+\frac{2}{3}\binom{3}{1}\binom{2x-5}{x-3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\binom{1}{0} \qquad (2)$$

$$\frac{2}{x+2}\binom{2x+1}{x}=\frac{2}{x+1}\binom{2x-1}{x-1}+\binom{1}{0}\cdot\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}+\frac{2}{3}\binom{3}{1}$$
$$\times\frac{2}{x-1}\binom{2x-5}{x-3}+\cdots+\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}\cdot\frac{2}{2}\binom{1}{0}+\frac{2}{x+1}\binom{2x-1}{x-1}$$

Der Nachweis der identischen Gleichungen

$$\frac{2}{2}\binom{1}{0}2^{2x-2}+\frac{2}{3}\binom{3}{1}2^{2x-4}+\cdots+\frac{2}{x}\binom{2x-3}{x-2}2^2+\frac{2}{x+1}\binom{2x-1}{x-1}$$
$$+\binom{2x+1}{x}=2^{2x} \qquad (3)$$

$$\binom{1}{0}2^{2x-2}+\binom{3}{1}2^{2x-4}+\cdots+\binom{2x-3}{x-2}2^2=2x\binom{2x-1}{x-1}-2^{2x-1} \qquad (4)$$

durch vollständige Induction ist so einfach, dass ich ihn übergehe. — Gleichfalls durch Induction beweist man die Identität

$$\binom{\frac{1}{2}}{0}\binom{2x-1}{x-1}+\binom{3}{1}\binom{2x-3}{x-2}+\binom{5}{2}\binom{2x-5}{x-3}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{2x-1}{x-1}\binom{1}{0}=\binom{1x+1}{x}=2^{2\alpha} \qquad (5$$

Dass diese Gleichung für

$$x = y+1$$

gilt, wenn sie für

$$x = 0.\ \ 1,\ \ 2 \ldots y$$

richtig ist, zeigt man in der folgenden Weise: Man setze

$$x = y,\ \ y-1\ \ \ldots\ \ 1,\ \ 0$$

multiplicire die so erhaltenen $y+1$ Gleichungen bzw. mit

$$3,\ \ \frac{2}{2}\binom{1}{0},\ \ \frac{2}{3}\binom{3}{1},\ \ \ldots,\ \ \frac{2}{y}\binom{2y-3}{y-2},$$
$$\frac{2}{y+1}\binom{2y-1}{y-1}+\binom{2y+1}{y}$$

und addire sie alsdann mit Berücksichtigung der Identitäten (2) und (3). —

Wir schreiten nun zur Auswertung der Determinante $k$ten Grades (die leeren Stellen des Systems enthalten Nullen)

$$R_k = \begin{vmatrix} 1, & 2 & \\ -\binom{3}{1} & 1, & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{k-2}\binom{2k-3}{k-2}, & (-1)^{k-3}\binom{2k-5}{k-3}, & (-1)^{k-4}\binom{2k-7}{k-4} \\ & & \cdot\ \cdot\ (2k-2) \\ (-1)^{k-1}\binom{2k-1}{k-1}, & (-1)^{k-2}\binom{2k-3}{k-2}, & (-1)^{k-3}\binom{2k-5}{k-3} \\ & & \cdot\ \cdot\ 1 \end{vmatrix}$$

Zu dem Behufe addire man zu der mit $2k+1$ multiplicirten $k$ten Zeile ihres Systems die anderen Zeilen, nachdem man vorher die $k-1$te Zeile mit $8k-1$ und von den ersten $k-2$ Zeilen allgemein die $i$te mit $(-1)^{k-i-1}\frac{2}{k-i}\binom{2k-2i-3}{k-i-2}$ multiplicirt hat. Bezeichnet a_h das $h$te Element der so transformirten $k$ten Zeile des Systems der Determinante $(2k+1)R_k$, so ist demnach, wenn $h < k$ ist,

$$a_h = (-1)^{k-h}\Big[(2k+1)\binom{2k-2h+1}{k-h} - (8k-1)\binom{2k-2h-1}{k-h-1}$$
$$-\frac{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2k-2h-3}{k-h-2} - \ldots - \binom{2k-2h-3}{k-h-2}\binom{1}{0}$$
$$+\frac{2}{k-h+1}\binom{2k-2h-1}{k-h-1}(2h-2)\Big]$$

Durch die Vereinigung des ersten, zweiten und letzten Gliedes der rechten Seite erhält man leicht

$$(2k+1)\binom{2k-2h+1}{k-h}-(8k-1)\binom{2k-2h-1}{k-h-1}$$
$$+\frac{2}{k-h+1}\binom{2k-2h-1}{k-h-1}(2h-2)=\binom{2k-2h-1}{k-h-2}$$

Mit Rücksicht auf die Identität (1) ist also

$$a_h = 0 \quad \text{für} \quad h = 1, 2, 3 \ldots k-1$$

wogegen man unmittelbar findet

$$a_k = (2k+1)\binom{1}{0}+(8k-1)(2k-2) = (4k-3)(4k-1)$$

Hieraus folgt sofort, dass

$$(2k+1)R_k = (4k-2)(4k-3)R_{k-1}$$

aus welchem recursiven Ausdrucke, bei Rücksichtnahme auf $R_1 = 1$, der independente

$$R_k = (2k+3)(2k+5)(2k+7)\ldots(4k-1)$$

sich ergibt.

In ähnlicher Weise wie R_k berechnet man die Determinante $k$ten Grades

$$S_k = \begin{vmatrix} 1, & 2 & & \\ \binom{3}{1} & 1, & 4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{2k-3}{k-2}, & \binom{2k-5}{k-3}, & \binom{2k-7}{k-4}, & \ldots(2k-2) \\ \binom{2k-1}{k-1}, & \binom{2k-3}{k-2}, & \binom{2k-5}{k-3}, & \ldots 1 \end{vmatrix}$$

deren System aus jenem der Determinante R_k hervorgeht, wenn man sämtliche Elemente positiv nimmt. Behufs Bestimmung von S_k addire man zu der mit $2k-1$ multiplicirten $k$ten Zeile die anderen Zeilen, nachdem man vorher die $k-1$te Zeile mit $-(8k-7)$ und von den ersten $k-2$ Zeilen allgemein die $i$te mit $\frac{2}{k-i}\binom{2k-2i-3}{k-i-2}$ multiplicirt hat. Bezeichnet b_h das $h$te Element der so transformirten $k$ten Zeile des Systems der Determinante $(2k-1)S_k$, so findet man wie früher

$$b_h = 0 \quad \text{für} \quad h = 1, 2, 3 \ldots k-1$$

$$b_k = (2k-1)\binom{1}{0} - (8k-7)(2k-2) = -(4k-5)(4k-3)$$

woraus

$$(2k-1)S_k = -(4k-5)(4k-3)S_{k-1}$$

und, mit Rücksicht auf $S_1 = 1$

$$S_k = (-1)^{k-1}(2k+1)(2k+3)(2k+5) \ldots (4k-3)$$

folgt. —

Das System von k^2 Elementen der Determinante S_k lässt sich in ein System von $(k-1)^2$ Elementen verwandeln. Man transformire zunächst der Reihe nach die 1te, 2te ... $k-1$te Colonne jenes Systems derart, dass man allgemein zur $h$ten Colonne die folgenden Colonnen addirt, nachdem man vorher die $h+1$te, $h+2$te ... $k$te Colonne bzhw. mit

$$-3, \quad -\frac{2}{2}\binom{1}{0}, \quad -\frac{2}{3}\binom{3}{1} \cdots -\frac{2}{k-h}\binom{2k-2h-3}{k-h-2}$$

multiplicirt hat. Auf Grund der Identität findet man, dass das so transformirte System nach erlaubter Unterdrückung der letzten Zeile und Colonne die folgende Gestalt hat:

$$\begin{array}{llll}
-5, & 2 & & \\
-\frac{2}{2}\binom{1}{0}4, & -6.1-5, & 4 & \\
-\frac{2}{3}\binom{3}{1}6, & -\frac{2}{2}\binom{1}{0}6, & -6.2-5, & 6 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\frac{2}{k-2}\binom{2k-7}{k-4}(2k-4), & -\frac{2}{k-3}\binom{2k-9}{k-5}(2k-4), & \cdot & \cdot \\
-\frac{2}{k-1}\binom{2k-5}{k-3}(2k-2), & -\frac{2}{k-2}\binom{2k-7}{k-4}(2k-2), & \cdot & \cdot \\
 & & & -6(k-1)-5
\end{array}$$

In diesem Systeme transformire man nun der Reihe nach die $k-1$te, $k-2$te ... 2te Zeile derart, dass man allgemein zur $i$ten Zeile die vorangehenden Zeilen addirt, nachdem man vorher von diesen $i-2$ Zeilen allgemein die $i-x$te mit $\binom{2x+1}{x}$ multiplicirt hat. Mit Rücksicht auf die Identitäten (2) und (5) geht hiedurch das letzte System über in das folgende:

$$
\begin{array}{lll}
-[1+2^2], & 2 & \\
-\left[\binom{3}{1}+2^4\right], & -[1+2^2], & 4 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
-\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right], & -\left[\binom{2k-7}{k-4}+2^{2k-6}\right], & \ldots \quad (2k-4) \\
-\left[\binom{2k-3}{k-2}+2^{2k-2}\right], & -\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right], & \ldots -[1+2^2]
\end{array}
$$

Die Determinante dieses Systems hat den Wert S_k. Multiplicirt man jedoch die ungeraden Zeilen und die geraden Colonnen mit -1 und bezeichnet die Determinante $k-1$ten Grades des so erhaltenen Systems mit T_{k-1}, so ist

$$
T_{k-1} = \begin{vmatrix}
1+2^2, & 2 & \\
-\left[\binom{3}{1}+2^4\right], & 1+2^2, & 4 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
(-1)^{k-3}\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right], & (-1)^{k-4}\left[\binom{2k-7}{k-4}+2^{2k-6}\right] & \ldots (2k-4) \\
(-1)^{k-2}\left[\binom{2k-3}{k-2}+2^{2k-2}\right], & (-1)^{k-3}\left[\binom{2k-5}{k-3}+2^{2k-4}\right] & \ldots 1+2^2
\end{vmatrix}
$$

$$
T_{k-2} = (-1)^{k-1} S_k = (2k+1)(2k+3)(2k+5) \ldots (4k-3)
$$

Den Wert der Determinante T_{k-1} erhält man auch unmittelbar, wenn man zu der mit $2k-1$ multiplicirten $k-1$ten Zeile ihres Systems die vorangehenden Zeilen addirt, nachdem man vorher die $k-2$te Zeile mit $8k-5$ und von den ersten $k-3$ Zeilen allgemein die $i$te mit $(-1)^{k-i}\frac{2}{k-i-1}\binom{2k-2i-5}{k-i-3}$ multiplicirt hat. Bei Benutzung der Identitäten (1) und (3) findet man, dass die Elemente der so transformirten $k-1$ten Zeile mit Ausnahme des letzten, welches

$$= 5(2k-1)+(2k-4)(8k-5) = (4k-5)(4k-3)$$

wird, verschwinden. Also ist

$$(2k-1)\,T_{k-1} = (4k-5)(4k-3)\,T_{k-2}$$

woraus, mit Rücksicht auf $T_1 = 5$, der independente Ausdruck für T_{k-1} sich sofort ergibt.

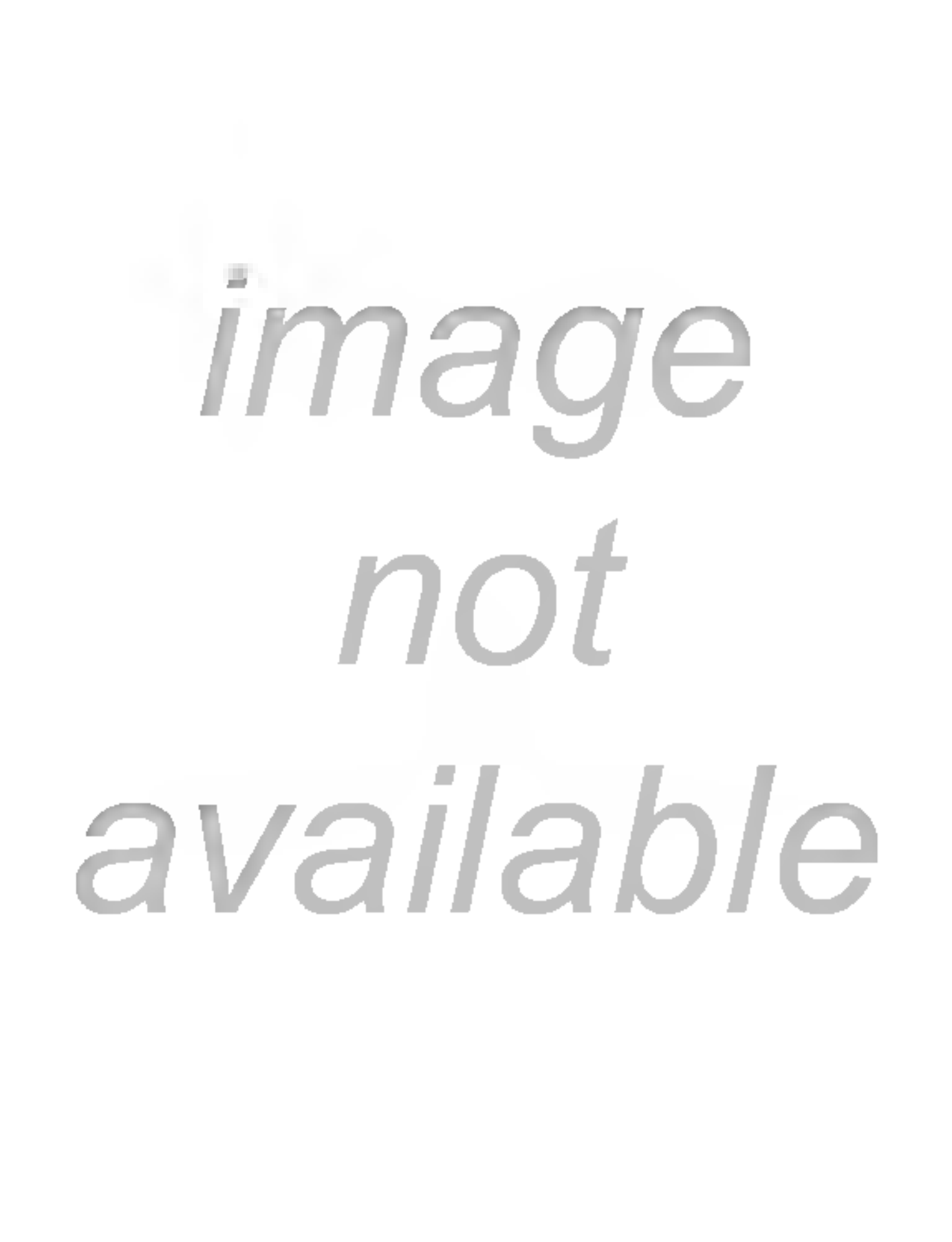


image
not
available

dessen Determinante den Wert $(-1)^{k-2}(8k-11)R_{k-2}$ hat, in das System der Determinante U_{k-1} über durch die folgende Umwandlung: Man transformire zunächst der Reihe nach die $k-1$te, $k-2$te ... 2te Zeile derart, dass man zur $k-1$ten Zeile die mit -4 multiplicirte $k-2$te Zeile, sonst aber allgemein zur $i$ten Zeile die vorangehenden $i-1$ Zeilen addirt, nachdem man vorher von diesen die $i-1$te, $i-2$te ... 1te Zeile bzhw. mit

$$-3, \quad -\frac{2}{2}\binom{1}{0}, \quad -\binom{2}{3}\binom{3}{1}, \quad \ldots \quad -\frac{2}{i-1}\binom{2i-5}{i-3}$$

multiplicirt hat; in dem so erhaltenen Systeme transformire man wieder der Reihe nach die 1te, 2te ... $k-2$te Colonne derart, dass man allgemein zur $h$ten Colonne die nachfolgenden $k-h-1$ Colonnen addirt, nachdem man vorher von diesen die $h+1$te, $h+2$te ... $k-1$te Colonne bzhw. mit

$$\binom{3}{1}, \quad \binom{5}{2}, \quad \binom{7}{3}, \quad \ldots \binom{2k-2h-1}{k-h-1}$$

multiplicirt hat.

Ersetzt man in den Systemen der Determinanten R_k, S_k, T_k, U_k die parallel zur Diagonale verlaufenden Elemente

$$2, \quad 4, \quad 6 \quad \ldots \quad (2k-2)$$

durch die Glieder der allgemeineren arithmetischen Reihe

$$x, \quad 2x, \quad 3x \quad \ldots \quad (k-1)x$$

und in den Systemen der Determinanten T_k, U_k überdies jedes andere Element von der Form

$$\pm\left\{\binom{2y+1}{y}+2^{2y+2}\right\} \text{ durch } \pm\left\{\binom{2y+1}{y}+2^{2y+1}x\right\}$$

und bezeichnet man die Determinanten der so verallgemeinerten Systeme bzhw. mit $R_{k,x}$, $S_{k,x}$, $T_{k,x}$, $U_{k,x}$, so erhält man leicht bei Zugrundelegung der hier angewandten Methode

$$R_{k,x} = ((k+1)x+1)((k+2)x+1)((k+3)x+1) \ldots ((2k-1)x+1)$$

$$S_{k,x} = (-1)^{k-1}((k+1)x-1)((k+2)x-1)((k+3)x-1) \ldots \ldots ((2k-1)x-1)$$

$$T_{k,x} = ((k+1)x+1)((k+2)x+1)((k+3)x+1) \ldots (2kx+1)$$

$$U_{k,x} = (-1)^{k-1}((k+1(x-1)((k+2)x-1)\ \ldots$$
$$\ldots\ ((2k-2)x-1).(2kx^2-x-1)$$

ausgenommen

$$U_{1,x} = \frac{1}{x-1}(2x^2-x-1) = 2x+1$$

Die Werte der Determinanten R_k, S_k, T_k, U_k ergeben sich aus diesen Formeln, wenn man $x=2$ setzt. Auch die Determinanten $R_{k,x}$, $S_{k,x}$, $T_{k,x}$, $U_{k,x}$ sind wiederum nur specielle Fälle von Determinanten ähnlicher, aber noch allgemeinerer Systeme.

IV. Man bilde die Combinationen $k$ten Grades aller nach dem ungeraden Primzahlenmodulus p incongruenten Zahlen c, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant bleiben (h bedeutet wieder eine gegebene durch p nicht teilbare Zahl), betrachte die Combinationen als Producte mit a_k Wir stellen uns die Aufgabe a_k zu finden.

Wie früher (II) werde die Summe Σc^k mit s_k bezeichnet Die Newton'schen Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 & \equiv s_1 \\ s_1 a_1 - 2a_2 & \equiv s_2 \\ s_2 a_1 - s_1 a_2 + 3a_3 & \equiv s_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ s_{k-1} a_1 - s_{k-2} a_2 + s_{k-3} a_3 - \ldots + (-1)^{k-1} k a_k & \equiv s_k \end{array}\right\} \pmod p$$

ergeben für a_k die Lösung

$$k!\, a_k \equiv \begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ s_{k-1} & s_{k-2} & . & . & . & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & . & . & . & s_1 \end{vmatrix} \pmod p$$

Man setze nun in dem System der Determinante auf der rechten Seite dieser Congruenz für die Grössen $s_1, s_2 \ldots$ die ihnen congruenten Werte (II) und transformire alsdann das System derart, dass man dessen Zeilen und Colonnen, u. zw. allgemein die $i$te Zeile mit $2^{2i+1} h^{-(i-1)}$ und die $n$te Colonne mit $2^{-2(n-1)} h^{n-1}$, multiplicirt. Von jetzt an sind vier Fälle zu unterscheiden.

a. Wenn

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right) = -\left(\frac{-h}{p}\right)$$

ist, so erhält man

$$s_k \equiv (-1)^{k+1} 2^{p-2k-2} \binom{2k-1}{k-1} h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1} R_k h^k = 2^{p-3k-2}(2k+3)(2k+5) \ldots (4k-1) h^k \pmod{p}$$

b. Wenn

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right) = \left(\frac{-h}{p}\right)$$

so ist

$$s_k \equiv (-1)^{k+1} 2^{p-2k-2} \left[\binom{2k-1}{k-1} + 2^{2k}\right] h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1} T_k h^k = 2^{p-3k-1}(2k+3)(2k+5) \ldots (4k+1) h^k \pmod{p}$$

c. Wenn

$$\left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right) = -\left(\frac{-h}{p}\right)$$

so ist

$$s_k \equiv (-1)^k 2^{p-2k-2} \binom{2k-1}{k-1} h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1} \cdot (-1)^k S_k h^k = -2^{p-3k-1}(2k+1)(2k+3) \ldots (4k-3) h^k \pmod{p}$$

d. Ist endlich

$$\left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right) = \left(\frac{-h}{p}\right)$$

so erhält man

$$s_k \equiv (-1)^k 2^{p-2k-2} \left[\binom{2k-1}{k-1} + 2^{2k}\right] h^k \pmod{p}$$

$$k!\, a_k \equiv 2^{p-3k-1} \cdot (-1)^k U_k h^k = -2^{p-3k-1}(2k+1)(2k+3) \ldots (4k-5) \cdot (8k-3) h^k \pmod{p}$$

Wenn man insbesondere für k den grössten Wert m, den es anzunehmen vermag, setzt (I), so erhält man nach einigen leichten Rechnungen den folgenden Lehrsatz:

„Bedeutet h eine gegebene durch die ungerade Primzahl p nicht „teilbare Zahl, und bezeichnet a_m das Product der m in Bezug auf „den Modul p incongruenten Zahlen, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ „constant bleiben, so ist"

$$a_m \equiv h^m \pmod{p}, \quad \text{wenn} \quad \left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right)$$

$$a_m \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} h^m \pmod{p} \quad \text{„} \quad \left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right)$$

$$a_m \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2h^m \pmod{p} \quad \text{„} \quad \left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{h}{p}\right) = \left(\frac{c+h}{p}\right)$$

$$2a^m \equiv h^m \pmod{p} \quad \text{„} \quad \left(\frac{c}{p}\right) = -\left(\frac{h}{p}\right) = -\left(\frac{c+h}{p}\right)$$

X.

Curve gegebener Krümmung auf gegebener Fläche.

Von

R. Hoppe.

Die folgende Untersuchung beschränkt sich auf das Ziel die genannte geometrische Bestimmung einer Curve durch eine Differentialgleichung auszudrücken. Doch hat vielleicht schon dieser Anfang der Darstellung der Curve wegen der unerwarteten Einfachheit des Resultats, zu welcher der Weg nicht sogleich zu Tage liegt, einiges Interesse.

Die Coordinaten x, y, z eines Punkts der Fläche seien gegebene Functionen der beliebigen Parameter u, v, die Richtungscosinus der Normale p, q, r, das Element einer beliebigen Linie s auf der Fläche sei bestimmt durch

$$\partial s^2 = e\,\partial u^2 + 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2$$

und zwar sei

$$t^2 = eg - f^2$$

Die Fundamentalgrössen 2. Ordnung seien

$$E = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots; \quad F = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots; \quad G = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots$$

Längs einer gesuchten Linie s sei

$$k = \frac{\partial v}{\partial u}; \quad k' = \frac{\partial k}{\partial u}$$

Betrachtet man u, v, k als unabhängig, so sei

$$J' = \frac{\partial J}{\partial u} + k\frac{\partial J}{\partial v} \tag{1}$$

so dass, wenn J längs s differentiirt und

$$w = e + 2kf + k^2 g \tag{2}$$

setzt, man erhält

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{w}}\left(J' + k'\frac{\partial J}{\partial k}\right) \tag{3}$$

Ferner sei

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A\frac{\partial x}{\partial u} + A_1\frac{\partial x}{\partial v} + Ep \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + Fp \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + Gp \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mit Anwendung auf y und z, ferner

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= Ae + A_1 f = \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u}; \quad A_3 = Af + A_1 g = \frac{\partial f}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} \\ B_2 &= Be + B_1 f = \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}; \quad B_3 = Bf + B_1 g = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} \\ C_2 &= Ce + C_1 f = \frac{\partial f}{\partial v} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}; \quad C_3 = Cf + C_1 g = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ferner

$$D_j = A_j + 2kB_j + k^2 C_j \quad (j = 0,\ 1,\ 2.\ 3) \tag{6}$$

$$S = D_2; \quad T = D_3 \tag{7}$$

ferner

$$X = x'; \quad Y = y'; \quad Z = z'; \quad R = X'^2 + Y'^2 + Z'^2$$

woraus:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = w \tag{8}$$

endlich bezeichne ϱ den Krümmungsradius von s und

$$H = \frac{E + 2kF + k^2 G^2}{w} \tag{9}$$

die Krümung des Normalschnitts, welcher s berührt.

Nun ist bekanntlich

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{X}{\sqrt{w}}\right)^2 + \ldots = \left(\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial X}{\partial s} - \frac{X}{2w^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{w}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + \ldots\right] - \frac{1}{w^2}\frac{\partial w}{\partial s}\frac{X\partial X + \ldots}{\partial s} + \frac{X^2 + \ldots}{4w^3}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2$$

nach Gl. (8)

$$= \frac{1}{w}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + \ldots\right] - \frac{1}{4w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2$$

nach Gl. (3)

$$= \frac{1}{w^2}\left[\left(X' + k'\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \ldots\right] - \frac{1}{4w^3}[w' + 2(f + kg)k']^2 \qquad (10)$$

Nach Gl. (1) hat man:

$$X = x' = \frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$X' = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2k\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + k^2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

d. i. nach Gl. (4) (6) (7):

$$X' = D\frac{\partial x}{\partial u} + D_1\frac{\partial x}{\partial v} + Hwp$$

$$X'\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots = Df + D_1 g = T$$

$$X'^2 + \ldots = D^2 e + 2DD_1 f + D_1^2 g + H^2 w^2$$

was sich auch schreiben lässt:

$$R = SD + TD_1 + H^2 w^2 \qquad (11)$$

Jetzt lautet Gl. (10):

$$\frac{w^3}{\varrho^2} = Rw - \tfrac{1}{4}w'^2 + k'[2Tw - (f + kg)w'] + k'^2[gw - (f + kg)^2] \qquad (12)$$

Dies hat die Form

$$w^3\left(\frac{1}{\varrho^2} - H^2\right) = L + 2k'M + k'^2 N \qquad (13)$$

Die Klammer zur Linken bedeutet das Quadrat der geodätischen Krümmung und sei bezeichnet durch K^2. Die Werte der Coefficienten sind nach Gl. (12):

$$N = eg - f^2 = t^2$$

ferner, weil nach Gl. (2) (1) (5) (7)

$$\begin{aligned} w' &= \frac{\partial e}{\partial u} + k\frac{\partial e}{\partial v} + 2k\frac{\partial f}{\partial u} + 2k^2\frac{\partial f}{\partial v} + k^2\frac{\partial g}{\partial u} + k^3\frac{\partial g}{\partial v} \\ &= 2(A_2 + 2kB_2 + kA_3 + k^2C_2 + 2k^2B_3 + k^3C_3) \\ &= 2(S + kT) \end{aligned} \tag{14}$$

ist:

$$\begin{aligned} M &= Tw - (S + kT)(f + kg) \\ &= T(e + kf) - S(f + kg) \\ &= (D_1 - kD)t^2 \end{aligned}$$

$$L = (SD + TD_1)w - (S + kT)^2$$

und zwar ist

$$Dt^2 = Sg - Tf; \quad D_1 t^2 = Te - Sf$$

Drückt man überall D und D_1 in S und T aus, so ergibt sich identisch:

$$LN - M^2 = 0$$

daher ist die rechte Seite der Gl. (13) ein Quadrat, und die Gleichung lautet:

$$w^3K^2 = \left(k't + \frac{M}{t}\right)^2$$

woraus:

$$k' = kD - D_1 \pm w^{\frac{3}{2}}\frac{K}{t} \tag{15}$$

Ist die geodätische Krümmung gegeben, so ist K bekannte Function von u, v, desgleichen e, f, g, t; w, S, T, D, D_1 enthalten ausserdem k im 2. Grade. Die Gleichung, welche die Curve bestimmt, ist 2. Ordnung; da sie $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ explicit gibt, so lässt sich die Lösung in taylor'scher Reihe ausdrücken. Ist statt dessen die Krümmung im Raume gegeben, so ist

$$K = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - H^2}$$

zu setzen und H in u, v, k bekannt

Ist die Fläche abwickelbar, so ist für constantes K die Linie offenbar ein geodätischer Kreis, daher die Integration der Gl. (15) immer ausführbar.

XI.

Miscellen.

1.

Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Neoide mittelst eines Kegelschnittes.

Bekanntlich ist die Polar-Subnormale der Neoide constant und gleich a, wenn ihre Polargleichung

$$r = b + a\varphi$$

lautet. Diese Eigenschaft lässt sich auch elementar mit Benutzung ähnlicher Dreiecke ableiten.

Ist O der Pol, P irgend ein Punkt der Neoide und K der mit dem Halbmesser a beschriebene Polar-Subnormalenkreis, so erhält man die Normale N des Punktes P, wenn man in O den auf dem Leitstrahl

$$OP = r$$

senkrechten Halbmesser OQ errichtet und Q mit P verbindet.

Um den Krümmungsmittelpunkt M zu finden, hat man den Schnittpunkt von N mit der unendlich nahen Normale zu suchen Der unendlich nahe Punkt P' der Neoide liegt aber in der Tangente T des Punktes P, die auf N senkrecht steht. Errichtet man in O auf OP' eine Senkrechte, so schneidet diese K in Q', und es ist $Q'P'$ die unendlich nahe Normale N'. Da aber Q' unendlich nahe an Q zu liegen kommt, so kann man Q' auch als in der Tangente L des Kreises K, mit dem Berührungspunkte Q, gelegen betrachten. Wenn man aber einen rechten Winkel um seinen Scheitel O herumdreht, so schneiden seine Schenkel zwei feste Geraden L und T

in zwei projectivischen Punktreihen $QQ' \ldots$ und $PP' \ldots$, deren Verbindungslinien bekanntlich einen Kegelschnitt einhüllen, der auch die festen Geraden in den Punkten A und B berührt, die man erhält, wenn man O mit C verbindet und auf OC in O eine Senkrechte errichtet. Die zwei unendlich nahen Normalen N und N' der Neoide sind demnach auch zwei unendlich nahe Tangenten des Kegelschnittes, und ihr Schnittpunkt, der Krümmungsmittelpunkt M, der Berührungspunkt von N, und als solcher der vierte harmonische Punkt zu D (dem Schnittpunkt der Tangente N mit der Verlängerung der Berührungssehne AB) in Bezug auf QP. Er kann demnach, nachdem einmal der Polar-Subnormalenkreis gezogen wurde, mit dem Lineal allein gefunden werden, dass man im Vierecke $AQPB$ die Diagonalen zieht, und ihren Schnittpunkt E mit C verbindet.

Der normalen Schenkel wegen ist

$$\text{Wkl. } DOQ = QCO \qquad 1)$$

Da aber OQ auf QC und OP senkrecht steht, so ist

$$\text{Wkl. } QCO = COP$$

daher mittelst 1)

$$\text{Wkl. } DOQ = \text{Wkl. } COP \qquad 2)$$

Der rechten Winkel bei O und P wegen ist $CPOD$ ein Kreisviereck, daher die Peripheriewinkel ODQ und OCP einander gleich, und mittelst 2)

$$\triangle DQO \sim \triangle OCP$$

daher

$$DQ : CP = a : r \qquad 3)$$

Endlich sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke QPC und QPO ähnlich, da die Winkel QCP und OQP der normalen Schenkel wegen einander gleich sind, daher

$$CP : a = PQ : r$$

und da im rechtwinkligen Dreiecke OQP

$$PQ = \sqrt{a^2 + r^2}$$

auch

$$CP = \frac{a\sqrt{a^2 + r^2}}{r}$$

Dies in 3) eingesetzt folgt:

$$DQ = \frac{a^2\sqrt{a^2 + r^2}}{r^2}$$

Der harmonischen Punkte wegen ist aber ohne Rücksicht auf die Vorzeichen der Strecken

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{DP}{DQ}$$

daher, wenn man den Krümmungsradius mit ϱ bezeichnet:

$$\frac{\varrho}{\sqrt{a^2+r^2}-\varrho} = \frac{\sqrt{a^2+r^2}+\frac{a^2\sqrt{a^2+r^2}}{r^2}}{\frac{a^2\sqrt{a^2+r^2}}{r^2}}$$

woraus sich der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius der Neoide

$$\varrho = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$$

ergibt.

Wien, im October 1891.

Wilhelm Rulf.

2.

Ueber den Einfluss der Aenderung der Excentricität der Erdbahn auf die mittlere Umlaufszeit des Mondes.

Wie aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung und dem Gravitationsgesetz folgt, wirkt ein ausserhalb eines Systems von Himmelskörpern befindlicher Körper annähernd so auf dasselbe, als ob die Masse sämtlicher Körper des Systems in dem Schwerpunkte desselben vereinigt wäre. Für den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Erde und des Mondes beträgt die Genauigkeit dieser Bestimmung in Bezug auf die Entfernung von der Sonne annähernd

$$\frac{Mm_1 r^4}{m_2 R^4}$$

wo M, sowie m_1 und m_2 die Masse der Sonne, bezüglich des Mondes und der Erde, R und r die Radien der Erd- bezüglich der Mondbahn bezeichnen, oder

$$\frac{1}{224 \cdot 400 \cdot 80}$$

(Prof. Dr. Dziobek, Die math. Theorieen der Planetenbewegungen. Seite 157).

Es seien x_1 und x_2 u. s. w. die Coordinaten von m_1 und m_2 in Bezug auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt s, x und y die Coor-

dinaten von m_1 in Bezug auf den Schwerpunkt der Erde, l die Entfernung des Schwerpunktes s von der Sonne S, die X-Achse falle mit l oder deren Verlängerung zusammen, die Constante der Anziehung k sei der Einfachheit wegen vorläufig $= 1$, dann ist, wenn l vorläufig als constant und s als ruhend gedacht, ferner die Neigung i der Mondbahn nicht berücksichtigt wird,

$$1) \quad \frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{M(l \mp x_1)}{\{(l \mp x_1)^2+y_1^2\}^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{M(l \pm x_2)}{\{(l \pm x_2)^2+y_2^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{My_1}{\{(l \mp x_1)^2+y_1^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{My_2}{\{(l \pm x_2)^2+y_2^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

wo für m_1+m_2 der Ausdruck μ gesetzt ist. Das Vorzeichen $-$ oder $+$ wird dadurch bestimmt, je nachdem Annäherung oder Entfernung der Körper durch die betreffende Componente bewirkt wird. Die Werte der Coordinaten sind als absolut zu denken.

Da

$$x = x_1+x_2 = \frac{\mu}{m_2}x_1 = \frac{\mu}{m_1}x_2$$

so erhält man, wenn man Gleich. 1) mit $2\,dx$ und Gleich. 2) mit $2\,dy$ mult., darauf beide Gleichungen addirt und integrirt

$$3) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V_1^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{2M\mu}{m_2 r_1} + \frac{2M\mu}{m_1 r_2} - (b_1+b)$$

wo r, sowie r_1 und r_2 die bezüglichen Entfernungen der Himmelskörper, b_1 und b Constante bezeichnen.

Ohne Berücksichtigung von M würde man erhalten haben

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - b$$

ferner in bekannter Weise

$$r^2 dv = c\,dt$$

(Flächensatz) und hieraus die Umlaufszeit

$$4) \quad T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

wo a die halbe grosse Achse bezeichnet.

Führt man in Gleich. 4) die Constante

$$b = \frac{\mu}{a}$$

ein, so erhält man

5) $$T = \frac{2\pi\mu}{b^{\frac{3}{2}}}$$

Diese Formel lässt sich erweitern, so dass sie näherungsweise die Umlaufszeit ergiebt, wenn M berücksichtigt wird.

In der Gleichung

$$r^2 dv = c\,dt$$

wird statt c dann $F(t)$ zu setzen sein. Für eine bestimmte Zeit t_1 habe nun $F(t_1)$ den Wert c_1; setzt man nun aus Gleich. 3), deren rechte Seite man auch schreiben kann

6) $$\frac{2\left\{\mu + \left(\frac{M\mu}{m_2 r_1} + \frac{M\mu}{m_1 r_2} - b_1\right) r\right\}}{r} - b = \frac{2\mu_1}{r} - b$$

diesen Ausdruck μ_1, wo r im Zähler, sowie r_1 und r_2 jetzt auch bestimmte zu t_1 gehörige Werte bezeichnen sollen, in Gleichung 5) statt μ, so erhält man eine Umlaufszeit, die durch diese Werte bedingt wird. Giebt man nun r, sowie r_1 und r_2 alle möglichen Werte, welche diese Grössen annehmen können, und dividirt durch die Anzahl derselben, so wird man eine Umlaufszeit erhalten, welche annähernd der wirklichen entspricht. Da durch den Einfluss von M die Zeit T nur um etwa 0,04 Tage vergrössert wird, so kann man zu dieser angenäherten Berechnung den aus Gleich. 4) sich ergebenden Wert von T benutzen. Die Anzahl der verschiedenen Werte von r_1 und r_2 ist dann

$$\frac{T}{dt} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\eta^2}}{r^2 dv}$$

wo η die numerische Excentricität der Mondbahn bezeichnet. Nun ist, wenn r_3 und r_4 die Entfernung der Körper m_1 und m_2 vom gemeinschaftlichen Schwerpunkt s und φ den von r_3 und l eingeschlossenen Winkel bezeichnet,

$$r_1^2 = l^2 - 2l r_3 \cos\varphi + r_3^2$$

ebenso

$$r_2^2 = l^2 + 2l r_4 \cos\varphi + r_4^2$$

ferner ist

$$d\varphi = dv$$

Für t_0 ist $\varphi = 0$, für $t = T$ ist $\varphi = 2\pi$.

Wegen Drehung der Apsidenlinie der Mondbahn kann man annähernd r als unabhängig von φ ansehen und für r einen Mittelwert setzen, da r zwischen $a(1+\eta)$ und $a(1-\eta)$ liegen muss

Die Constante b_1 muss so bestimmt werden, dass in Gleich. 3)

$$r_1 = r_2 = l$$

gesetzt wird, da dann M auf s sowol als auch auf m_1 und m_2 in gleicher Stärke wirkt, also keinen ändernden Einfluss auf m_1 und m_2 in Bezug auf das System ausübt.

Dann würden m_1 und m_2, sowie s auf der Peripherie eines mit l als Radius beschriebenen Kreises, anstatt auf der Sehne zwischen m_1 und m_2 liegen. Bezeichnet s_1 den auf dieser Sehne liegenden Schwerpunkt, so ist, wenn wir die Entfernung zwischen s und s_1 mit p bezeichnen, da die fast gleichschenkligen Dreiecke Sm_1s und sm_2s_1 ähnlich sind,

$$p = \frac{m_1 m_2 r^2}{\mu^2 l}$$

Diese Formel ist wegen der Kleinheit von r im Verhältniss zu hinreichend genau und giebt annähernd

$$p = \frac{1}{80.81.400^2}$$

wenn $l = 1$ gesetzt wird. Annähernd ebenso gering ist der Unterschied, wenn r_1 und r_2 etwas grösser als l genommen werden, indem man durch s eine zu der Sehne parallele Tangente sich gezogen denkt und auf dieser m_1 und m_2 annimmt. Verwandelt man nun

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{l\left(1 - \frac{2lr_3\cos\varphi - r_3^2}{l^2}\right)^{1/2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{l\left(1 + \frac{2lr_4\cos\varphi + r_4^2}{l^2}\right)^{1/2}}$$

vermittelst des binomischen Satzes in eine nach Potenzen von

$$-\frac{2lr_3\cos\varphi - r_3^2}{l^2} \quad \text{bezüglich} \quad \frac{2lr_4\cos\varphi + r_4^2}{l^2}$$

fortschreitende Reihe, deren Convergenz sosort einleuchtet, da

$$\frac{r}{l} \quad \text{etwa} \quad \frac{1}{400}$$

ist, multiplicirt dann mit

$$\frac{r^2 d\varphi}{2\pi a^2 \sqrt{1-\eta^2}}$$

und integrirt zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man, wenn man b wieder $= \frac{\mu}{a}$ setzt, im Zähler und Nenner durch μ dividirt und schliesslich $k^2\mu$ und k^2M für μ und M schreibt,

7) $$T_1 = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{\mu}} \left\{1 + \tfrac{1}{4} \frac{M r_0^3}{\mu l^3} + \ldots\right\}$$

Die folgenden Glieder sind von höherer Ordnung. Für r_0^3 ist ein Mittelwert zu setzen, der zwischen $a^3(1+\eta)^3$ und $a^3(1-\eta)^3$ liegt. Nimmt man die halbe Summe der beiden Grenzwerte, so erhält man

$$r_0^3 = a^3(1+3\eta^2+\ldots)$$

Da die Apsidenlinie der Mondbahn sich nicht nach dem Flächengesetze

$$r^2 dv = c\,dt$$

bewegt, diese Bewegung vielmehr von M abhängig, die Entfernung $M s$ aber fast constant ist, so kann man r als unabhängig von φ ansehen und für r_0^3 den bei der Berechnung von Gleich. 7) sich ergebenden Mittelwert

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^5(1-\eta^2)^5 dv}{a^2\sqrt{1-\eta^2}(1+\eta\cos v)^5}$$

setzen, da

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos v}$$

welcher ebenfalls

$$= a^3(1+3\eta^2+\ldots) \text{ beträgt.}$$

Der Einfluss, den die Neigung i der Mondbahn ausübt, ist nur gering; er ist kleiner als $\frac{3}{8000}$ des 2. in Klammern eingeschlossenen Gliedes der Gleichung 7), denn es ist

$$\sqrt{\frac{l^2 \pm 2lr\cos i + r^2}{(l \pm r)^2}} = 1 \pm \frac{2lr\sin^2 \frac{1}{2} i}{(l+r)^2} + \ldots \text{ oder}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{200 \cdot 400} + \ldots$$

wenn i etwa $5\frac{1}{2}^0$ gesetzt wird.

Denkt man sich nun den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Erde und des Mondes durch die elliptische Bahn um die Sonne bestimmt und bezeichnet l jetzt durch R, so lässt sich zwischen R_1 und R_2 am Anfang und Ende eines Mondumlaufs immer ein mittlerer Wert R_m denken, welcher zwischen diesen liegt, so dass die Gleich. 7) bestehen bleibt, wenn man für l den Wert R_m setzt. Diese R_m werden, da man T_1 als irrational zur Umlaufszeit der Erde annehmen kann, nach einer grossen Zahl von Umläufen proportional dem Flächensatz verteilt liegen; nur in der Nähe der grossen Achse $2A$

werden innerhalb eines Winkels von etwa 7^0 zu beiden Seiten derselben diese R_m nicht vorkommen. Da aber der Wert eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner proportional wachsen, so kann man, um einen Näherungswert für die mittlere Umlaufszeit des Mondes zu erhalten, sich die Werte R_m in dem Winkel v_1 der Erdbahn zwischen den Grenzen

$$v_1 = 0 \quad \text{und} \quad v_1 = 2\pi$$

in der angegebenen Weise verteilt denken. Bezeichnet man nun die numerische Excentricität der Erdbahn mit ε, multiplicirt

$$\frac{1}{R^3} \quad \text{mit} \quad \frac{R^2 dv_1}{2\pi A^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

und integrirt zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man

$$8) \quad T_\varepsilon = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{\mu}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{4} \frac{M}{\mu} \frac{a^3(1+3\eta^2+\ldots)}{A^3(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} + \ldots \right\}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach ε, setzt

$$d\varepsilon = -0{,}000053$$

so erhält man annähernd die von der Aenderung der Excentricität der Erdbahn abhängige säculare Beschleunigung der mittleren Umlaufszeit des Mondes. Dieselbe beträgt also

$$9) \quad \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{\mu}} \cdot \tfrac{1}{4} \frac{M}{\mu} \frac{a^3(1+3\eta^2)\,3\varepsilon\, d\varepsilon}{A^3(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die von ε abhängigen Aenderungen von i und η gegen $d\varepsilon$ unbedeutend sind.

Die Gleich. 8) kann auch dazu dienen, annähernd das Verhältniss $\frac{M}{\mu}$ zu bestimmen, wenn das Verhältniss $\frac{a}{A}$ und die übrigen Grössen ausser $\frac{M}{\mu}$ bekannt sind.

Es ist der aus der Ellipse sich ergebende Wert

$$\eta^2 = 1 - \frac{bc^2}{\mu^2}, \quad c^2 = r^2 V^2 \sin^2\alpha$$

wo α den vom Radiusvector und der zugehörigen Tangente gebildeten Winkel bezeichnet.

Der kleinste Wert von $\sin^2\alpha$ ist $1-\eta^2$, denn es ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r\,d\varphi}{dr}, \qquad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos v}, \quad \vartheta = -\frac{(1+\cos v)\cos v}{\eta\sin^2 v} - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\eta^2}{\eta\sqrt{1-\eta^2}}$$

u. s. w., $\sin^2\alpha$ also stets fast 1, da $\eta < 0{,}06$ ist.

Setzt man in der Gleichung

$$\eta^2 = 1 - \frac{b r^2 V^2 \sin^2\alpha}{\mu^2}$$

den Wert von $\sin^2\alpha = 1$, für V^2 den Wert V_1^2 aus Gleichung 3), für μ den Wert μ_1 aus Gleich. 6), für b den Ausdruck $\frac{\mu}{a}$, so sieht man, dass der Ausdruck $\frac{b r^2 V^2}{\mu^2}$, der ohne Berücksichtigung der Einwirkung von M gleich $\frac{1-\eta^2}{1}$ also nahe $= 1$ ist, mit Berücksichsigung von M im Zähler um ein Glied von der Ordnung $M\frac{r^3}{R^3}$, im Nenner um mehr als das Doppelte dieses Gliedes vermehrt wird, der Ausdruck $\frac{b r^2 V^2}{\mu^2}$ also kleiner, folglich der elliptische Wert von η^2 durch die Einwirkung von M auf das System vergrössert wird. Daraus folgt aber auch, dass in Gleich. 9) $\frac{d\eta}{d\varepsilon}$ vernachlässigt werden kann, da diese Grösse gegen die andern Glieder von der Ordnung $\frac{Mr^3}{R^3}$, also überhaupt von der Ordnung $\left(M\frac{a^3}{A^3}\right)^2$ ist.

Dass überhaupt eine Beschleunigung der Umlaufszeit des Mondes stattfinden muss, wenn ε kleiner wird, erkennt man auch schon daraus, dass der Wert der mittleren Anziehung von M auf einen in einer Ellipse sich um denselben bewegenden Körper, nach der Zeit berechnet, grösser ist als derjenige, welcher sich ergiebt, wenn ein Körper sich in einem mit der halben grossen Achse beschriebenen Kreise um M bewegt; denn es ist

$$\frac{M}{2\pi A^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int_0^{2\pi}\frac{R^2\,dv_1}{R^2} = \frac{M}{A^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

für den Kreis erhält man $\frac{M}{A^2}$, das Verhältniss ist also

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} : 1$$

Setzt man in Gleich. 8) $T_r = 27{,}321\,660\,890$ Tage, $M = 1$, $k = 0{,}017\,2021$, $\varepsilon = 0{,}0168$, $\eta = 0{,}054\,908$, $a = 51\,804{,}96$ geogr. Meilen, die Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne 8″, 8737, also

$$\log \frac{a}{A} = 0{,}413\,836\,33 - 3$$

und löst die Gleich. 8) oder

$$M^{\frac{3}{2}} + PM^{\frac{1}{2}} = Q, \quad \text{wo} \quad M = \frac{1}{\mu}$$

nach $M^{\frac{1}{2}}$ auf, so erhält man

$$M^{\frac{1}{2}} = 565{,}6426, \quad \text{also} \quad M = 319\,951{,}54$$

Gleich. 9) giebt dann als säculare Beschleunigung der mittleren Umlaufszeit des Mondes

0, 000 000 10288 Tage oder 0, 008 8894 Secunden

Bemerkung. Nach den in jüngster Zeit erfolgten Bestimmungen beträgt die Sonnenparallaxe 8″, 880 mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0″, 002. C. Benz.

3.

Ueber harmonische Strahlen.

Zum Begriff der harmonischen Strahlen gelangt man sehr schnell auf folgende Weise. Man nehme eine feste Gerade als Axe und einen festen Punkt in ihr als Coordinatenanfang an. Von jedem zu bestimmenden Punkte ziehe man in 2 festen Richtungen Strahlen, welche die Axe in 2 Punkten mit den Abständen x und y vom Coordinatenanfang treffen. Schreibt man in diesem Coordinatensystem die Gleichung einer Geraden

$$\frac{x - A}{y - A} = B$$

so ist B eine Function nur der auftretenden Winkel und giebt an, in welchem Verhältniss die Gerade diejenige Strecke teilt, welche die beiden Strahlen von einem ihrer Punkte auf der Axe abschneiden.

Nun wird für die Gerade durch die Punkte

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad \text{und} \quad x = x_2, \quad y = y_2$$

$$B' = \frac{x_1 = x_2}{y_1 - y_2}$$

für die Geraden durch die Punkte

$$x = x_1, \quad y = y_2 \quad \text{und} \quad x = x_2, \quad y = y_1$$

$$B'' = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} = - B'$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass Strahlen, welche in 4 gewissen Richtungen durch einen Punkt gehen, die Eigenschaft haben, jede Gerade harmonisch zu teilen, sowie dass diese Richtungen die der Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms sind.

Rudolf Skutsch.

4.

Zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels.

Es giebt verschiedene Methoden zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels; für die wirklich auszuführende Construction wird man aber immer die versuchsweise Teilung jeder solchen Näherungsmethode vorziehen.

Die nachfolgenden Untersuchungen haben deshalb auch nur den Zweck, über einige Beziehungen, die sich bei der Dreiteilung eines Winkels ergeben, zu berichten.

I.

Es sei der Winkel CAB in drei gleiche Teile zu teilen.

Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser OA einen Halbkreis über den Schenkel AB, halbire OB in M und ziehe MN senkr. auf OB, ferner $MK \parallel OH$, wodurch

$$\text{Wkl. } KMB = 2\alpha$$

wird, so liegt innerhalb des Bogenstückes NP der Teilungspunkt D, welcher den Bogen BH, der zum Peripheriewinkel α gehört, in

$$HD = \tfrac{2}{3}\alpha \quad \text{und} \quad BD = \tfrac{4}{3}\alpha \quad \text{zerlegt.}$$

Denkt man sich die Linie AD bereits gezogen, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke, welche ähnlich sind

$$\triangle\ AOD \text{ ähnlich } \triangle\ ODE$$

weil die den gleichen Schenkeln gegenüberliegenden Winkel in beiden Dreiecken $\frac{2}{3}\alpha$ sind.

Daraus fogt die Proportion, wenn man für den Halbmesser immer r schreibt:

$$r : ED = AD : r \qquad \text{(I)}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABL ist D der Fusspunkt der Senkrechten, die vom Scheitel des rechten Winkels B auf die Hypotenuse gefällt werden kann, daher

$$4r^2 = AD \,.\, AL \qquad \text{(II)}$$

Aus der Verbindung von (I) und (II) folgt:

$$ED = \tfrac{1}{4}AL \qquad \text{(III)}$$

Wäre die Länge AL bekannt, so würde $\frac{1}{4}AL$ von O nach E aufgetragen die Teilungslinie AD ergeben. Die Kenntniss von der Länge AL würde natürlich die Dreiteilung auch aus dem Dreieck ABL finden lassen.

Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks OED lässt auch folgenden Ausdruck zu:

Wenn man auf der Linie OH einen Punkt E aufsucht, dessen Entfernung vom Mittelpunkt O gleich ist derjenigen von der Peripherie in der Richtung nach AL gemessen, so geht durch E die Teilungslinie.

Nach der Construction $OM = \frac{1}{4}AB$ wird

$$GF = \tfrac{1}{4}AL \qquad \text{(IV)}$$

somit:

$$GF = ED \qquad \text{(V)}$$

Die Dreiecke OGE und MFK sind ebenfalls ähnlich, und zwar sind die Seiten des kleineren zwei Drittteile derjenigen des grösseren Dreiecks.

Aus (V) folgt

$$GE = FD \qquad \text{(VI)}$$

daher

$$FD = \tfrac{2}{3}FK \qquad \text{(VII)}$$

und diese Gleichung kann man zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels benutzen.

Nachdem man die Linien MN und MK nach früher gezogen hat, verbindet man den Durchschnittspunkt P mit A und teilt die Strecke PQ in 3 gleiche Teile; zieht man durch den ersten Teilpunkt R die Linie MR, so schneidet diese den Kreis sehr nahe dem Punkte D.

Es würde diese Construction den Punkt D absolut genau geben, wenn $PQ \parallel KF$ gezogen werden könnte, was wieder nicht sein kann, weil sonst die Teilung bereits bekannt sein müsste.

Noch genauer könnte man an den Punkt D heran kommen, wenn man eine zweite Linie nach A oberhalb D ziehen würde, die innerhalb des Winkels NMK fallende Strecke ebenfalls in drei gleiche Teile teilte, und den ersten Teilpunkte oben mit dem ersten Teilpunkte (R) unten verbinden möchte, diese Linie schneidet den Kreisbogen noch näher an D.

II.

Ein Papierstreifen als Trisector.

Wenn man in der vorherigen Fig. 1 das Dreieck AOE betrachtet, so erkennt man, dass

$$\text{Wkl. } EAO = \tfrac{1}{3} EOB$$

und dass

$$AG = 2OE \text{ ist.}$$

Auf Grundlage dieser Beziehung lässt sich die Dreiteilung eines Winkels mit einem Papierstreifen ausführen. Fig. 2.

Es sei CAB der zu teilende Winkel; man verlängere AB über den Scheitel nach D, und errichte AF senkr. auf AB; hierauf wähle man auf dem Schenkel AC den Punkt E beliebig und trage die Strecke AE zweimal auf einen geradlinig beschnittenen Papierstreifen auf; es sei

$$MN = 2AE$$

Nun lege man den Papierstreifen so auf die früher gezogenen Hülfslinien, dass N auf AD und M auf AF zu liegen kommt, wobei noch die Verlängerung von MN durch den Punkt E gehen muss. Dies erreicht man leicht nach einigen Verschiebungen.

Liegt der Papierstreifen richtig, dann kann man längs MN eine Bleistiftlinie ziehen, und dann ist

$$\text{Wkl. } MNA = \tfrac{1}{3} EAB$$

Dieses Verfahren kann auch zur Dreiteilung eines stumpfen

Winkels angewendet werden. Es liegt dann der Punkt E im Winkelraum DAF, und auf der Strecke MN zwischen den Punkten M und N.

Anmerkung. Es lässt sich nach diesem leicht ein Instrument zusammenstellen, welches aus einem rechten Winkel und zwei beweglichen Schenkeln besteht, das als Trisector für spitze Winkel mit aller Genauigkeit verwendet werden könnte

III.

Ein auf die Dreiteilung eines Winkels Bezug habender Lehrsatz ist noch folgender:

Hat ein Sehnenwinkel die Eigenschaft, dass die Bögen, auf welchen er steht, sich verhalten wie 1 : 2, so ist der auf denselben Bögen stehende Secantenwinkel ein Drittel des Sehnenwinkels.

Beweis. Es sei α der Sehnenwinkel, β der Secantenwinkel, welche beide auf denselben Bögen aufstehen, b und $2b$ diese Bögen im Kreise, so ist

$$\text{Wkl. } \alpha = \tfrac{1}{2}b$$
$$\text{Wkl. } \beta = \tfrac{1}{2}b$$

somit

$$\text{Wkl. } \beta = \tfrac{1}{3}\alpha$$

A. v. Frank,
Professor a. d. k. k. Staatsgewerbeschule in Graz.

5.

Asymtotischer Wert der Facultätencoefficienten.

Bekanntlich ist der aus der Zalenreihe 1, 2, 3 ... $n-1$ gebildete Facultätencoefficient

$$C^n{}_k = (-1)^k \binom{n-1}{k} \left[D^k \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^n \right]_{x=0}$$

$$= (n-k) \binom{n+k}{2k} \left\{ \frac{\binom{2k}{0}}{n+k} C^{-k}{}_k - \frac{\binom{2k}{1}}{n+k-1} C_k{}^{-(k-1)} + \frac{\binom{2k}{2}}{n+k-2} C_k{}^{-(k-2)} - \ldots \right.$$

$$\ldots+(-1)^{k-1}\frac{\binom{2k}{k-1}}{n+1}C_k^{-1}\Big\} \qquad 1)$$

wo

$$C^{-m}_k$$
$$=\frac{1}{m!}\Big[\binom{m}{0}m^{m+k}-\binom{m}{1}(m-1)^{m+k}+\ldots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}1^{m+k}\Big]$$
$$=\frac{1}{m!}\left[D^{m+k}(e^x-1)^m\right]_0 \qquad 2)$$

Ersetzt man in 1) die C^{-m}_k durch die Nullwerte, dividirt beiderseits durch n^{2k}, bringt den ersten Factor rechter Hand $n-k$ in die Klammer und lässt bei constant bleibendem, endlichem k den Exponenten n über alle Grenzen zunehmen, so ist

$$\lim\frac{1}{n^{2k}}\binom{n+k}{2k}=\lim\frac{1}{(2k)!}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{(2k)!}$$

ferner

$$\lim\frac{n-k}{n+k}=\lim\frac{n-k}{n+k-1}=\ldots=\lim\frac{n-k}{n+1}=1$$

folglich, wenn noch

$$+(-1)^k\binom{2k}{k}D^k(e^x-1)^0{}_0=0$$

hinzugefügt wird,

$$\lim\frac{1}{n^{2k}}C^n_k=\frac{1}{(2k)!}\left\{\frac{1}{k!}\binom{2k}{0}D^{2k}(e^x-1)^k{}_0\right.$$
$$-\frac{1}{(k-1)!}\binom{2k}{1}D^{2k-1}(e^x-1)_0{}^{k-1}+\frac{1}{(k-2)!}\binom{2k}{2}D^{2k-2}(e^x-1)^{k-2}{}_0\ldots$$
$$\left.\ldots+(-1)^{k-1}\binom{2k}{k-1}D^{k+1}(e^x-1)^1{}_0+(-1)^k\binom{2k}{k}D^k(e^x-1)_0{}^0\right\}$$

Wenn nun von der leicht beweisbaren Formel

$$\binom{2k}{h}\left[D^{2k-h}(e^x-1)^{k-h}\right]_0=\frac{1}{h!}D^{2k}\left[x^h(e^x-1)^{k-h}\right],$$

Gebrauch gemacht, sodann

$$\frac{1}{h!(k-h)!}=\frac{1}{k!}\binom{k}{h}$$

gesetzt und schliesslich der gemeinsame Factor $\frac{1}{k!}$ herausgehoben wird, so ist der Ausdruck

$$\lim \frac{C^n{}_k}{n^{2k}} = \frac{1}{k!\,(2k)!}\Big[\binom{k}{0} D^{2k}(e^x-1)^k{}_0 - \binom{k}{1} D^{2k}x(e^x-1)^{k-1}{}_0$$
$$+ \binom{k}{2} D^{2k}x^2(e^x-1)^{k-2}{}_0 - + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} D^{2k}x^{k-1}(e^x-1)^1{}_0$$
$$+ (-1)^k \binom{k}{k} D^{2k}x^k(e^x-1)^0{}_0\Big]$$

in seiner jetzigen Form unschwer als $2k$ter Differentialquotient von

$$(e^x-1-x)^k = \left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^k = \frac{x^{2k}}{2^k} + \frac{k}{2^{k-1}3!}x^{2k+1} + \ldots$$

zu erkennen, daher identisch mit

$$\left\{\frac{(2k)!}{2^k} + \frac{k(2k+1)!}{2^{k-1}3!}x + \ldots\right\}_{x=0} = \frac{(2k)!}{2^k}$$

Es ist somit

$$\lim \frac{1}{n^{2k}} C^n{}_k = \frac{1}{k!\,2^k} \qquad 3)$$

Hieraus folgt noch

$$\lim \frac{1}{n^{4k}} C^n{}_{2k} = \frac{1}{(2k)!\,2^{2k}}$$

$$\lim \frac{1}{n^{4k}} (C^n{}_k)^2 = \frac{1}{(k!)^2\,2^{2k}}$$

mithin

$$\lim \frac{(C^n{}_k)^2}{C^n{}_{2k}} = \binom{2k}{k} \qquad 4)$$

Endlich wäre zu bemerken, dass das Ergebniss 1) mit der bekannten Formel

$$C^{n+1}{}_k = C^n{}_k + n\,C^n{}_{k-1}$$

nicht im Widerspruch steht.

Nach Einsetzung der Grenzwerte kommt nämlich

$$\lim \frac{(n+1)^{2k}}{k!\,2^k} = \lim \frac{n^{2k}}{k!\,2^k} + \lim n \cdot \frac{n^{2k-2}}{(k-1)!\,2^{k-1}}$$

oder

$$\lim (n+1)^{2k} = \lim (n^{2k} + 2k.n^{2k-1})$$

Franz Rogel.

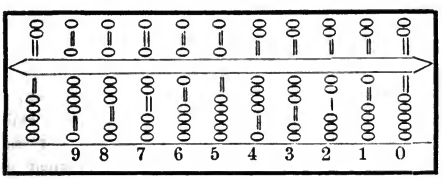
6.

Ueber die Verwendung des Rechenbrettes zur Darstellung beliebiger Zahlensysteme.

Der Gedanke, unser dikadisches Zahlensystem durch ein bestimmtes anderes zu ersetzen, ist nicht neu. Napoleon, dem ein solcher Plan vorgelegt wurde, soll geantwortet haben: „Dann rechne man erst die Logarithmen in das neue System um!“ Ein anderer Einwand hätte vielleicht ebenso nahe gelegen: erst ändere man die menschliche Sprache und das menschliche Fingersystem, das der Zahlenanschauung zu Grunde liegt und ihr noch heute bei jeder Gelegenheit zu Hülfe kommt. Dem Wesen der Zahl gegenüber ist unser dekadisches System ein Zufall, und ich vermag nicht zu beurteilen, welchen Wert es haben würde, wenn es gelänge, diesen Zufall zu beseitigen. Soviel aber scheint mir einleuchtend: erstens, dass mit einem einzelnen neuen Systeme für die Wissenschaft wenig gewonnen wäre, dass es vielmehr darauf ankäme, jede beliebige Zählmethode zu ermöglichen; — und zweitens, dass dies tunlichst in so mechanischer Weise geschehen müsste, dass sich unsre dekadischen Vorstellungen und Gewohnheiten nicht störend dazwischen drängen könnten.

Das chinesische Rechenbrett

dient mir dabei als Vorbild. Dasselbe besteht aus einem flachen, länglichen Kasten, der der Länge nach durch eine Scheidewand in zwei ungleiche Hälften geteilt ist. Durch diese Scheidewand bis in die beiden äusseren Längswände sind in Abständen von etwa einem Zoll Stäbe oder Drähte gezogen. Auf jeden dieser Stäbe sind auf der grösseren, dem Rechnen zugewendeten Seite fünf, auf der kleineren Seite zwei dicke Kugeln oder flache Perlen aufgereiht. Von jenen fünf Kugeln gilt jede eine Einheit, von den zwei letztgenannten jede eine Fünfheit der betreffenden dekadischen Stelle. Die Zahlen werden notirt („angelegt“), indem man die Kugeln an die Scheidewand schiebt.



Der Stellenwert ist derselbe, wie bei den arabischen Ziffern. Man sieht, es kann auf jedem Stabe bis zu fünfzehn angelegt werden. Liegen nun aber auf einem Stabe 10 oder mehr an, so legt man auf dem nächsten Stabe (nach links zu) 1 an und schiebt dafür jene 10 nach dem Stande zurück, so machen sich Additionen und Subtractionen rein mechanisch. Die Multiplication und Division können natürlich durch $(n-1)$ malige Addition bzhw. durch n malige Subtraction geschehen, werden aber in der Regel auf kürzerem Wege ausgeführt. Die Multiplication mit Hülfe des Einmaleins, die Division mit Decimalbrüchen nach einer analogen Tabelle, die gleichfalls auswendig gelernt wird. In dieser wird stillschweigend der Dividendus mit 10 multiplicirt, und es heisst also z. B. 3 in 1 ist 3, bleiben 1; 8 in 1 ist 1, bleiben 2 u. s. w. Die übrigen Vorschriften, die der chinesische Rechenlehrer seinem Schüler giebt, sind rein technisch und dürften sich zumeist durch Uebung und Nachdenken von selbst ergeben. Die Grösse des Brettes, die Zahl der Stäbe, richtet sich nach dem Bedürfnisse des Rechners.

Man hat nun beobachtet, dass die Chinesen mit dieser einfachen Maschine die gestellten Aufgaben schneller lösen, als geübte europäische Rechner mit Bleistift und Papier. Wichtiger für unsern Zweck ist aber dies, dass jene Rechenmethode mit ihrer constructiven Anschaulichkeit fast ebenso bequem auf jedes andere Zahlensystem anzuwenden wäre. Die dazu nötige Maschine, ein

„n-adisches" Rechenbrett

wäre meiner Meinung nach in folgender Weise herzustellen: Ein Kasten, dem chinesischen ähnlich, aber grösser und allenfalls mit mehreren Zwischenwänden, welche, gleich der oberen Längswand, verstellbar sein mögen, um gleichmässige Spielräume zum Verschieben der Kugeln herzustellen; ferner zum Aufreihen möglichst viele durchbohrte Kugeln. Ist n (die Zahl, die mit 10 geschrieben werden soll) nicht zu gross, so genügt eine einzige Scheidewand. Wieviele Kugeln nun auf der unteren und auf der oberen Hälfte jedes Stabes aufgereiht werden, und welchen Wert die oberen Perlen erhalten, richtet sich nach dem Werte von n. Ich würde in dieser Hinsicht folgendes empfehlen:

I. Die Werte der oberen Kugeln zusammenaddirt seien $= n$. Sind sie also alle angelegt, so schiebt man sie nach dem äusseren Rande zurück und legt dafür auf dem nächstfolgenden Stabe (nach links zu) 1 an. Dem analog ist der Zahlenwert der sämtlichen Kugeln der unteren Abteilung gleich dem Werte einer einzelnen

Kugel in der (nächst-) oberen, sodass auch hier die Uebertragung mechanisch geschieht.

II. Ist n teilbar (keine Primzahl), so sei der Wert jeder oberen Kugel der des grössten Divisors.

III. Ist n eine Primzahl und nicht zu gross, so wären vielleicht Kugeln von zweierlei Farbe zu empfehlen. Entweder

a) man lässt die Scheidewand weg, reiht die je n Kugeln auf die Stäbe und wählt für jede fünfte Kugel oder für je fünf Kugeln der besseren Uebersicht wegen die andere Farbe; oder

b) man dividirt n mit der grössten Ziffer, die man auf einen Blick übersehen und mit einem Griffe sicher fassen kann, m, reiht auf die untere Hälfte der Stäbe m Kugeln und, wenn

$$m \times o + p = n$$

ist, auf die obere Hälfte zunächst o Kugeln, deren jeder man den Wert m beilegt und dann, als oberste, p farbige, die wieder je 1 gelten.

Bezeichne ich nun die Scheidewand durch einen doppelten Querstrich, so ist das Rechenbrett etwa folgenderweise einzurichten:

Zu II. $n = 12$

3 Kugeln, Wert 4

4 Kugeln, Wert 1

Zu III., b) $n = 17$

2 schwarze Kugeln, Wert 1
3 gelbe Kugeln, Wert 5

5 gelbe Kugeln, Wert 1

IV. Ist n eine grosse Zahl, so mag sich die Anwendung mehrerer Scheidewände empfehlen. Auch dabei muss die oberste Abteilung die Summe n darstellen. Im Uebrigen mag das Bisherige gelten. Z. B.

$n = 170$

10 schwarze Kugeln, Wert 1
2 gelbe Kugeln, Wert 80

8 Kugeln, Wert 10

10 Kugeln, Wert 1

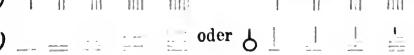
Das Verfahren ist nun in allen Fällen ganz dem chinesischen analog: ist die untere Abteilung voll, so wird ihr Inhalt in Gestalt einer Kugel auf die nächsthöhere, — ist die oberste Abteilung voll, auf die unterste Abteilung des nächstfolgenden Stabes übertragen. Dass in den beiden letzten Beispielen die obersten, zuletzt zur Verwendung kommenden Kugeln einen anderen Wert haben mussten, als die übrigen der obersten Abteilung, dürfte kaum als Uebelstand empfunden werden. Im Uebrigen ist das Verfahren so mechanisch, dass man die Aufgaben lösen, die Lösungen vor Augen sehen wird, ehe man darauf verfällt, die dargestellten Zahlen in Ziffern oder Worte zu übertragen.

Ziffern und Zahlennamen.

Notwendig wird diese Uebertragung aber doch, und es fragt sich, wie sie am einfachsten zu geschehen habe. Dass hierbei ein Einmischen unsrer Zahlzeichen und Zahlwörter nur Verwirrung stiften würde, leuchtet wol ein; das radicalste Vorgehen ist hier das beste, und auch hierin möchten die Chinesen als Muster dienen.

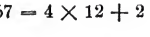
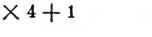
Diese haben nämlich eine doppelte Ziffernreihe, die das Rechenbrett schematisch durch senkrechte und wagerechte Striche und die Null darstellt

a)

b) 

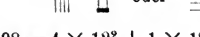
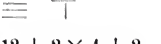
Dabei wird wol auch Kürze halber die 4 durch $\times$, die 9 durch $\overset{|}{\times}$ oder ähnlich bezeichnet. Wäre nun $n = 12$, so würde

$$57 = 4 \times 12 + 2 \times 4 + 1$$

zu schreiben sein:  oder 

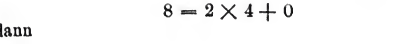
ferner

$$598 = 4 \times 12^2 + 1 \times 12 + 2 \times 4 + 2$$

 oder 

$$8 = 2 \times 4 + 0$$

wäre dann



oder $1 \times 4 + 4 \times 1$, also oder

Aehnliche Ziffern wären auch für das drei- oder mehrteilige Rechenbrett möglich, z. B.

$$n = 170$$

nach obiger Einrichtung

$$163 = 2 \times 80 + 0 \times 10 + 3$$

$$95 = 1 \times 80 + 1 \times 10 = 5$$ oder

also immer zwischen senkrechten und wagerechten Strichen abwechselnd. Vereinfachungen nach Art des chinesischen Zeichens für 4 müssten die unübersichtlichen Anhäufungen von Parallelstrichen ersetzen ohne die Anschaulichkeit zu beeinträchtigen.

Diese Ziffern kann man entweder in unser dekadisches System umrechnen und umschreiben, oder durch conventionelle Laute aussprechbar machen. Hierfür würde ich folgendes vorschlagen:

a) Die Zahl der Buchstaben oder Sylben entspreche der Zahl der Stufen aus denen die Ziffer, dem Rechenbrette folgend, zusammengesetzt ist.

b) Die Anordnung der Buchstaben und Sylben sei schematisch (*a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *ö*, *ü*, *ai*, *au*; *ba*, *be*, *bi* u. s. w.), damit der lautliche Ausdruck annähernd ebenso leicht merkbar und anschaulich werde, wie der graphische.

Jedes Ziffern- und Zahlensystem ist so zusagen eine besondere Sprache, wenn auch mit den gleichen Zeichen, und Lautelementen, d. h. diese Elemente können, gleich den Buchstaben der Algebra, jetzt diesen, jetzt jenen Zahlenwert darstellen:

$= 1a + 1b + 5$

$[a = 80 \quad b = 10]$

 $= 2a + 2$

$[a = 4]$

Das eingerichtete Rechenbrett aber gewährt ohne weiteres den Schlüssel zum Verständnisse der angelegten und aufgeschriebenen Zahlen.

Georg von der Gabelentz.

7.

Zur Theorie der Regelflächen.

Die Auffassung der Regelflächen als erzeugt von einer Geraden, die mit dem Fundamentaltrieder, d. i. der Tangente, Haupt- und Binormale einer Linie in fester Verbindung steht, ist öfters, neuerdings in den Arbeiten von Bioche und Pirondini die Grundlage von Untersuchungen gewesen. Wir wollen solche Gerade, deren Lage relativ zum Fundamentaltrieder durch den Lauf der Linie bestimmt wird, begleitende Gerade der Linie nennen und allgemein die begleitende Gerade einer Linie untersuchen, welche eine gegebene Regelfläche erzeugt.

Unmittelbar liegt hier kein Problem vor. Auf der gegebenen Regelfläche, deren Gleichungen wir schreiben

$$x = x_0 + au; \quad y = y_0 + bu; \quad z = z_0 + cu \tag{1}$$

haben wir nur eine beliebige Linie s zu ziehen, deren Tangente, Haupt- und Binormale die Richtungscosinus f, g, h; f', g', h'; l, m, n haben mögen, und die Winkel zu berechnen, welche die Erzeugende mit den 3 genannten begleitenden Axen bildet.

Dennoch bleiben einige Punkte zu untersuchen. Durch die Regelfläche F sind die Richtungscosinus a, b, c, aber nicht x_0, y_0, z_0 bestimmt, auch sind in letztern nicht bloss Constante willkürlich; vielmehr ist durch die Gl. (1) schon eine Linie auf der Fläche ausgedrückt.

Dagegen ist durch die Fläche selbst ein orthogonales Trieder bestimmt. Sei v der Parameter, als dessen Functionen a, b, c, x_0, y_0, z_0 aufzufassen sind, und zwar gemäss der Relation

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2$$

Ein Strich bedeute die Differentiation nach v (ausgenommen in $f'g'h'$). Dann entspricht der Fläche eindeutig ausser der Erzeugenden das gemeinsame Lot der consecutiven Erzeugenden mit den Richtungscosinus a_1, b_1, c_1 und die Normale zu beiden mit den Richtungscosiuus a', b', c', wo die Relation stattfindet:

$$a_1 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

Sei nun in Gl. (1) $(x_0 y_0 z_0)$ der laufende Punkt der Strictionslinie s_0. Von ihm aus gelangt man zum consecutiven, indem man erst in der Richtung $(a_1 b_1 c_1)$ eine unendlich kleine Strecke $\partial\omega$ bis zur consecutiven Erzeugenden, dann längs dieser eine unendlich kleine Strecke $\partial\psi$ bis zu ihrem Centralpunkt fortgeht. Hiernach ist

$$\partial x_0 = a\,\partial\psi + a_1\,\partial\omega; \quad \text{etc.} \tag{2}$$

Die Gleichungen der Regelfläche sind also

$$x = f(a\,\partial\psi + a_1\,\partial\omega) + au; \quad \text{etc.} \tag{3}$$

Jetzt sind a, b, c, ψ, ω als Functionen von v gegeben, wenn die Fläche es ist, und umgekehrt.

Wir betrachten nun u als Function von v; dann erzeugt der Punkt (xyz) eine beliebige Linie s auf der Fläche, deren Tangente die Richtungscosinus

$$f = \frac{1}{s'}\{a(\psi' + u') + a'u + a_1\omega'\}; \quad \text{etc.} \tag{4}$$

hat. Das Quadrat des Bogenelements ist

$$\partial s^2 = (\partial\psi + \partial u)^2 + (u\,\partial v)^2 + \partial\omega^2 \tag{5}$$

Hieraus ergeben sich in bekannter Weise die Richtungscosinus der Haupt- und Binormale, der Krümmungswinkel τ und der Torsionswinkel ϑ.

Wir wollen nun nicht allein die Erzeugende, sondern auch das aus ihrer Bewegung hervorgehende orthogonale Trieder in relativer Lage zum Fundamentaltrieder der Linie s bestimmen, indem wir alle 9 Richtungscosinus auf 2 Winkel $\varkappa$, φ zurückführen. Sei zuerst

$$fa + \ldots = \cos\varkappa = \frac{\psi' + u'}{s'} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} f'a + \ldots &= \sin\varkappa\cos\varphi \\ l\,a + \ldots &= \sin\varkappa\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dann ergibt sich durch Differentiation:

$$f\,a' + \ldots = -(\varkappa' + \tau'\cos\varphi)\sin\varkappa = \frac{u}{s'} \tag{7a}$$

$$f'a' + \ldots = (\varkappa'\cos\varphi + \tau')\cos\varkappa - (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa\sin\varphi$$

$$l\,a' + \ldots = \varkappa'\cos\varkappa\sin\varphi + (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa\cos\varphi$$

Die Quadratsumme der 3 Grössen ist:

$$1 = (\varkappa' + \tau'\cos\varphi)^2 + [\tau'\cos\varkappa\sin\varphi - (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa]^2 \tag{7b}$$

Man kann daher setzen:

$$\sin\varepsilon = \varkappa' + \tau'\cos\varphi \tag{8}$$

$$\cos\varepsilon = \tau'\cos\varkappa\sin\varphi - (\varphi' + \vartheta')\sin\varkappa \tag{9}$$

und erhält:

$$f a' + \ldots = -\sin\varepsilon \sin\varkappa = \frac{u}{s'} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} f' a' + \ldots &= \sin\varepsilon \cos\varkappa \cos\varphi + \cos\varepsilon \sin\varphi \\ l a' + \ldots &= \sin\varepsilon \cos\varkappa \sin\varphi - \cos\varepsilon \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ueberdies ist aus Gl. (10) ersichtlich, dass

$$\sin\varepsilon = -\frac{u}{s' \sin\varkappa} \tag{12}$$

also ε eine durch u, s und $\varkappa$ bestimmte Grösse ist, die verschwindet, wenn s in die Strictionslinie übergeht.

Die Richtungscosinus der dritten Axe, nämlich der Rotationsaxe der Erzeugenden, ergeben sich aus ihrer normalen Stellung zu den beiden ersten; man findet:

$$f a_1 + \ldots = -\cos\varepsilon \sin\varkappa = \frac{\omega'}{s'} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} f' a_1 + \ldots &= \cos\varepsilon \cos\varkappa \cos\varphi - \sin\varepsilon \sin\varphi \\ l a_1 + \ldots &= \cos\varepsilon \cos\varkappa \sin\varphi + \sin\varepsilon \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Sind nun a, b, c, ψ, ω zur Bestimmung der Fläche und u zur Bestimmung der Linie s gegeben, so ist zuerst s' durch Gl. (5), dann $\varkappa$ durch Gl. (6), dann ε durch Gl. (12), dann φ durch Gl. (8) primitiv bekannt; man hat, um die Formeln zusammenzustellen:

$$s'^2 = (\psi' + u')^2 + u^2 + \omega'^2 \tag{15}$$

$$\cos\varkappa = \frac{\psi' + u'}{s'}; \quad \sin\varepsilon = -\frac{u}{s' \sin\varkappa}; \quad \cos\varphi = \frac{\sin\varepsilon - \varkappa'}{\tau'}$$

wo

$$\tau'^2 = \left\{\left(\frac{\psi' + u'}{s'}\right)' - \frac{\varkappa}{s'}\right\}^2 + \left\{\left(\frac{u}{s'}\right)' + \frac{\psi' + u'}{s'} - \Delta \frac{\omega'}{s'}\right\}^2 + \left\{\left(\frac{\omega'}{s'}\right)' + \frac{\Delta u}{s'}\right\}^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \tag{16}$$

oder infolge der vorhergehenden Gleichungen kürzer

$$\tau'^2 = (\varkappa' - \sin\varepsilon)^2 + \{(\varepsilon' + \Delta)\sin\varkappa - \cos\varepsilon\cos\varkappa\}^2 \tag{17}$$

ist. Eliminirt man τ', so wird einfacher

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{[\varepsilon' + \Delta]\sin\varkappa - \cos\varepsilon\cos\varkappa}{\sin\varepsilon - \varkappa'} \tag{18}$$

Hiermit ist bereits die Krümmung der Curve $\frac{\tau'}{s'}$, (irrational durch Gl. (17)) dargestellt. Noch einfacher ergibt Gl. (9) die Torsion $\frac{\vartheta'}{s'}$. Nach Einführung der Werte lautet sie:

$$\vartheta' = -\varphi' - \cos\varepsilon\sin\varkappa - (\varepsilon' + \Delta)\cos\varkappa \tag{19}$$

also ist hier der Zähler rational.

An das Vorstehende knüpfen sich einige speciellere Fragen, unter andern folgende.

Ist $\partial\omega = 0$, so ist aus der Bedeutung von $\partial\omega$ klar, dass die Fläche abwickelbar ist. Nach Gl. (13) wird alsdann entweder $\cos\varepsilon$ oder $\sin\varkappa$ null. Der letztere Fall ist ein singulärer; denn für $\sin\varkappa = 0$ fällt nach Gl. (7) (6) die Erzeugende mit der Tangente von s zusammen. Hier wird

$$v = \tau; \quad \varepsilon = \mathrm{R} - \varphi; \quad a = f; \quad \text{etc.}$$

Allgemeiner ist der Fall $\varepsilon = \mathrm{R}$, wo $\varkappa$ beliebig variirt, während nach Gl. (9) φ durch die Relation

$$\partial\varphi = -\partial\vartheta + \partial\tau\cot\varkappa\sin\varphi \tag{20}$$

davon abhängig wird.

Fragt man nun umgekehrt nach dem Bereiche der einer Curve s begleitenden Geraden, welche eine abwickelbare Fläche erzeugen, so sind es ausser der Tangente an s, welche stets abgesondert vom Systeme stehen bleibt, diejenigen, welche die Gl. (20) erfüllen. Man kann, um die Lösung einer Differentialgleichung zu ersparen die Gl. (20) auch schreiben:

$$\cot\varkappa = \frac{\partial\varphi + \partial\vartheta}{\partial\tau\sin\varphi} \tag{20a}$$

und φ als willkürliche Function von s betrachten.

Ist statt des Vorigen $\partial\psi = 0$, so ist gemäss der Bedeutung von $\partial\psi$ die Erzeugende Binormale der Strictionslinie s_0. Nach Gl. (6) (10) ist

$$fa + \ldots = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad fa' + \ldots = \frac{u\partial v}{\partial s}$$

woraus nach Elimination von u:

$$fa + gb + hc = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{f\partial a + g\partial b + h\partial c}{\partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2)}\,\partial s\right) \tag{21}$$

Fragt man nun nach dem Bereiche der eine gegebene Curve s begleitenden Geraden, welche eine Binormalenfläche erzeugen, so sind a, b, c gesucht. Geht man von einem Punkte der Linie s in der Richtung $(a\,b\,c)$ um die Strecke u bis zum Centralpunkt $(x_0 y_0 z_0)$, so ist der Endpunkt:

$$x_0 = x + a u; \quad \text{etc.}$$

$$u = -\frac{f\partial a + \ldots}{\partial v^2}\partial s \tag{22}$$

woraus durch Differentiation:

$$f_0 \partial s_0 = f\partial s + a\partial u + u\partial a; \quad \text{etc.}$$

Bedingung für a, b, c ist

$$f_0 a + g_0 b + h_0 c = 0$$

das ist nach der vorigen Gleichung:

$$(fa + \ldots)\partial s + \partial u = 0$$

Setzt man den Wert (22) für u ein, so erhält man Gl. (21). Folglich genügen alle Systeme a, b, c, welche Gl. (21) erfüllen, der Aufgabe. Von den 3 Unbekannten kann man eine, z. B. a, als willkürliche Function ansehen, die dritte c durch a und b ausdrücken und b durch Gl. (21) bestimmen.

Statt der Lage der Erzeugenden im Raume wollen wir jedoch ihre relative Lage zur Curve als gesucht betrachten und diese gemäss Gl. (6) (7) durch $\varkappa$, φ ausdrücken. Gl. (21) zerlegen wir in

$$\frac{f\partial a + \ldots}{\partial v^2}\partial s = \pi; \quad fa + \ldots = \frac{\partial \pi}{\partial s} \tag{23}$$

Da eine der gesuchten Functionen willkürlich bleibt, so sei dies π; dann ist nach Gl. (6)

$$\cos\varkappa = \frac{\partial \pi}{\partial s}$$

lässt sich also $\varkappa$ als bekannt betrachten, ferner nach Gl. (7a)

$$f\partial a + \ldots = -(\partial\varkappa + \partial\tau\cos\varphi)\sin\varkappa$$

und nach Gl. (7b)

$$\partial v^2 = (\partial\varkappa + \partial\tau\cos\varphi)^2 + [\partial\tau\cos\varkappa\sin\varphi - (\partial\varphi + \partial\vartheta)\sin\varkappa]^2$$

Beides in die erste Gl. (23) gesetzt gibt:

$$\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial s} + \frac{\partial\tau}{\partial s}\cos\varphi\right)\sin\varkappa + \pi\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial s} + \frac{\partial\tau}{\partial s}\cos\varphi\right)^2 + \pi\left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\cos\varkappa\sin\varphi - \frac{\partial\varphi + \partial\vartheta}{\partial s}\sin\varkappa\right)^2 = 0 \tag{24}$$

eine Differentialgleichung 1. Ordnung, algebraisch darstellbar, welche φ bestimmt.

Hierdurch ist das Bereich der eine beliebige Curve s begleitenden Binormalenflächen in folgender Weise gegeben. Die Erzeugende ist in beliebigem Winkelabstande $\varkappa$ von der Tangente an s zu nehmen: ihre Lage aber auf dem so bestimmten Rotationskegel um die Tangente wird durch den Winkel φ mittelst Integration der Gl. (24) gefunden.

Die Binormale von s selbst bildet eine singuläre Lösung.

Die Curve, deren Binormale die Erzeugende ist, findet man als Strictionslinie der Regelfläche. Gl. (7a) gibt die Strecke u an, um welche man längs der Erzeugenden bis zur Strictionslinie fortzugehen hat.

Die Untersuchung der begleitenden Tangenten- und Binormalenflächen legt die Frage nach den begleitenden Hauptnormalenflächen nahe. Zunächst sind hier die Werte von $\partial\psi$ und $\partial\omega$ zu suchen. Der Centralpunkt der Hauptnormalen, d. i. laufende Punkt der Strictionslinie, ist, wenn der Index 1 die Beziehung zur Urcurve der Hauptnormale bezeichnet,

$$x_0 = x_1 + f_1' \frac{\partial s_1}{\partial \tau_1} \cos^2\lambda_1; \quad \text{etc.} \tag{25}$$

wo die Bedeutung von λ aus $\partial\tau = \partial\sigma\cos\lambda$; $\partial\vartheta = \partial\sigma\sin\lambda$ erhellt. Dies differentiirt gibt:

$$\partial x_0 = f_1\,\partial s_1 \sin^2\lambda_1 + f_1'\partial\left(\frac{\partial s_1}{\partial\tau_1}\cos^2\lambda_1\right) + l_1\,\partial s_1 \sin\lambda_1\cos\lambda_1 \quad .$$

Für die von der Hauptnormale erzeugte Fläche ist nun

$$a = f_1'; \quad a' = l_1\sin\lambda_1 - f_1\cos\lambda_1: \quad a_1 = f_1\sin\lambda_1 + l_1\cos\lambda_1 \tag{26}$$

also

$$\partial x_0 = a\,\partial\left(\frac{\partial s_1}{\partial\tau_1}\cos^2\lambda_1\right) + a_1\,\partial s_1\sin\lambda_1$$

folglich ist

$$\psi = \frac{\partial s_1}{\partial\tau_1}\cos^2\lambda_1; \quad \partial\omega = \partial s_1\sin\lambda_1 \tag{27}$$

Fragt man nun nach den begleitenden Regelflächen einer gegebenen Curve s, welche überhaupt Hauptnormalenflächen sind, d. h. deren Erzeugende als Hauptnormalen irgend welchen andern Curven s_1 zugehören, so hat man 3 Curven auf einer gesuchten Regelfläche in Betrachtung zu ziehen, nämlich ausser s und s_1 die ihre Beziehung vermittelnde Strictionslinie s_0. Sind u, u_1 die Strecken von s, s_1 bis s_0 längs der Erzeugenden, so hat man:

$$x_0 = x_1 + a u_1 = x + a u; \quad \text{etc} \tag{28}$$

und zwar

$$a = f_1'; \quad \text{etc.} \tag{26}$$

also

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 = \partial \sigma_1^2 \quad \text{oder} \quad v = \sigma_1 \tag{29}$$

ferner

$$u_1 = \psi = \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_1} \cos \lambda_1 \tag{30}$$

$$u = -\frac{f \partial a + \ldots}{\partial \sigma_1^2} \partial s = \frac{\partial \varkappa + \partial \tau \cos \varphi}{\partial \sigma_1^2} \sin \varkappa \, \partial s \tag{31}$$

Die Gl. (28) differentiirt geben mit Anwendung von Gl. (2):

$$\begin{aligned} a \partial \psi + a_1 \partial \omega &= f_1 \partial s_1 + a \partial u_1 + a' u_1 \partial \sigma_1 \\ &= f \partial s + a \partial u + a' u \partial \sigma_1; \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Multiplicirt man einzeln mit a, a', a_1 und addirt jedesmal die 3 Analogen, so kommt einerseits:

$$\left.\begin{aligned} \partial \psi &= \partial u_1 \\ 0 &= -\partial s_1 \cos \lambda_1 + u_1 \partial s_1 \\ \partial \omega &= \partial s_1 \sin \lambda_1 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

andrerseits:

$$\left.\begin{aligned} \partial \psi &= \partial s \cos \varkappa + \partial u \\ 0 &= (f a' + \ldots) \partial s + u \partial \sigma_1 \\ \partial \omega &= (f a_1 + \ldots \partial s \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die Gl. (32) enthalten nur die Relationen (30) (27), welche als bekannt voraus gesetzt waren. In den Gl. (33), welche $\varkappa$ und φ bestimmen, sind die Werte (8) (10) (13), einzuführen, nach welchen

$$u = \frac{\partial s}{\partial \sigma_1} \sin \varkappa \sin \varepsilon$$

$$f a' + \ldots = -\sin \varkappa \sin \varepsilon; \quad f a_1 + \ldots = -\sin \varkappa \cos \varepsilon$$

$$\sin \varepsilon = \frac{\partial \varkappa + \partial \tau \cos \varphi}{\partial \sigma_1}$$

Diejenigen unter den Grössen s_1, u_1, σ_1, λ_1, ψ, ω, $\varkappa$, s, welche durch diese 10 Relationen nicht bestimmt sind, bleiben willkürlich.

R. Hoppe.

XII.

Ueber Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen.

Von

Karl Reich.

Einleitung.

1) Bekanntlich ist, wenn k eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$$

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass n und k in der Formel $\binom{n}{k}$ ganze Zahlen sind. Die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

soll allgemein, ohne Ausnahme, zu Recht bestehn. Ferner sei

$$\binom{-n}{-k} = 0$$

wenn $n > k > 0$. Endlich soll

$$\binom{n}{0} = 1$$

sein für alle n.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob die Gleichung

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

allgemein gilt. Wegen

$$\binom{n}{0}=1$$

ist sie für $k=0$ und vermöge ihrer gebräuchlichen Ableitung für $k>0$ richtig. — Wenn $k<-1$, so ist

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{n-k}+\binom{n}{n-k-1}=\binom{n+1}{n-k}=\binom{n+1}{k+1}$$

nicht nur, wenn $n-k>0$, sondern auch, wenn $n \leqq k$, weil alsdann

$$\binom{n}{k+1}=0$$

ist und $\binom{n}{k}$, $\binom{n+1}{k+1}$ gleichzeitig 1 oder 0 sind. — Ist endlich $k=-1$, so ist auch

$$\binom{n}{-1}+\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$$

wenn

$$\binom{n}{-1}=0, \text{ also } n \gtrless -1 \text{ ist.}$$

Demnach ist die Gleichung

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

richtig für beliebige n und k mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn $n=k=-1$ ist.

Tatsächlich ergiebt sich die in Rede stehende Gleichung aus der für nicht negative k geltenden

$$\binom{n+m}{k+1}=\binom{n}{k+1}\binom{m}{0}+\binom{n}{k}\binom{m}{1}+\binom{n}{k-1}\binom{m}{2}+\cdots+$$
$$+\binom{n}{0}\binom{m}{k+1}$$

wenn $m=1$ gesetzt wird. Die letztere Gleichung gilt auch für $k=-1$; jedoch reducirt sich dann ihre rechte Seite auf das einzige Glied

$$\binom{n}{0}\binom{m}{0}=1$$

2) Bei negativen n finden die folgenden zwei (für beliebige n zu Recht bestehenden) Gleichungen Anwendung:

Wenn $k \geqq 0$, so ist

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{-n-1} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k} \qquad \text{(a)}$$

wenn $k < 0$, so ist

$$\binom{n}{k} = (-1)^{n+k} \binom{-k-1}{-n-1} \qquad \text{(b)}$$

Beweis. Wenn $k > 0$, so ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{1.2 \ldots k}$$

$$= (-1)^k \frac{(-n+k-1)(-n+k-2) \ldots (-n)}{1.2 \ldots k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

Diese Gleichung ist augenscheinlich auch für $k = 0$ richtig.

Wenn dagegen $k < 0$, so erhält man bei Benutzung des soeben gefundenen Resultats

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = (-1)^{n-k} \binom{-k-1}{n-k} = (-1)^{n+k} \binom{-k-1}{-n-1}$$

wenn $n-k \geqq 0$ ist. Die Gleichung (b) gilt aber auch für $n < k$ (also für beliebige n), weil dann $\binom{n}{k}$ und $\binom{-k-1}{-n-1}$ gleichzeitig null sind. —

Bei nicht negativen n sind (a) und (b) für beliebige k richtig. Wenn nämlich $n > -1$ und $k < 0$ ist, so werden beide Seiten der Gleichung (a) null; ebenso überzeugt man sich leicht, dass die beiden Seiten der Gleichung (b) gleiche Werte annehmen, wenn n und k nicht negativ sind.

Dagegen haben bei negativen n die rechten Seiten der Gleichungen (a) und (b) entgegengesetzt gleiche Werte, weil, wenn $n < 0$, nach (a)

$$(-1)^k \binom{k-n-1}{-n-1} = (-1)^{k+n+1} \binom{-k-1}{-n-1}$$

3) Mit Benutzung der Gleichung (b) sind wir im Stande, eine der Gleichung

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{k}\binom{m}{0} + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{m}{k}$$

analoge Gleichung für negative γ zu finden. Es ist nämlich, wenn $n, h, k > 0$ sind,

$$\begin{aligned}\binom{-n}{-h-k+1} &= (-1)^{n+h+k+1}\binom{h+k-2}{n-1} \\ &= (-1)^{n+h+k+1}\left[\binom{h-1}{n-1}\binom{k-1}{0} + \binom{h-1}{n-2}\binom{k-1}{1} + \cdots\right. \\ &\quad \left. \cdots + \binom{h-1}{0}\binom{k-1}{n-1}\right]\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\binom{h-1}{n-x}\binom{k-1}{x-1} &= (-1)^{n+h-x-1}\binom{-n+x-1}{-h}\cdot(-1)^{k+x-2}\binom{-x}{-k} \\ &= (-1)^{n+h+k+1}\binom{-n+x-1}{-h}\binom{-x}{-k}\end{aligned}$$

folglich ist bei positiven h und k

$$\begin{aligned}\binom{-n}{-h-k+1} &= \binom{-n}{-h}\binom{-1}{-k} + \binom{-n+1}{-h}\binom{-2}{-k} \\ &\quad + \binom{-n+2}{-h}\binom{-3}{-k} + \cdots + \binom{-1}{-h}\binom{-n}{-k}\end{aligned}$$

n darf hier beliebig sein; denn falls $n \leqq 0$, so werden beide Seiten der Gleichung null.

Schreibt man anstatt n, h, k bzhw. $-n$, 2, $k-1$, so erhält man wie früher

$$\binom{n}{-k} + \binom{n}{-k+1} = \binom{n+1}{-k+1}$$

wo jedoch $k-1 > 0$ sein muss, also $k > 1$, aber nicht $= 1$ sein darf.

4) Wenn $h \geqq 0$ und überdies $k < 0$ oder $> h-1$, so ist

$$\varphi(x, k, h) = \binom{x}{k} - \binom{h}{1}\binom{x-1}{k} + \binom{h}{2}\binom{x-2}{k} - \cdots - \binom{x-h}{k-h} \quad (c)$$

Es ist nämlich

$$\varphi(x, k, h) = \binom{x}{k} - \left[1+\binom{h-1}{1}\right]\binom{x-1}{k} + \left[\binom{h-1}{1}+\binom{h-1}{2}\right]\binom{x-2}{k} - \dots$$
$$= \binom{x-1}{k-1} - \binom{h-1}{1}\binom{x-2}{k-1} + \binom{h-1}{2}\binom{x-3}{k-1} - \dots$$
$$\dots = \varphi(x-1, k-1, h-1)$$
$$= \varphi(x-2, k-2, h-2) = \dots = \varphi(x-h, k-h, 0)$$
$$= \binom{x-h}{k-h}$$

Wenn hingegen $(h > 0$ und$)$ $0 \leqq k \leqq h-1$, so ist

$$\varphi(x, k, h) = 0 \qquad \text{(d)}$$

Man findet nämlich

$$\varphi(x, k, h) = \varphi(x-k, 0, h-k) = 1 - \binom{h-k}{1} + \binom{h-k}{2} - \binom{h-k}{3} + \dots = 0$$

5) Wenn $0 \leqq k \leqq h-1$ und $x \geqq 0$, so ist

$$f(x, k, h) = \binom{x}{k} - \binom{h}{1}\binom{x-1}{k} + \binom{h}{2}\binom{x-2}{k} - \dots$$
$$\dots + (-1)^x \binom{h}{x}\binom{0}{k} = (-1)^{x+k}\binom{h-k-1}{h-x-1} \qquad \text{(e)}$$

Es ist nämlich, wenn vorläufig $x \geqq k$ vorausgesetzt wird,

$$f(x, k, h) = \binom{x-1}{k-1} - \binom{h-1}{1}\binom{x-2}{k-1} + \binom{h-1}{2}\binom{x-3}{k-1} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{x-1}\binom{h-1}{x-1}\binom{0}{k-1} = f(x-1, k-1, h-1)$$
$$= f(x-2, k-2, h-2) = \dots = f(x-k, 0, h-k)$$
$$= 1 - \binom{h-k}{1} + \binom{h-k}{2} - \dots + (-1)^{x-k}\binom{h-k}{x-k}$$

wobei die Glieder

$$(-1)^x\binom{h-1}{x}\binom{0}{k},\ (-1)^{x-1}\binom{h-2}{x-1}\binom{0}{k-1},\ \dots$$
$$\dots,\ (-1)^{x-k+1}\binom{h-k}{x-k+1}\binom{0}{1}$$

da dieselben null sind, der Reihe nach vernachlässigt werden konnten. Nun ist

$$1-\binom{n}{1}=-\binom{n-1}{1},\quad 1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=-\binom{n-1}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n-1}{2},$$
$$\ldots,\quad 1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^k\binom{n-1}{k}$$

folglich

$$f(x,\ k,\ h)=(-1)^{x-k}\binom{h-k-1}{x-k}=(-1)^{x-k}\binom{h-k-1}{h-x-1}$$

Jetzt kann man die vorläufige Beschränkung

$$x \geqq k$$

fallen lassen, da, wenn $x < k$, nicht nur die linke Seite der Gleichung (e), sondern auch ihre rechte Seite null wird wegen

$$h-k-1 \geqq 0$$

und

$$x-k < 0$$

Variationen.

1) Unter Combinationen zur Summe n sollen im folgenden, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil betont ist, stets solche mit Wiederholungen verstanden sein.

Variationen zur Summe n sind alle Permutationen der Combinationen zur Summe n. Beispiel:

Combinationen z. S. 6.		Variationen z. S. 6					
6	3111	6	15	114	1113	11112	111111
51	222		51	141	1131	11121	
42	2211		24	411	1311	11211	
411	21111		42	123	3111	12111	
33	111111		33	132	1122	21111	
321				213	1212		
				231	1221		
				312	2112		
				321	2121		
				222	2211		

Die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n ist $\binom{n-1}{r-1}$. Die Anzahl aller Variationen z. S. n ist 2^{n-1}.

Beweise. Die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von

$$(x+x^2+x^3+\ldots)^r = x^r(1-x)^{-r}$$

also der Coefficient von x^{n-r} in $(1-x)^{-r}$, d. i.

$$(-1)^{n-r}\binom{-r}{n-r} = \binom{n-1}{n-r} = \binom{n-1}{r-1}$$

Oder: Für

$$r = 1$$

ist die erste Behauptung richtig; denn es giebt eine einzahlige Variation z. S. n. Wenn $r > 1$ ist, so bemerke man, dass die r zahligen Variationen z. S. n die Zahlen $1, 2, \ldots, n-(r-1)$ und keine anderen enthalten. Lässt man also bei diesen Variationen die erste Zahl weg, so bleiben alle $r-1$ zahligen Variationen zu den Summen $n-1, n-2, \ldots, r-1$. Besteht die erste Behauptung für die $1, 2, \ldots, n-1$ zahligen Variationen zu den Summen $1, 2, \ldots, n-1$ zu Recht, so erhält man für die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n die Formel

$$\binom{n-2}{r-2}+\binom{n-3}{r-2}+\ldots+\binom{r-2}{r-2}=\binom{n-1}{r-1}$$

Der aufgestellte Satz gilt dann auch für $1, 2, \ldots, n$ zahlige Variationen z. S. n. Der Satz ist aber für ein- und zweizahlige Variationen zu den Summen 1 und 2 und daher allgemein richtig.

Die Anzahl aller Variationen z. S. n ist demnach

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}=2^{n-1}$$

Oder: Es giebt 1 einzahlige Variation z. S. n. Die zwei- und mehrzahligen beginnen mit einer der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$. Lässt man also bei den zwei- und mehrzahligen Variationen die erste Zahl weg, so bleiben alle Variationen zu den Summen $n-1, n-2, \ldots, 1$. Gilt die zweite Behauptung für die Variationen zu den Summen $1, 2, \ldots, n-1$, so ist die Anzahl der Variationen z. S. n

$$1+2^0+2^1+\ldots+2^{n-2}=2^{n-1}$$

Der Satz ist aber für die Variationen zu den Summen 1 und 2 und folglich allgemein richtig.

Wegen

$$\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r+1-1}$$

giebt es eben so viel $n-r+1$ zahlige als r zahlige Variationen z. S. n.

2) Die Anzahl $a_{n,p}$ der Variationen z. S. n, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten, ist

$$a_{n,p} = \binom{n-p-1}{0} + \binom{n-2p-1}{1} + \binom{n-3p-1}{2} + \ldots$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\left[\frac{n}{p+1}\right]} \binom{n-rp-1}{r-1}$$

Die Glieder dieser Summe bedeuten der Reihe nach die Anzahlen der 1, 2, 3, ... zahligen Variationen z. S. n, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten. $\left[\frac{n}{p+1}\right]$ bedeutet die grösste in dem Quotienten $\frac{n}{p+1}$ enthaltene ganze Zahl.

Beweise. Die Anzahl der r zahligen Variationen, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten, ist der Coefficient von x^n in der nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Entwicklung von

$$(x^{p+1} + x^{p+2} + x^{p+3} + \ldots)^r = x^{pr+r}(1-x)^{-r}$$

also der Coefficient von x^{n-pr-r} in der Entwicklung von $(1-x)^{-r}$, d. i.

$$(-1)^{n-pr-r}\binom{-r}{n-pr-r} = \binom{n-pr-1}{r-1}$$

Diese Formel gilt aber gemäss ihrer Ableitung nur für positive r, welche der Bedingung

$$n-pr-r \geqq 0$$

genügen, woraus

$$r \leqq \left[\frac{n}{p+1}\right]$$

folgt. Die Anzahl der r zahligen Variationen z. S. n, welche 1, 2, ..., p nicht enthalten, ist null, wenn $r > \frac{n}{p+1}$.

Oder: Wenn man alle Elemente der r zahligen Variationen z. S. n, welche die Zahlen 1, 2, ..., p nicht enthalten, um die Grösse

p vermindert, so entstehen alle r zahligen Variationen z. S. $n-rp$. Die Anzahl der letzteren ist aber $\binom{n-rp-1}{r-1}$.

Der Ausdruck für $a_{n,p}$ gilt auch, wenn

$$p = 0$$

ist. Ferner ist

$$a_{1,p} = a_{2,p} = \ldots = a_{p,p} = 0 \quad \text{und} \quad a_{p+1,p} = 1$$

Einen recursiven Ausdruck für $a_{n,p}$, wenn $n > p+1$ ist, erhält man auf nachfolgende Art. Bezeichnen r_1 und r_1' die grössten Werte, welche die r bzhw. in den Formeln für $a_{n-1,p}$ und $a_{n-p-1,p}$ annehmen, so ist

$$r_1 = \left[\frac{n-1}{p+1}\right], \quad r_1' = \left[\frac{n-p-1}{p+1}\right] = \left[\frac{n}{p+1}\right] - 1$$

also

$$r_1' = r_1 - 1$$

wenn $\frac{n}{p+1}$ keine ganze Zahl ist Aber auch dann, wenn

$$n = k(p+1)$$

und k eine ganze Zahl, also

$$r_1' = k-1$$

ist, darf man

$$r_1 = r_1' + 1 = k$$

wählen anstatt

$$= \left[\frac{n-1}{p+1}\right] = k-1$$

weil das in der Formel für $a_{n-1,p}$ so hinzukommende Glied $\binom{k-2}{k-1}$ null ist wegen $k > 1$. Es ist mithin

$$a_{n-1,p} = \binom{n-p-2}{0} + \binom{n-2p-2}{1} + \binom{n-3p-2}{2} + \ldots + \binom{n-rp-2}{r-1}$$

$$a_{n-p-1,p} = \binom{n-2p-2}{0} + \binom{n-3p-2}{1} + \ldots + \binom{n-rp-2}{r-2}$$

wo

$$r = \left[\frac{n}{p+1}\right]$$

Durch Addition erhält man

$$a_{n-1,p}+a_{n-p-1,p}=\binom{n-p-1}{0}+\binom{n-2p-1}{1}+\ldots+\binom{n-r\,p-1}{r-1}$$

$$r=\left[\frac{n}{p+1}\right]$$

$$=\sum_{r=1}\binom{n-r\,p-1}{r-1}=a_{n,p}$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$a_{n,p}=a_{n-1,p}+a_{n-p-1,p}\quad\text{oder}$$

$$a_{n-p-1,p}=a_{n,p}-a_{n-1,p}$$

vermag man die Werte von $a_{n,p}$ auch für negative n zu bestimmen.

n	. .	-8,	-7,	-6,	-5,	-4,	-3,	-2,	-1
				0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8, . .
$a_{n,1}$	. .	34,	-21,	13,	-8,	5,	-3,	2,	-1
				1,	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13, . .
$a_{n,2}$	. .	-2,	3,	0,	-2,	1,	1,	-1,	0
				1,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	3,	4, . .
$a_{n,3}$	. .	1,	-2,	1,	0,	1,	-1,	0,	0
				1,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1,	2, . .
$a_{n,4}$	. .	1,	0,	0,	1,	-1,	0,	0,	0,
				1,	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1, . .
	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

Man überzeugt sich leicht, dass

$$a_{-h(p+1)+k-1,p}=(-1)^{k-1}\binom{h}{k-1}$$

wo h und $k-1$ die Werte 0, 1, 2, . . , p annehmen dürfen. Hievon ausgenommen ist nur

$$a_{-p(p+1),p}=1-(-1)^p$$

d. i. 0 oder 2, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

3) I. Wenn man in der Gleichung

$$a_{n,p}=a_{n-1,p}+a_{n-p-1,p}$$

der Reihe nach n, $n-1$, $n-2$, . . . , $n-z+1$ anstatt n setzt und aus den so gebildeten z Gleichungen $z-1$ Grössen eliminirt, so erhält man eine Relation zwischen irgend welchen $p+2$ Grössen $a_{x,p}$, $a_{x+h_1,p}$, . . . Es ist also

$$\alpha a_{x,p} + \alpha_1 a_{x+h_1,p} + \alpha_2 a_{x+h_2,p} + \ldots + \alpha_{p+1} a_{x+h_{p+1},p} = 0$$

wo die Coefficienten α, α_1, ... von x unabhängig sind. Folglich ist die Determinante $p+2$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{x,p} & a_{x+h_1,p} & \ldots & a_{x+h_{p+1},p} \\ a_{x+h',p} & a_{x+h'+h_1,p} & \ldots & a_{x+h'+h_{p+1},p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{x+h^{(p+1)},p} & a_{x+h^{(p+1)}+h_1,p} & \ldots & a_{x+h^{(p+1)}+h_{p+1},p} \end{vmatrix} = 0$$

II. Wir wollen nun die Beziehung zwischen den (homologen) Determinanten $p+1$ten Grades

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{x,p} & a_{x+h_1,p} & \ldots & a_{x+h_p,p} \\ a_{x+k_1,p} & a_{x+k_1+h_1,p} & \ldots & a_{x+k_1+h_p,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{x+k_p,p} & a_{x+k_p+h_1,p} & \ldots & a_{x+k_p+h_p,p} \end{vmatrix}$$

und $f(y)$ aufsuchen. Wenn

$$\alpha a_{x,p} + \alpha_1 a_{x+h_1,p} + \ldots + \alpha_p a_{x+h_p,p} = 0$$

ist für beliebige x, so sind beide Determinanten null, und man kann sie als gleich oder entgegengesetzt gleich betrachten. Dieser Fall soll im folgenden ausgeschlossen sein. Auch soll der kürzeren Schreibweise wegen der zweite Index p fortgelassen werden.

Es ist

$$f(x) = (-1)^{p(y-x)} f(y)$$

Beweis 1. Wenn

$$p = 1$$

so ist nach unserer Behauptung

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h} \\ a_{x+k} & a_{x+k+h} \end{vmatrix} = (-1)^{y-x} f(y)$$

Wir brauchen augenscheinlich die Richtigkeit dieser Gleichung bloss für

$$y = x+1$$

zu beweisen. Nun ist

$$a_{x+1} = r a_x + s a_{x+h}, \quad a_{x+2} = R a_x + S a_{x+h}$$
$$a_{x+h+1} = r' a_x + s' a_{x+h}, \quad a_{x+h+2} = R' a_x + S' a_{x+h}$$

$$\begin{vmatrix} R & S \\ R' & S' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} r^2 + r's & sr + s's \\ rr' + r's' & sr' + s'^2 \end{vmatrix}$$

Wegen

$$a_{x+2} = a_{x+1} + a_x$$

ist ausserdem

$$R = r + 1, \quad S = s, \quad R' = r', \quad S' = s' + 1$$

also

$$\begin{vmatrix} r+1 & s \\ r' & s'+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix}^2$$

oder

$$r+1 = r^2 + r's, \quad s = sr + s's, \quad r' = rr' + r's', \quad s'+1 = sr' + s'^2$$

Diese vier Gleichungen sind identisch mit den zwei Gleichungen

$$r + s' = 1$$
$$r's - rs' = 1$$

(Nebenbei sei bemerkt, dass auch umgekehrt, wenn diese zwei Bedingungen erfüllt sind, die Gleichung besteht

$$\begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} r+1 & s \\ r' & s'+1 \end{vmatrix} \Big).$$

Folglich ist

$$f(x+1) = \begin{vmatrix} r & s \\ r' & s' \end{vmatrix} f(x) = -f(x)$$

Wenn

$$p = 2$$

so ist zu beweisen, dass

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & a_{x+h_2} \\ a_{x+k_1} & a_{x+k_1+h_1} & a_{x+k_1+h_2} \\ a_{x+k_2} & a_{x+k_2+h_1} & a_{x+k_2+h_2} \end{vmatrix} = f(x+1)$$

Weil $f(x)$ von null verschieden ist, so können wir setzen

$$\begin{aligned} a_{x+1} &= r a_x + s a_{x+h_1} + t a_{x+h_2} \\ a_{x+h_1+1} &= r' a_x + s' a_{x+h_1} + t' a_{x+h_2} \\ a_{x+h_2+1} &= r'' a_x + s'' a_{x+h_1} + t'' a_{x+h_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{x+2} &= R a_x + S a_{x+h_1} + T a_{x+h_2} \\ a_{x+h_1+2} &= R' a_x + S' a_{x+h_1} + T' a_{x+h_2} \\ a_{x+h_2+2} &= R'' a_x + S'' a_{x+h_1} + T'' a_{x+h_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{x+3} &= \varrho\, a_x + \sigma\, a_{x+h_1} + \tau\, a_{x+h_2} \\ a_{x+h_1+3} &= \varrho' a_x + \sigma' a_{x+h_1} + \tau' a_{x+h_2} \\ a_{x+h_2+3} &= \varrho'' a_x + \sigma'' a_{x+h_1} + \tau'' a_{x+h_2} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\Sigma \pm RS'T'' = (\Sigma \pm rs't'')^3, \quad \Sigma \pm \varrho\, \sigma'\tau'' = (\Sigma \pm rs't'')^3$$

Zu bemerken ist jedoch, dass das $k$te Element der $i$ten Zeile von $(\Sigma \pm rs' \ldots)^n$ gebildet wird durch Composition der $k$ten Colonne von $(\Sigma \pm rs' \ldots)^{n-1}$ mit der $i$ten Zeile von $\Sigma \pm rs' \ldots$ Nun ist

$$a_{x+3} = a_{x+2} + a_x$$

also

$$\begin{aligned} (\varrho - R - 1)\, a_x + (\sigma - S)\, a_{x+h_1} + (\tau - T)\, a_{x+h_2} &= 0 \\ (\varrho' - R')\, a_x + (\sigma' - S' - 1)\, a_{x+h_1} + (\tau' - T')\, a_{x+h_2} &= 0 \\ (\varrho'' - R'')\, a_x + (\sigma'' - S'')\, a_{x+h_1} + (\tau'' - T'' - 1)\, a_{x+h_2} &= 0 \end{aligned}$$

Weil $f(x)$ von null verschieden ist, so sind die in diesen drei Gleichungen auftretenden Coefficienten null. Die 9 Gleichungen

$$\varrho = R + 1, \quad \sigma = S, \quad \tau = T, \quad \varrho' = R', \quad \ldots$$

reduciren sich aber auf folgende 3 Gleichungen:

$$r + s' + t'' = 1$$

$$rs' + s't'' + t''r = r's + s''t' + tr''$$

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ r' & s' & t' \\ r'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 1$$

(Nebenbei sei bemerkt, dass man auch umgekehrt, wenn diese drei Bedingungen erfüllt sind, bei der Bildung von $(\Sigma \pm rs't'')^3$ in der oben angegebenen Weise zu der Determinante

$$\begin{vmatrix} R+1 & S & T \\ R' & S'+1 & T' \\ R'' & S'' & T''+1 \end{vmatrix}$$

gelangt.)

Folglich ist

$$f(x+1) = \begin{vmatrix} r & s & t \\ r' & s' & t' \\ r'' & s'' & t'' \end{vmatrix} f(x) = f(x)$$

Man sieht leicht, wie der Beweis für

$$p = 3,\ 4,\ \ldots$$

in ähnlicher Weise durchzuführen ist wie für

$$p = 1,\ 2$$

Von einem allgemein gehaltenen Beweise nach der hier angewandten Methode habe ich jedoch wegen der zwar nicht schwierigen, aber umständlichen Rechnungen abgesehen.

Beweis 2. Derselbe gilt für beliebige p. Wenn (I)

$$\alpha_0 a_x + \alpha_1 a_{x+h_1} + \ldots + \alpha_p a_{x+h_p} - A_1 a_{x+1} = 0$$

ist für beliebige x, so ist (wegen $f(x) \gtrless 0$) A_1 und daher auch mindestens ein Coefficient α_m von null verschieden, und man erhält durch Addition der mit $\frac{\alpha_0}{\alpha_m}, \frac{\alpha_1}{\alpha_m}, \ldots$ multiplicirten anderen Colonnen zur $m$ten Colonne

$$f(x) = \frac{A_1}{\alpha_m} \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & \ldots a_{x+h_{m-1}} & a_{x+1} & a_{x+h_{m+1}} \ldots a_{x+h_p} \\ a_{x+k_1} & a_{x+k_1+h_1} & \ldots a_{x+k_1+h_{m-1}} & a_{x+k_1+1} & a_{x+k_1+h_{m+1}} \ldots a_{x+k_1+h_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Wenn ferner

$$\beta_0 a_x + \beta_1 a_{x+h_1} + \ldots + \beta_{m-1} a_{x+h_{m-1}} + \beta_{m+1} a_{x+h_{m+1}} + \ldots$$
$$\ldots + \beta_p a_{x+h_p} + B_1 a_{x+1} - B_2 a_{x+h_1+1} = 0$$

so ist B_2 und (weil auch $f(x+1) \gtrless 0$) mindestens ein Coefficient β_n von null verschieden. Demnach ist

$$f(x) = \frac{A_1}{\alpha_m} \frac{B_2}{\beta_n} D$$

wo D eine Determinante bedeutet, welche entsteht, wenn man in $f(x)$ die Elemente der $m+1$ten Colonne durch $a_{x+1}, a_{x+k_1+1}, \ldots$ und jene der $n+1$ten Colonne durch $a_{x+h_1+1}, a_{x+k_1+h_1+1}, \ldots$ ersetzt. Fährt man in dieser Weise fort, so ergiebt sich schliesslich

$$f(x) = \frac{1}{q} f(x+1)$$

wobei $\frac{1}{q}$ ein endlicher, von null verschiedener und von x unabhängiger Coefficient ist. Es ist also

$$\ldots = q^2 f(x-2) = q f(x-1) = f(x) = \frac{1}{q} f(x+1)$$
$$= \frac{1}{q^2} f(x+2) = \ldots$$

Die Determinanten $\ldots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \ldots$ bilden eine geometrische Progression, deren Quotient q ist. Weil aber alle Glieder dieser Progression als Determinanten mit durchwegs ganzzahligen Elementen ganze Zahlen sind, so kann q nur $+1$ oder -1 sein.

Ein diesem ähnlicher Beweis, welcher auch das Vorzeichen von q bestimmen lehrt, ist der folgende. Man wandle zunächst die Determinante $p+1$ ten Grades

$$d = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_p \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p & a_{p+1} & \ldots & a_{2p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p^2-p}{2}}$$

auf demselben Wege wie oben durch successive Ersetzung zunächst der Colonnen und dann der Zeilen um in

$$d = C \cdot f(x)$$

In gleicher Weise findet man

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{p+1} \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{p+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+1} & a_{p+2} & \ldots & a_{2p+1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p^2+p}{2}} = C f(x+1)$$

Nun ist

$$d = (-1)^p \delta$$

also auch

$$f(x+1) = (-1)^p f(x)$$

III. Ich führe noch zwei Sätze ohne Beweis an.

Die homologen Determinanten $p$ten Grades bilden Reihen, die ein Gesetz befolgen, welches dem der Originalreihe ähnlich ist.

Eine Determinante $p+1$ten Grades ist das Product zweier Determinanten. Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & \cdots & a_{x+h_p} \\ a_{x+k_1} & a_{x+k_1+h_1} & \cdots & a_{x+k_1+h_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{x+k_p} & a_{x+k_p+h_1} & \cdots & a_{x+k_p+h_p} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & \cdots & a_{x+h_p} \\ a_{x+1} & a_{x+h_1+1} & \cdots & a_{x+h_p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{x+p} & a_{x+h_1+p} & \cdots & a_{x+h_p+p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_{x+k_1} & \cdots & a_{x+k_p} \\ a_{x+1} & a_{x+k_1+1} & \cdots & a_{x+k_p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{x+p} & a_{x+k_1+p} & \cdots & a_{x+k_p+p} \end{vmatrix}$$

Insbesondere ist die symmetrische Determinante $p+1$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & a_{x+h_2} & \cdots \\ a_{x+h_1} & a_{x+2h_1} & a_{x+h_1+h_2} & \cdots \\ a_{x+h_2} & a_{x+h_2+h_1} & a_{x+2h_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_{x+h_1} & a_{x+h_2} & \cdots \\ a_{x+1} & a_{x+h_1+1} & a_{x+h_2+1} & \cdots \\ a_{x+2} & a_{x+h_1+2} & a_{x+h_2+2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}^2$$

4) Betrachtet man die einzelnen Variationen zur S. n als Producte ihrer Elemente und bezeichnet die Summe dieser Producte mit $C_{n,1}^{(2)}$, so ist

$$C_{n,1}^{(2)} = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-2}{1} + \binom{2n-3}{2} + \cdots$$

$$= \sum_{r=n}^{r=1} \binom{n+r-1}{n-r} = a_{2n+1,1}$$

Die Glieder dieser Summe sind der Reihe nach die Summen der als Producte ihrer Elemente angesehenen n, $n-1$, ... zahligen Variationen z. S. n.

Die Summe der als Producte betrachteten r zahligen Variationen z. S. n ist nämlich der Coefficient von x^n in der Entwicklung von

$$(x+2x^2+3x^3+\ldots)^r = x^r(1-x)^{-2r}$$

d. i.

$$(-1)^{n-r}\binom{-2r}{n-r} = \binom{n+r-1}{n-r}$$

Setzt man

$$n - r = r' - 1$$

so wird

$$C_{n,1}^{(2)} = \sum_{r=1}^{r=n} \binom{n+r-1}{n-r} = \sum_{r'=1}^{r'=n} \binom{2n-r'}{r'-1} = a_{2n+1,1}$$

Ein allgemeinerer Satz ist der folgende: Man schreibe bei den r zahligen Variationen zur S. n anstatt der Zahlen 1, 2, 3, . . . die Zahlen $\binom{p}{p}$, $\binom{p+1}{p}$, $\binom{p+2}{p}$, . . . , betrachte die so gebildeten Complexionen als Producte ihrer Elemente und bilde endlich die Summe dieser Producte. Dieselbe ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von

$$\left[x + \binom{p+1}{1} x^2 + \binom{p+2}{2} x^3 + \ldots\right]^r = x^r (1-x)^{-(p+1)r}$$

d. i.

$$(-1)^{n-r} \binom{-pr-r}{n-r} = \binom{n+pr-1}{n-r}$$

Bildet man in der angegebenen Weise aus allen Variationen z. S. n neue Complexionen, betrachtet dieselben als Producte ihrer Elemente und bezeichnet die Summe dieser Producte mit $C_{n,p}^{(p+1)}$, so ist

$$C_{n,p}^{(p+1)} = \sum_{r=1}^{r=n} \binom{n+pr-1}{n-r}$$

Setzt man hier wieder

$$n - r = r' - 1$$

so wird

$$C_{n,p}^{(p+1)} = \sum_{r'=1}^{r'=n} \binom{(p+1)n - r'p + p - 1}{r'-1} = a_{(p+1)n+p,p}$$

n	. . — 4,	—3,	—2,	—1,	0,	1,	2,	3,	4,	5 . .
$C_{n,1}^{(2)}$	. . —21,	—8,	-3,	—1,	0,	1,	3,	8,	21,	55 . .
$C_{n,2}^{(3)}$	. . 5,	3,	1,	0,	0,	1,	4,	13,	41,	129 . .
$C_{n,3}^{(4)}$	. . —4,	—1,	0,	0,	0,	1,	5,	19,	69,	250 . .
$C_{n,4}^{(5)}$	. . 1,	0,	0,	0,	0,	1,	6,	26,	106,	431 . .
. . .	. . . . .									

Zur recursiven Berechnung der Grössen $C_{n,p}^{(p+1)}$ kann man sich zweier Formeln bedienen, denen ich jedoch sofort eine allgemeinere Fassung geben will. Definirt man nämlich $C_{n,p}^{(k)}$ durch die Gleichung

$$C_{n,p}^{(k)} = a_{(p+1)n+k-1,p}$$

wo k irgend eine Zahl des in Bezug auf den Modul $p+1$ vollständigen Restsystems 1, 2, ..., $p+1$ bedeuten kann, so ist

$$C_{n,p}^{(k)} = \binom{p+2}{1} C_{n-1,p}^{(k)} - \binom{p+1}{2} C_{n-2,p}^{(k)} + \binom{p+1}{3} C_{n-3,p}^{(k)} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^p \binom{p+1}{p+1} C_{n-p-1,p}^{(k)} \qquad (1)$$

$$C_{n,p}^{(k)} = C_{n-1,p}^{(k)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}^{(k)} + \binom{p+2}{p} C_{n-3,p}^{(k)} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}^{(k)} + \binom{k+n-2}{k-1} \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) gilt für beliebige, die Gleichung (2) für positive n.

Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich die Beweise dieser Gleichungen bloss andeuten und überdies bemerken, dass manche der in der Einleitung entwickelten Sätze hier ihre Anwendung finden.

Beweis der Gleichung (1). Man multiplicire von den $p(p+1)+1$ Gleichungen

$$a_{(p+1)n+k-1,p} = a_{(p+1)n+k-2,k} + a_{(p+1)n+k-p-2,p}$$
$$a_{(p+1)n+k-2,p} = a_{(p+1)n+k-3,p} + a_{(p+1)n+k-p-3,p}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{(p+1)n+k-p^2-p-1,p} = a_{(p+1)n+k-p^2-p-2,p} + a_{(p+1)n+k-p^2-2p-2,p}$$

die ersten $p+1$ Gleichungen der Reihe nach mit

$$\binom{p}{0}, \quad \binom{p-1}{0}, \quad \ldots, \quad \binom{p-p}{0}$$

die zweiten $p+1$ Gleichungen mit

$$-\binom{p}{1}, \quad -\binom{p-1}{1}, \quad \ldots, \quad -\binom{p-p}{1}, \quad \ldots$$

die $p$ten $p+1$ Gleichungen mit

$$(-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}, \quad (-1)^{p-1}\binom{p-1}{p-1}, \quad \ldots, \quad (-1)^{p-1}\binom{p-p}{p-1}$$

die letzte Gleichung mit

$$(-1)^p \binom{p}{p}$$

und addire hierauf alle Gleichungen.

Beweis der Gleichung (2). Wir wollen zunächst zeigen, dass die Gleichung richtig ist für

$$k = m$$

wenn sie für

$$k = m+1$$

zu Recht besteht. Wegen

$$C_{n,p}^{(m)} = C_{n,p}^{(m+1)} - C_{n-1,p}^{(m+1)}$$

erhält man aus den Gleichungen

$$C_{n,p}^{(m+1)} = C_{n-1,p}^{(m+1)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}^{(m+1)} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}^{(m+1)} + \binom{m+n-1}{m}$$

$$C_{n-1,p}^{(m+1)} = C_{n-2,p}^{(m+1)} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p+n-3}{p} C_{1,p}^{(m+1)} + \binom{m+n-2}{m}$$

durch Subtraction

$$C_{n,p}^{(m)} = C_{n-1,p}^{(m+1)} + \binom{p}{p-1} C_{n-2,p}^{(m+1)} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p+n-3}{p-1} C_{1,p}^{(m+1)} + \binom{m+n-2}{m-1} \qquad (a)$$

Ausserdem ist

$$C_{n-1,p}^{(m)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}^{(m)} + \ldots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}^{(m)}$$
$$= C_{n-1,p}^{(m+1)} + \binom{p}{p-1} C_{n-2,p}^{(m+1)} + \ldots + \binom{p+n-3}{p-1} C_{1,p}^{(m+1)} \qquad (b)$$

was sofort klar wird, wenn man für die Coefficienten links vom Gleichheitszeichen die bekannten Formeln anwendet

$$\binom{p+1}{p} = \binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1}$$
$$\binom{p+2}{p} = \binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1} + \binom{p+1}{p-1}, \ldots$$

und überdies berücksichtigt, dass

$C_{1,p}{}^{(m)} = C_{1,p}{}^{(m+1)} = 1, \quad C_{1,p}{}^{(m)} + C_{2,p}{}^{(m)} = C_{1,p}{}^{(m+1)} + C_{2,p}{}^{(m)} = C_{2,p}{}^{(m+1)},$
$C_{1,p}{}^{(m)} + C_{2,p}{}^{(m)} + C_{3,p}{}^{(m)} = C_{2,p}{}^{(m+1)} + C_{3,p}{}^{(m)} = C_{3,p}{}^{(m+1)}, \ \ldots$

Aus (a) und (b) folgt aber

$$C_{n,p}{}^{(m)} = C_{n-1,p}{}^{(m)} + \binom{p+1}{p} C_{n-2,p}{}^{(m)} + \ldots + \binom{p+n-2}{p} C_{1,p}{}^{(m)} + \binom{m+n-2}{m-1}$$

Wir haben nunmehr zu beweisen, dass die Gleichung (2) richtig ist für

$$k = p+1$$

Zu diesem Zwecke multiplicire man die n Gleichungen, welche aus

$$C_{x,p}{}^{(p+1)} = \binom{p+2}{1} C_{x-1,p}{}^{(p+1)} - \binom{p+1}{2} C_{x-2,p}{}^{(p+1)} + \binom{p+1}{3} C_{x-3,p}{}^{(p+1)} - \ldots + (-1)^p \binom{p+1}{p+1} C_{x-p-1,p}{}^{(p+1)}$$

hervorgehen, wenn man

$$n, \quad n-1, \quad \ldots, \quad 1$$

anstatt x setzt, der Reihe nach mit

$$\binom{p}{p}, \ \binom{p+1}{p}, \ \ldots, \ \binom{p+n-1}{p}$$

und addire alsdann dieselben. Hiebei ist neben Anderem die Gleichung

$$C_{-h,p}{}^{(p+1)} = (-1)^p \binom{h}{p} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

zu berücksichtigen.

In gleicher Weise wie die Formel für $c_{n,p}{}^{(p+1)}$ kann man auch unmittelbar die allgemeinere Formel für $c_{n,p}{}^{(k)}$ ableiten, wenn man die Gleichung

$$C_{-h,p}{}^{(k)} = (-1)^{k-1} \binom{h}{k-1} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

(ausgenommen $C_{-p,p}{}^{1} = 1 - (-1)^p$) und die Gleichung (e) der Einleitung benutzt.

5) Wir wollen jetzt die Häufigkeit des Vorkommens irgend einer Zahl z in den Variationen z. S. n bestimmen.

Die Zahl n kommt einmal vor, nämlich in der einen ein-

zahligen Variation n. Wir schliessen diesen Fall aus und nehmen also an, dass $0 < z < n$ ist. Bedeuten alsdann $A_{n,z}^{(r)}$ und $A_{n,z}$ die Zahlen, welche angeben, wie oft die Zahl z bzhw. in den r zahligen und in allen Variationen z. S. n auftritt, so ist

$$A_{n,z}^{(r)} = r\binom{n-z-1}{r-2}$$

$$A_{n,z} = (n-z+3)2^{n-z-2} = 2^{n-z} + (n-z-1)2^{n-z-2}$$

Beweis. $A_{n,z}^{(r)}$ ist gleich der Häufigkeit des Vorkommens von a_z in dem Coefficienten, welchen x^n in der Entwicklung von

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^r$$

besitzt, also gleich dem Coefficienten von x^n in der Entwicklung von

$$\frac{\partial}{\partial a_z}(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^r$$

wenn man in dieser

$$a_1 = a_2 = \ldots = 1$$

setzt. Nun ist

$$\left[\frac{\partial}{\partial a_z}(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^r\right]_{a_1=a_2=\ldots=1} = r x^z (x + x^2 + \ldots)^{r-1} = r x^{z+r-1}(1-x)^{-r+1}$$

folglich

$$A_{n,z}^{(r)} = (-1)^{n-z-r+1} r \binom{-r+1}{n-z-r+1} = r\binom{n-z-1}{r-2}$$

Ferner ist

$$A_{n,z} = \sum_{r=2}^{r=n} A_{n,z}^{(r)} = 2\binom{n-z-1}{0} + 3\binom{n-z-1}{1} + \ldots$$
$$\ldots + (n-z+1)\binom{n-z-1}{n-z-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-z+3)\left[\binom{n-z-1}{0} + \binom{n-z-1}{1} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \binom{n-z-1}{n-z-1}\right] = (n-z+3)\,2^{n-z-2}$$

Anmerkung. Die Anzahl aller Zahlen in den r zahligen Variationen ist

$$\sum_{z=1}^{z=n} r\binom{n-z-1}{r-2} = r\left[\binom{n-2}{r-2} + \binom{n-3}{r-2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \binom{r-2}{r-2}\right] = r\binom{n-1}{r-1}$$

folglich ist die Anzahl der r zahligen Variationen

$$= \binom{n-1}{r-1}$$

6) Die Anzahl A_n aller Zahlen in allen Variationen z. S n ist $(n+1)2^{n-2}$; denn es ist entweder

$$A_n = \sum_{r=1}^{r=n} r\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + 3\binom{n-1}{2} + \ldots$$
$$\ldots + n\binom{n-1}{n-1} = \tfrac{1}{2}(n+1)\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \binom{n-1}{n-1}\right]$$

oder auch

$$A_n = 1 + \sum_{z=n-1}^{z=1} A_{n,z} = 1 + (2 + 0.2^{-1}) + (2^2 + 1.2^0) + \ldots$$
$$\ldots + (2^{n-1} + (n-2)2^{n-3}) = 2^n - 1 + (1 + 2.2 + 3.2^2 + \ldots$$
$$\ldots + (n-2)2^{n-3}) = (n+1)2^{n-2}$$

Combinationen.

1) Die im folgenden dargelegten, auf Combinationen zu bestimmten Summen Bezug habenden Sätze wurden von mir schon vor geraumer Zeit selbständig gefunden. Ein späteres Studium der Euler'schen „Einleitung in die Analysis des Unendlichen" belehrte mich neuerdings, dass ich zu der Erkenntniss vieler hieher gehörigen Wahrheiten auf einem weit müheloseren Wege als dem der eigenen Forschung hätte gelangen können. Gleichwol reute mich die einmal getane Arbeit nicht, da ich die meisten der von Euler in dem angeführten Werke (Buch 1, Cap. 16) vorgetragenen Lehrsätze aus anderen Gründen gewonnen und ausserdem mancherlei Neues auf diesem Gebiete erkannt hatte.

Die Anzahl der Combinationen z. S. n (mit Wiederholung) soll stets mit k_n bezeichnet werden Zur recursiven Berechnung von k_n dient die Gleichung

$$k_n = k_{n-1} + k_{n-2} - k_{n-5} - k_{n-7} + k_{n-12} + k_{n-15} - k_{n-22} - k_{n-26} + \ldots$$

Das Gesetz, nach welchem diese Reihe fotschreitet, bedarf keiner Erläuterung. Zu bemerken ist nur, dass

$$k_0 = 1 \quad \text{und} \quad k_{-1} = k_{-2} = \ldots = 0 \quad \text{ist.}$$

Bei der Entwickelung jener Formel sei Euler's Vorgang befolgt und nur der aus naheliegenden Gründen bei Euler fehlende Beweis hinzugefügt.

Bezeichnet man das unendliche Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ mit $\Pi(1-x^h)$, so ist klar, dass

$$\frac{1}{\Pi(1-x^h)} = (1+x^1+x^{1+1}+\ldots)(1+x^2+x^{2+2}+\ldots)(1+x^3+x^{3+3}+\ldots)\ldots$$
$$= k_0+k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\ldots$$

Nunmehr ist erforderlich, die Richtigkeit der Gleichung

$$\Pi(1-x^h) = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\ldots$$

zu beweisen. Zu dem Behufe setze man in der aus der Lehre von den Θ-Functionen bekannten Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(1-xe^{\alpha})\ (1-x^3e^{\alpha})\ (1-x^5e^{\alpha})\ \ldots\\ (1-xe^{-\alpha})\ (1-x^3e^{-\alpha})\ (1-x^5e^{-\alpha})\ \ldots\end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{\Pi(1-x^{2h})}\left[\begin{array}{l}1-xe^{\alpha}+x^4e^{2\alpha}-x^9e^{3\alpha}+x^{16}e^{4\alpha}-\ldots\\ -xe^{-\alpha}+x^4e^{-2\alpha}-x^9e^{-3\alpha}+x^{16}e^{-4\alpha}-\ldots\end{array}\right]$$

$x^{\frac{3}{2}}$ anstatt x und $\alpha-\frac{1}{2}\log x$ anstatt α. Dann geht über

$x^{2n-1}e^{\alpha}$	in	$x^{3n-2}e^{\alpha}$
$x^{2n-1}e^{-\alpha}$	„	$x^{3n-1}e^{-\alpha}$
$(1-x^{2h})$	„	$(1-x^{3h})$
$x^{n^2}e^{n\alpha}$	„	$x^{\frac{3n^2-n}{2}}e^{n\alpha}$
$x^{n^2}e^{-n\alpha}$	„	$x^{\frac{3n^2+n}{2}}e^{-n\alpha}$

Folglich nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an

$$\left.\begin{array}{l}(1-xe^{\alpha})\ (1-x^4e^{\alpha})\ (1-x^7e^{\alpha})\ \ldots\\ (1-x^2e^{-\alpha})(1-x^5e^{-\alpha})(1-x^8e^{-\alpha})\ \ldots\end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{\Pi(1-x^{3h})}\left[\begin{array}{l}1-xe^{\alpha}+x^5e^{2\alpha}-x^{12}e^{3\alpha}+x^{22}e^{4\alpha}-\ldots\\ -x^2e^{-\alpha}+x^7e^{-2\alpha}-x^{15}e^{-3\alpha}+x^{26}e^{-4\alpha}-\ldots\end{array}\right]$$

Setzt man hier

$$\alpha = 0$$

so erhält man den gesuchten Ausdruck für $\Pi(1-x^h)$.

2) Die Häufigkeit des Vorkommens $A_{n,x}$ der Zahl x in den Combinationen z. S. n ist gegeben durch den Ausdruck

$$A_{n,x} = k_{n-x} + k_{n-2x} + k_{n-3x} + \ldots$$

Beweis. Es ist $A_{n,n} = 1 = k_0$. Wenn man jeder einzelnen derjenigen Combinationen, welche die Zahl $x < n$ enthalten, die Zahl x einmal weglässt, so entstehen alle Combinationen z. S. $n-x$, jede einmal, folglich ist

$$A_{n,x} = k_{n-x} + A_{n-x,x}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung gelangt man zu der zu beweisenden.

3) Die Anzahl A_n aller Zahlen der Combinationen z. S. n ist

$$A_n = \sum_{x=1}^{x=n} A_{n,x} = k_{n-1} + 2k_{n-2} + 2k_{n-3} + 3k_{n-4} + 2k_{n-5} + 4k_{n-6} + \ldots$$
$$\ldots = \sum_{h=1}^{h=n} \sigma_h k_{n-h}$$

wo σ_h die Anzahl der Divisoren von h ist, also

$$\sigma_h = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

wenn

$$h = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots \text{ und } a, b, c, \ldots$$

die verschiedenen in h aufgehenden Primzahlen sind. Demnach ist

$$(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \ldots) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$$

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots}$$

4) Die Summe aller in den Combinationen z. S. n auftretenden Zahlen ist einerseits nk_n, andererseits $A_{n,1} + 2A_{n,2} + 3A_{n,3} + \ldots$ Folglich ist

$$nk_n = S_1 k_{n-1} + S_2 k_{n-2} + S_3 k_{n-3} + \ldots = \sum_{h=1}^{h=n} S_h k_{n-h}$$

wo S_h die Summe aller Divisoren der Zahl h bedeutet, also

$$S_h = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b-1} \ldots$$

wenn wie früher

$$h = a^\alpha b^\beta \ldots \text{ ist.}$$

Durch Addition der Gleichungen

$$-\log(1-x) = \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots$$

$$-\log(1-x^2) = \frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2}+\ldots$$

$$-\log(1-x^3) = \frac{x^3}{1}+\ldots$$

$$-\log(1-x^4) = \frac{x^4}{1}+\ldots$$

$$-\log(1-x^5) = \frac{x^5}{1}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

erhält man

$$-\log(1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots) = S_1x+\frac{S_2}{2}x^2+\frac{S_3}{3}x^3+\frac{S_4}{4}x^4+\ldots$$

folglich ist

$$S_1+S_2x+S_3x^2+S_4x^3+\ldots = -\frac{d}{dx}\log(1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots) = \frac{d}{dx}\log(k_0+k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\ldots)$$

oder

$$(k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots)(S_1+S_2x+S_3x^2+\ldots) = k_1+2k_2x+3k_3x^2+\ldots$$

wie oben.

Aus der Gleichung

$$S_1+S_2x+S_3x^2+\ldots = (1+2x-5x^4-7x^6+\ldots)(k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots)$$

folgt für S_n der Ausdruck

$$S_n = k_{n-1}+2k_{n-2}-5k_{n-5}-7k_{n-7}+12k_{n-12}+15k_{n-15}-\ldots$$

5) Aus der Gleichung

$$\log(k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots) = S_1x+\frac{S_2}{2}x^2+\frac{S_3}{3}x^3+\ldots = s_1x+s_2x^2+s_3x^3+\ldots$$

wo

$$\frac{S_h}{h} = s_h$$

gesetzt wurde, oder

$$k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots=e^{s_1x+s_2x^2+s_3x^3+\ldots}$$
$$=\left(1+\frac{s_1}{1!}x+\frac{s_1^2}{2!}x^2+\frac{s_1^3}{3!}x^3+\ldots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{s_2}{1!}x^2+\frac{s_2^2}{2!}x^4+\frac{s_2^3}{3!}x^6+\ldots\right)\ldots$$

ergiebt sich leicht der Satz: Das arithmetische Mittel zwischen den k_n Werten, welche die Formel

$$\frac{s_1^{\alpha}\,s_2^{\alpha_2}\ldots s_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$$

anzunehmen vermag, wenn man für die Grössen α_h ganze und nicht negative Zahlen setzt, welche der Bedingung

$$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=n$$

genügen, ist eins.

Ebenso findet man leicht, dass wegen

$$1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots=e^{-s_1x-s_2x^2-s_3x^3-\ldots}$$

die Summe

$$\Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\frac{s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}\ldots s_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$$

den Wert 1 oder -1 oder 0 hat, je nachdem $24n+1$ auf die Form $(12x\pm1)^2$ oder auf die Form $(12x\pm5)^2$ oder auf keine von diesen beiden Formen sich bringen lässt.

6) Unter den hinsichtlich der Aufeinanderfolge ihrer Elemente fallend geordneten Combinationen z. S. n giebt es genau soviel r zahlige als es Combinationen giebt, die mit der Zahl r anfangen.

Beweis. Irgend einer r zahligen Combination $a_1\,a_2\ldots a_r$ entspricht eine bestimmte Combination, welche aus a_r Zahlen r, $a_{r-1}-a_r$ Zahlen $r-1$, $a_{r-2}-a_{r-1}$ Zahlen $r-2,\ldots$ besteht, denn es ist

$$(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\ldots+(r-1)(a_{r-1}-a_r)+ra_r$$
$$=a_1+a_2+\ldots+a_r=n$$

Umgekehrt lässt sich aus irgend einer mit der Zahl r beginnenden Combination eine und nur eine r zahlige Combination ableiten; welcher in dem soeben angegebenen Sinne wieder die nämliche mit r beginnende Combination entspricht. Also stimmt die Anzahl $k_{n,r}$

der r zahligen Combinationen überein mit der Anzahl der mit r beginnenden Combinationen.

Dieser Satz ist ein specieller Fall des allgemeineren: Unter den $h$ten Elementen der fallend geordneten Combinationen z. S. n giebt es genau so viele Zahlen r als es unter den Complexionen, welche aus den Combinationen z. S. n durch Hinweglassung der Elemente $1, 2, \ldots, h-1$ entstehen, r zahlige giebt.

Beweis. Man stelle aus einer bestimmten r zahligen (und keine kleinere als die Zahl h enthaltenden) Complexionen $a_1 a_2 \ldots a_r$ durch eventuelle Hinzufügung der erforderlichen aus der Reihe $1, 2, \ldots, h-1$ entnommenen Elemente wieder jene Combination $a_1 a_2 \ldots a_r a_{r+1} \ldots a_{r+y}$ zur Summe n her, aus welcher die Complexion $a_1 a_2 \ldots a_r$ entstanden ist. Man leite jetzt wie früher von der Combination $a_1 a_2 \ldots a_{r+y}$ eine neue Combination z S. n ab, welche aus a_{r+y} Zahlen $r+y$. $a_{r+y-1} - a_{r+y}$ Zahlen $r+y-1, \ldots$ besteht. Wegen

$$a_{r+y} + (a_{r+y-1} - a_{r+y}) + \ldots + (a_{r+1} - a_{r+2}) = a_{r+1}$$
$$a_{r+y} + (a_{r+y-1} - a_{r+y}) + \ldots + (a_r - a_{r+1}) = a_r$$

nimmt die Zahl r in der abgeleiteten Combination $a_r - a_{r+1}$ Stellen ein, u. zw. die $a_{r+1}+1$te, $a_{r+1}+2$te, $\ldots a_r - 1$te und $a_r$te, also gewiss auch die $h$te Stelle, weil

$$a_{r+1}+1 \leqq h \leqq a_r$$

ist. — Umgekehrt entspricht einer bestimmten Combination z. S. n deren $h$tes Element die Zahl r ist, eine bestimmte r zahlige und keine kleinere als die Zahl h enthaltende Complexion $a_1 a_2 \ldots a_r$. Hieraus folgt die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Um also die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl r in den Combinationen z. S. n zu finden, hat man blos unter den Complexionen, welche man erhält, wenn man aus allen Combinationen der Reihe nach zuerst kein Element, dann das Element 1, hierauf die Elemente 1 und 2, u. s w. weglässt, die Anzahl der r zahligen zu bestimmen. Man bemerkt leicht, dass eine Combination zur Bildung von so vielen r zahligen Complexionen beiträgt, als die Differenz zwischen ihrem $r$ten und $r+1$ten Elemente Einheiten enthält. Bezeichnet also $S_{n,h}$ die Summe der $h$ten Elemente aller Combinationen z. S. n, so ist

$$A_{n,r} = \mathfrak{S}_{n,r} - \mathfrak{S}_{n,r+1}$$

$$A_n = \sum_{r=1}^{r=n} (\mathfrak{S}_{n,r} - \mathfrak{S}_{n,r+1}) = \mathfrak{S}_{n,1}$$

Wenn hingegen jede einzelne der Combinationen z. S. n hinsichtlich der Aufeinanderfolge ihrer Elemente steigend geordnet wird, so kommt das Element 1 an der $h$ten Stelle für beliebige h, das Element $r > 1$ an der $h$ten Stelle, wenn

$$h \overset{=}{>} \frac{n}{2}$$

in allen Combinationen $k_{n-r-h+1}$ mal vor. Vermindert man nämlich in allen jenen Combinationen, welche an der $h$ten Stelle die Zahl r haben, die Elemente an den ersten $h-1$ Stellen um je 1 und lässt obendrein die Zahl r an der $h$ten Stelle weg, so erhält man Combinationen z. S. $n-r-h+1$, jedoch, wenn $r > 1$, nur dann alle diese Combinationen, wenn keine derselben mehr als $h-1$ zahlig ist. Also muss, wenn $r > 1$ ist,

$$n-r-h+1 \overset{\leq}{=} h-1$$

d. i.

$$h \overset{\geq}{=} \frac{n-r+2}{2}$$

mithin

$$h \overset{\geq}{=} \frac{n}{2}$$

sein, wenn der in Rede stehende Satz bei beliebigen r gelten soll.

7) Wenn man jede von den r zahligen Combinationen z. S. n' hinsichtlich ihrer Elemente steigend ordnet und hierauf zu den einzelnen Elementen jeder solchen Combination die Zahlen 0, 1, 2, . . . $r-1$ bzhw. addirt, so erhält man alle r zahligen Combinationen $C_{n,r}$ z. S.

$$n = n' + \binom{r}{2}$$

ohne Wiederholung. Die Anzahl der Combinationen $C_{n,r}$ werde mit $k_{n,r}$ bezeichnet.

n	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 . .
$k_{n,1}$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 . .
$k_{n,2}$	0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10 . .
$k_{n,3}$	0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10 12, 14, 16, 19, 21, 24, 27 . .
$k_{n,4}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2. 3, 5 6, 9, 11, 15, 18, 23, 27 . .
$k_{n,5}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 1, 1, 2, 3, 5, 7, 10 . .
$k_{n,6}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 . .
	. . . . .

Es ist $k_{n,1} = 1$ für alle n. Um recursive Formeln für $k_{n,r}$ zu finden, wenn $r > 1$, bemerke man, dass durch Verminderung aller Elemente um je 1 aus jenen Combinationen $C_{n,r}$, welche mit 1 anfangen, alle Combinationen $C_{n-r,r-1}$ und aus den anderen Combinationen $C_{n,r}$ alle $C_{n-r,r}$ entstehen. Folglich ist

$$k_{n,r} = k_{n-r,r-1} + k_{n-r,r}$$

Durch wiederholte Auwendung dieser Formel erhält man eine zweite, nämlich

$$k_{n,r} = k_{n-r,r-1} + k_{n-2r,r-1} + k_{n-3r,r-1} + \ldots$$

$k_{n,1}$ ist der Coefficient von x^n in der Entwicklung von $\frac{x}{1-x}$. — Ferner ist

$$k_{n,2} = k_{n-2,1} + k_{n-4,1} + \ldots$$

Nun ist $k_{n-2,1}$ der Coefficient von x^{n-2} in $\frac{x}{1-x}$ oder von x^n in $\frac{x^3}{1-x}$; ebenso ist $k_{n-4,1}$ der Coefficient von x^n in $\frac{x^5}{1-x}$; u. s. w. Also ist $k_{n,2}$ der Coefficient von x^n in

$$\frac{x^3+x^5+x^7+\ldots}{1-x} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

Ist $k_{n,r-1}$ der Coefficient von x^n in

$$x^{\binom{r}{2}} : (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})$$

so ist $k_{n-kr,r-1}$ der Coefficient von x^n in

$$x^{\binom{r}{2}+kr} : (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})$$

und $k_{n,r}$ wegen

$$k_{n,r} = k_{n-r,r-1} + k_{n-2r,r-1} + \ldots$$

der Coefficient von x^n in

$$\frac{x^{\binom{r}{2}+r} + x^{\binom{r}{2}+2r} + x^{\binom{r}{2}+3r} + \ldots}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{r-1})} = \frac{x^{\binom{r+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

Folglich ist (Euler)

$$Z = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3 + \ldots$$

8) Setzt man

$$k_{n,r} = k_{n'+\binom{r}{2},r} = K_{n',r}$$

so kann man für die Werte von $K_{n,r}$ die folgende Tabelle bilden, welche sich von jener für $k_{n,r}$ nur durch eine entsprechende Verschiebung der Zeilen unterscheidet.

n	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 15, 16, 17, 18 . . .
$K_{n,1}$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. 1, 1, 1, 1, 1, 1 1, 1, 1, 1 . . .
$K_{n,2}$	0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4. 5, 5, 6, 6, 7 7, 8, 8, 9 . . .
$K_{n,3}$	0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16 19, 21, 24, 27 . . .
$K_{n,4}$	0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 15, 18, 23 27, 34, 39, 47 . . .
$K_{n,5}$	0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 18, 23 30, 37, 47, 57 . . .
$K_{n,6}$	0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 14, 20 26, 35, 44, 58 . . .
$K_{n,7}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15 21, 28, 38, 49 . . .
$K_{n,8}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11 15, 22, 29, 40 . . .
$K_{n,9}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 7 11, 15, 22, 30 . . .
	. . . . .

$K_{n,r}$ bedeutet die Anzahl der r zahligen Combinationen z. S. n.

Weil

$$K_{n,r} = k^{n+\binom{r}{2},r}$$

so ist $K_{n,r}$ der Coefficient von $x^{n+\binom{r}{2}}$ in

$$x^{\binom{r+1}{2}} : (1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^r)$$

oder von x^n in

$$\frac{x^{\binom{r+1}{2}-\binom{r}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)} = \frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$

Es ist also

$$K_{1,r} = K_{2,r} = \ldots = K_{n-1,r} = 0$$

und

$$\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)} = K_{r,r}x^r + K_{r+1,r}x^{r+1} + \ldots$$

Ferner ist (Euler)

$$Z' = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots} = 1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3 + \ldots$$

Aus der Bedeutung von $k_{n,r}$ und $K_{n,r}$ und daraus, dass der Coefficient von x^n in

$$x^h : (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)$$

übereinstimmt mit dem Coefficienten von x^{n-h} in

$$1 : (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)$$
$$= (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots(1+x^r+x^{2r}+\ldots)$$

ergeben sich die Euler'schen Sätze: „Eine jede Zahl n lässt sich auf so viele Arten in r ungleiche Teile teilen, als die Zahl $n-\binom{r+1}{2}$ aus den Zahlen 1, 2, 3, . . . , r durch die Addition hervorgebracht werden kann. „Eine jede Zahl n lässt sich auf so viele Arten in r gleiche oder ungleiche Teile teilen, als die Zahl $n-r$ aus den Zahlen 1, 2, 3, . . . , r durch die Addition hervorgebracht werden kann.“ U. s. w.

9) Wenn man in der Gleichung

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots = 1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3 + \ldots \qquad (a)$$

$z = 1$ setzt, so wird der Coefficient von x^n auf der rechten Seite $= \Sigma_r k_{n,r}$, d. i. die Anzahl der Combinationen z. S. n ohne Wiederholung. Wegen

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$$

$$= k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots)(1-x^{2.1}-x^{2.2}+x^{2.5}+x^{2.7}-\ldots)$$

ist also

$$\Sigma_r k_{n,r} = k_n-k_{n-2}-k_{n-4}+k_{n-10}+k_{n-14}-k_{n-24}-k_{n-30}+\ldots$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung der Anzahl der Combinationen z. S. n ohne Wiederholung.

Setzt man dagegen in (a)

$$z = -1$$

so wird

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots = 1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}-\ldots$$

Hieraus folgt, dass die Summe

$$\Sigma_r(-1)^r k_{n,r} = -k_{n,1}+k_{n,2}-k_{n,3}+k_{n,4}-\ldots$$

den Wert 1 oder -1 oder 0 hat, je nachdem $24n+1$ auf die Form $(12x\pm1)^2$ oder auf die Form $(12x\pm5)^2$ oder auf keine von diesen beiden Formen sich bringen lässt.

Wenn man die Gleichung (a) nach z logarithmisch differentiirt, so erhält man

$$\frac{x}{1+xz}+\frac{x^2}{1+x^2z}+\frac{x^3}{1+x^3z}+\ldots = \frac{\frac{x}{1-x}+\frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)}z+\frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^2+\ldots}{1+\frac{x}{1-x}z+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\ldots} \qquad (b)$$

Setzt man hier

$$z = -1$$

und berücksichtigt, dass

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots = \sigma_1x+\sigma_2x^2+\sigma_3x^3+\ldots$$

$$1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}-\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots$$

so ergiebt sich

$$k_{n,1} - 2k_{n,2} + 3k_{n,3} - 4k_{n,4} + \ldots$$
$$= \Sigma_r (-1)^{r-1} r\, k_{n,r} = \sigma_n - \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2} + \sigma_{n-5} + \sigma_{n-7} - \ldots$$

Diese Gleichung könnte zur recursiven Berechnung von σ_h dienen.

Man überzeugt sich leicht, dass

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \ldots = \sigma_1' x + \sigma_2' x^2 + \sigma_3' x^3 + \ldots$$

wobei

$$\sigma_h' = (-\lambda+1)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots$$

wenn

$$h = 2^\lambda a^\alpha b^\beta$$

and $a, b \ldots$ die verschiedenen in h aufgehenden Primzahlen sind. Insbesondere ist

$$\sigma_{2h+1}' = h_{2h+1} \quad \text{und} \quad \sigma_{2(2h+1)}' = 0$$

Wenn man also in der Gleichung (b)

$$z = 1$$

setzt, so erhält man

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \ldots$$
$$= (1 + x \,.\, \Sigma k_{1,r} + x^2 \,.\, \Sigma k_{2,r} + x^3 \,.\, \Sigma k_{3,r} + \ldots)$$
$$\times (\sigma_1' x + \sigma_2' x^2 + \sigma_3' x^3 + \ldots)$$

folglich ist

$$\Sigma_r r\, k_{\eta,r} = \sigma_n' + \sigma_{n-1}' \,.\, \Sigma k_{1,r} + \sigma_{n-2}' \,.\, \Sigma k_{2,r} + \sigma_{n-3}' \,.\, \Sigma k_{3,r} + \ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} k_h (\sigma_{n-h}' - \sigma_{n-h-2}' - \sigma_{n-h-4}' + \sigma_{n-h-10}' + \sigma_{n-h-14} - \ldots)$$

10) Da $k_{n,r}$ der Coefficient von x^n in der Entwicklung von

$$\frac{x^{\binom{r+1}{r}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}$$
$$= (x + x^2 + x^3 + \ldots)(x^2 + x^4 + x^5 + \ldots)$$
$$\ldots (x^r + x^{2r} + x^{3r} + \ldots)$$

so ist $k_{n,r}$ nicht bloss die Anzahl der r zahligen Combinationen z.

S. n ohne Wiederholung und die der r zahligen Combinationen z. S. $n^1 = n - \binom{r}{2}$ mit Wiederholung, sondern auch die Anzahl jener r zahligen Combinationen z. S. n, von denen jede einzelne die Eigenschaft hat, dass ihr erstes Element durch 1, ihr zweites durch 2, ihr drittes durch 3, u. s. w. teilbar ist. Von den letztgenannten Combinationen müssen jedoch nicht alle materiell verschieden sein; so sind z. B. unter der 5 dreizahligen Combinationen dieser Art z S. 11 die 3 materiell nicht verschiedenen 263, 326, 623.

Die Summe aller Elemente von allen r zahligen Combinationen dieser Art z. S. n ist $k_{n,r}$. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Summe der $h$ten Elemente allein zu finden. Dieselbe ist augenscheinlich der Coefficient von x^n in dem Producte

$$(x+x^2+x^3+\ldots)\ldots(x^{h-1}+x^{2(h-1)}+\ldots)(hx^h+2hx^{2h}+3hx^{3h}+\ldots)$$
$$\times(x^{h+1}+x^{2(h+1)}+\ldots)\ldots(x^r+x^{2r}+x^{3r}+\ldots)$$
$$= \frac{x}{1-x}\cdot\ldots\cdot\frac{x^{h-1}}{1-x^{h-1}}\cdot\frac{hx^h}{(1-x^h)^2}\cdot\frac{x^{h+1}}{1-x^{h+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{x^r}{1-x^r}$$
$$= \frac{x^{\binom{r+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)}\,h(1+x^h+x^{2h}+\ldots)$$
$$= h(k_{1,r}x+k_{2,r}x^2+k_{3,r}x^3\ldots)(1+x^h+x^{2h}+\ldots)$$

also $h(k_{n,r}+k_{n-h,r}+k_{n-2h,r}+\ldots)$. Folglich ist die Summe aller Elemente

$$\begin{aligned} nk_{n,r} &= (k_{n,r}+k_{n-1,r}+k_{n-2,r}+\ldots)\\ &\quad+2(k_{n,r}+k_{n-2,r}+k_{n-4,r}+\ldots)\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+r(k_{n,r}+k_{n-r,r}+k_{n-2r,r}+\ldots) \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} \left[n-\binom{r+1}{2}\right]k_{n,r} &= (k_{n-1,r}+k_{n-2,r}+k_{n-3,r}+\ldots)\\ &\quad+2(k_{n-2,r}+k_{n-4,r}+k_{n-6,r}+\ldots)\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+r(k_{n-r,r}+k_{n-2r,r}+k_{n-3r,r}+\ldots) \end{aligned}$$

Ein specieller Fall dieser Gleichung ist die schon früher gefundene

$$nk_n = S_1 k_{n-1} + S_2 k_{n-2} + S_3 k_{n-3} + \ldots$$

11) Wenn man in der Gleichung

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots} = 1 + \frac{z}{1-x}z + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \ldots \quad (c)$$

$z = 1$ setzt, so erhält man

$$k_0 + k_1x + k_2x^2 + \ldots = 1 + x \cdot \Sigma K_{1,r} + x^2 \cdot \Sigma K_{2,r} + \ldots$$

$$\Sigma_r K_{n,r} = k_n$$

Setzt man hingegen $z = -1$, so wird

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots} = 1 + x \cdot \Sigma(-1)^r K_{1,r} + x^2 \cdot \Sigma(-1)^r K_{2,r} + \ldots$$

demnach ist $\Sigma_r(-1)^r K_{n,r}$ der Coefficient von x^n in der Entwicklung des Productes $(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots$

Wenn man die Gleichung (c) nach z logarithmisch differentiirt, so erhält man

$$\frac{x}{1-xz} + \frac{x^2}{1-x^2z} + \frac{x^3}{1-x^3z} + \ldots = \frac{\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)(1-x^2)}z + \frac{3x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^2 + \ldots}{1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \ldots} \quad \ldots (d)$$

Setzt man hier $z = 1$, so wird

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{3x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \ldots$$
$$= (k_0 + k_1x + k_2x^2 + \ldots)(\sigma_1x + \sigma_2x^2 + \sigma_3x^3 + \ldots)$$
$$= A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

$$\Sigma_r r K_{n,r} = A_n$$

wo A_n wie früher die Anzahl der in den Combinationen zur Summe n auftretenden Zahlen bedeutet.

Diese drei die Grössen $K_{n,r}$ betreffenden Sätze ergeben sich auch unmittelbar, wenn man erwägt, dass $K_{n,r}$ die Anzahl der r zahligen Combinationen z. S. n bedeutet.

Setzt man in (d)

$$x = -1$$

so erhält man

$$(1+x\,.\,\Sigma(-1)^r K_{1,r}+x_2\,.\,\Sigma(-1)^r K_{2,r}+\ldots)(\sigma_1' x+\sigma_2' x^2+\ldots)$$
$$= x\,.\,\Sigma(-1)^{r+1} r\,K_{1,r}+x^2\,.\,\Sigma(-1)^{r+1} r\,K_{2,r}+\ldots$$

$$\Sigma_r(-1)^{r+1} r\,K_{n,r} = \sigma_n'+\sigma_{n-1}'\,.\,\Sigma(-1)^r K_{1,r}+\sigma_{n-2}'\,.\,\Sigma(-1)^r K_{2,r}+\ldots$$

wo $\Sigma_r(-1)^{k+1} r\,K_{n,r}$ die Differenz der Anzahlen der in den ungerad- und geradzahligen Combinationen z. S. na auftretenden Zahlen bedeutet.

XIII.

Lösung des Problems über den Schnitt von Curven 2ter Ordnung.

Reduction einiger Aufgaben auf die Lösung dieses Problems.

Von

Carl Laab.

In der nachfolgenden Abhandlung habe ich es mir zur Aufgabe gemacht eine graphische genaue Lösung, d. h. eine Lösung mit Cirkel und Lineal, von Curven 2ter Ordnung in allgemeiner Lage durchzuführen. Nach der analytischen Berechnung stossen wir bei der Lösung dieses Problems auf eine Gleichung 3ten oder 4ten Grades, -- ausgenommen, es sind die zu untersuchenden Curven in einer derartigen gegenseitigen Lage, dass die analytische Berechnung eine Gleichung 2ten oder 4ten Grades, welch' letztere sich jedoch auf eine Gleichung 2ten Grades zurückführen lässt, ergiebt. — Es erscheint daher die graphische genaue Lösung dieses Problems nicht leicht denkbar und dennoch eröffnet uns die Lösung dieses Problems eine Unzahl Aufgaben, die gelöst werden können, trotzdem sie, analytisch berechnet, eine Gleichung höheren Grades geben. Sie lassen sich nämlich auf den Schnitt von Curven 2ter Ordnung zurückführen. Im Anschlusse an diese Abhandlung will ich einige solcher Aufgaben lösen und zwar:

1. Die Dreiteilung des Winkels.
2. Aus dem Ausdrucke

$$x = \sqrt[3]{abc}$$

das x construiren.

3. Eine allgemeine, erweiterte Lösung des Berührungsproblems von Apollonius und Pappus.

Bevor ich zur Lösung des Problems über den Schnitt von Curven 2ter Ordnung übergehe, will ich einige Sätze vor Augen führen, die zum Teil bekannt sind, auf die ich zum andern Teil gekommen bin. —

I. Nach Desargues ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Curven 2ter Ordnung, welche durch 4 gemeinsame Punkte gehen, wieder eine Curve 2ter Ordnung. Wir wollen diese Curve Mittelpunktscurve nennen.

Dieser Satz ist allgemein bekannt, ich brauche ihn daher nicht erst zu beweisen.

Ich will jedoch an dieser Stelle einige allgemeine Bezeichnungen durch Buchstaben erklären, an die ich mich in der ganzen Abhandlung halten will, die dazu dienen, um mich klar und schnell verständlich zu machen.

$U = 0$ sei das Symbol der Gleichung einer Curve, wobei jedesmal unter U zu verstehen ist:

$$U \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

oder

$$2U \equiv gx + hy + i = 0$$

wenn wir uns unter

$$\begin{aligned} g &= 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \\ h &= 2(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \\ i &= 2(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}) \quad \text{vorstellen.} \end{aligned}$$

Ferner sei:

Determinante $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ = Discriminante der Curve $U = 0$

Determinante $A_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Gleichung der Polare zu dem Punkte $x_1 \mid y_1$ in Bezug auf die Curve $U = 0$ lautet:

$$g_1x + h_1y + i_1 = 0$$

wobei g_1, h_1, i_1 dieselben Gleichungen haben wie g, h, i, nur sind statt der veränderlichen Coordinaten $x \mid y$, die Coordinaten $x_1 \mid y_1$ zu setzen.

Da die unendlich ferne Gerade die Polare des Mittelpunktes der Curve $U = 0$ ist, so lautet ihre Gleichung:

$$g_1 = h_1 = 0$$

und es ist der Mittelpunkt $x_1 \mid y_1$ der Curve gegeben durch die Auflösung der Gleichungen:

$$g_1 \equiv 2(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) = 0$$
$$h_1 \equiv 2(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) = 0$$

daher:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{A_{23}}{A_{33}}$$

Sind

$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = 0$$

die Gleichungen zweier Curven, welche durch 4 gemeinsame Punkte gehen, so ist:

$$U_1 - \lambda U_2 = 0$$

ebenfalls die Gleichung einer Curve, welche durch dieselben 4 Punkte geht, und je nach der Verschiedenheit von λ auch verschieden ist.

Selbstverständlich setze ich in der ganzen Abhandlung rechtwinkelige Punktcoordinaten voraus.

II. Die Schnittpunkte zweier gleichartiger, gemeinschaftlicher Tangenten an 2 gegebene Curven 2ter Ordnung liegen in der Mittelpunktscurve.

Es sei in Fig. I. (siehe Tabelle), die Curve

$$U' - \lambda_1 U'' = 0$$

die Gleichung der einen Curve mit dem Mittelpunkt O_1 und

$$U' - \lambda_2 U'' = 0$$

die Gleichung der andern Curve mit dem Mittelpunkte O_2, ferner u die Mittelpunktscurve und L_1, L_2, L_3, L_4 je 2 Tangenten an die Curven, welche sich in den Punkten M_1, M_2 der Mittelpunktscurve schneiden.

Es ist die Gleichung der Curve

$$U' - \lambda_1 U'' \equiv (g' - \lambda_1 g'')x + (h' - \lambda_1 h'')y + (i' - \lambda_1 i'') = 0$$

nach dem früher Gesagten. Daher die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Curve:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda_1 a_{22}'') \\ (a_{13}' - \lambda_1 a_{13}'') & (a_{23}' - \lambda_1 a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda_1 a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda_1 a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

und

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (a_{13}' - \lambda_1 a_{13}'') & (a_{23}' - \lambda_1 a_{23}'') \\ (a_{11}' - \lambda_1 a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda_1 a_{11}'') & (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda_1 a_{12}'') & (a_{22}' - \lambda_1 a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Die Gleichungen der Tangenten L_3 und L_4 sind:

$$L_3 \equiv (g_1' - \lambda_1 g_1'')x + (h_1' - \lambda_1 h_1'')y + (i_1' - \lambda_1 i_1'') = 0$$
$$L_4 \equiv (g_2' - \lambda_1 g_2'')x + (h_2' - \lambda_1 h_2'')y + (i_2' - \lambda_1 i_2'') = 0$$

wobei in g_1'. g_1'', g_2', g_2'' statt der Veränderlichen $x \mid y$ die Coordinaten der Berührungspunkte 1 und 2 der Tangenten L_3 und L_4 einzusetzen sind.

Die Coordinaten des Schnittpunktes M_1 von den Tangenten L_3 und L_4 sind daher:

$$\alpha) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} (h_1' - \lambda_1 h_1'') & (i_1' - \lambda_1 i_1'') \\ (h_2' - \lambda_1 h_2'') & (i_2' - \lambda_1 i_2'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (g_1' - \lambda_1 g_1'') & (h_1' - \lambda_1 h_1'') \\ (g_2' - \lambda_1 g_2'') & (h_2' - \lambda_1 h_2'') \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (i_1' - \lambda_1 i_1'') & (g_1' - \lambda_1 g_1'') \\ (i_2' - \lambda_1 i_2'') & (g_2' - \lambda_1 g_2'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (g_1' - \lambda_1 g_1'') & (h_1' - \lambda_1 h_1'') \\ (g_2' - \lambda_1 g_2'') & (h_2' - \lambda_1 h_2'') \end{vmatrix}}$$

Nun ist aber M_1 ebenfalls der Mittelpunkt irgend einer Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von

$$U' - \lambda_1 U'' = 0 \quad \text{und} \quad U' - \lambda_2 U'' = 0$$

geht.

Ich kann annehmen, dass M_6 der Mittelpunkt der Curve $U = 0$ und M_2 der Mittelpunkt der Curve $U'' = 0$ sei, daher sind die Coordinaten von M_1:

$$\beta) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12}' & a_{13}' \\ a_{22}' & a_{23}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{13}' & a_{11}' \\ a_{23}' & a_{12}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix}}$$

die Coordinaten des Punktes M_2:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12}'' & a_{13}'' \\ a_{22}'' & a_{23}'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{13}'' & a_{61}'' \\ a_{23}'' & a_{12}'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' \end{vmatrix}}$$

Da in den Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ die Coordinaten dieselben sind, so können sich die einzelnen Glieder der Determinanten in $\alpha)$ von denen in $\beta)$ nur durch einen Factor z. B. ϱ unterscheiden.

Es ist daher

$$\begin{aligned} (h_1' - \lambda_1 h_1'') &= \varrho \,.\, a_{12}' & (i_2' - \lambda_1 i_2'') &= \varrho \,.\, a_{23}' \\ (h_2' - \lambda_1 h_2'') &= \varrho \,.\, a_{22}' & (g_1' - \lambda_1 g_1'') &= \varrho \,.\, a_{11}' \\ (i_1' - \lambda_1 i_1'') &= \varrho \,.\, a_{13}' & (g_2' - \lambda_1 g_2'') &= \varrho \,.\, a_{12}' \end{aligned}$$

Nach diesem lassen sich die Gleichungen der Tangenten L_1, L_2, L_3, L_4, wie folgt, aufschreiben:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv a_{11}''x + a_{12}''y + a_{13}'' = 0 \\ L_2 &\equiv a_{12}''x + a_{22}''y + a_{23}'' = 0 \\ L_3 &\equiv a_{11}'x + a_{12}'y + a_{13}' = 0 \\ L_4 &\equiv a_{12}'x + a_{22}'y + a_{23}' = 0 \end{aligned}$$

Sollen die Tangenten an beide Curven

$$U' - \lambda_1 U'' = 0 \quad \text{und} \quad U' - \lambda_2 U'' = 0$$

gemeinschaftlich sein, so muss L_1 mit L_3 und L_2 mit L_4 zusammenfallen. Es kann sich daher L_1 von L_3, ferner L_2 von L_4 nur durch einen Factor z. B. μ unterscheiden. Es treten daher folgende Gleichungen in Kraft:

$$\begin{aligned} L_1 - \mu L_3 &= 0 \\ L_2 - \mu L_4 &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (a_{11}' - \mu a_{11}'')x + (a_{12}' - \mu a_{12}'')y + (a_{13}' - \mu a_{13}'') &= 0 \\ (a_{12}' - \mu a_{12}'')x + (a_{22}' - \mu a_{22}'')y + (a_{23}' - \mu a_{23}'') &= 0 \end{aligned}$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes dieser beiden gemeinschaftlichen Tangenten lauten

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \mu a_{12}'') & (a_{22}' - \mu a_{22}'') \\ (a_{23}' - \mu a_{13}'') & (a_{23}' - \mu a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \mu a_{11}'') & (a_{12}' - \mu a_{12}'') \\ (a_{12}' - \mu a_{12}'') & (a_{22}' - \mu a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (a_{13}' - \mu a_{13}'') & (a_{23}' - \mu a_{23}'') \\ (a_{11}' - \mu a_{11}'') & (a_{12}' - \mu a_{12}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \mu a_{11}'') & (a_{12}' - \mu a_{12}'') \\ (a_{12}' - \mu a_{12}'') & (a_{22}' - \mu a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Und diese sind nichts anders als die Mittelpunktscoordinaten der Curve:

$$(g' - \mu g'')x + (h' - \mu h'')y + (i' - \mu i'') = 0$$

Diese Gleichung stellt uns eine Curve dar, die durch die 4 gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Curven

$$U' = 0 \quad \text{und} \quad U'' = 0$$

geht. Daher muss ihr Mittelpunkt in der Mittelpunktscurve u liegen. Weil derselbe mit dem Schnittpunkte der beiden gemeinschaftlichen Tangenten an beide Curven identisch ist, so ist der Satz bewiesen.

III. Zieht man zu einem gegebenen Punkte die Polaren in Bezug auf alle Curven, welche durch 4 gemeinschaftliche Punkte gehen, so schneiden sich dieselben in ein und demselben Punkte.

Es seien

$$U' = 0, \quad U'' = 0, \quad U''' \equiv U' - \lambda U'' = 0$$

die Gleichungen dreier Curven, welche durch 4 gemeinschaftliche Punkte gehen, ferner P_0 von den Coordinaten $x_0 \mid y_0$ der gegebene Punkt, p', p'', p''' die Polaren dieses Punktes in Bezug auf die Curven

$$U' = 0, \quad U'' = 0, \quad U''' = 0$$

so ist:

$$2U' \equiv g'x + h'y + i' = 0$$
$$2U'' \equiv g''x + h''y + i'' = 0$$
$$2U''' \equiv 2(U' - \lambda U'') \equiv (g' - \lambda g'')x + (h' - \lambda h'')y + (i' - \lambda i'') = 0$$

$$p' \equiv g_0'x + h_0'y + i_0' = 0$$
$$p'' \equiv g_0''x + h_0''y + i_0'' = 0$$
$$p''' \equiv (g' - \lambda g'')x_0 + (h' - \lambda h'')y_0 + (i' - \lambda i'') = 0$$
$$p''' \equiv (g'x_0 + h'y_0 + i') - \lambda(g''x_0 + h''y_0 + i'') = 0$$

wobei g_0', h_0', i_0', g_0'', h_0'', i_0'' dieselbe Bedeutung haben, wie g', i',

i', g'', h'', i'', nur sind statt der variablen Grössen $x \mid y$, die Coordinaten $x_0 \mid y_0$ des Punktes P_0 eingesetzt.

Durch Vertauschung der Indices:

$$p''' \equiv g_0'x + h_0'y + i_0' - \lambda(g_0''x + h_0''y + i_0'') = 0$$
$$p''' \equiv p' - \lambda p'' = 0$$

Diese Gldichung stellt ein Strahlenbüschel dar, daher der Satz bewiesen ist.

IV. Zieht man an 2 gegebene Curven 2ter Ordnung 2 gleichartige, gemeinschaftliche Tangenten und verbindet man die zu einer Curve gehörigen Berührungspunkte mittelst Geraden, so geht durch den Schnittpunkt derselben die Verbindungsgerade zweier gemeinschaftlichen Schnittpunkte dieser Curven.

Bezeichnen wir in Fig II. der Tabelle die Schnittpunkte der 3 Geraden L_1, L_2, L_3 untereinander mit den Ziffern 1, 4, 7, ferner die Schnittpunkte derselben Geraden mit der Curve mit den Ziffern 2, 3, 5, 6, 8, 9, dann zur Vereinfachung des Beweises das Verhältniss der Strecke $\overline{12}$ zur Strecke $\overline{42}$ mit dem Symbol (142), weiter das Verhältniss von $\overline{13}$ zu $\overline{43}$ mit (143) also:

$$\frac{\overline{12}}{\overline{42}} = (142) \qquad \frac{\overline{13}}{\overline{43}} = (143) \quad \text{u. s. w.}$$

so ist nach Carnot:

$$(142) \,.\, (143) \,.\, (475) \,.\, (476) \,.\, (718) \,.\, (719) = 1$$

Bedeuten in Fig. III der Tabelle L_1 und L_2 die gemeinschaftlichen Tangenten an die Curen U' und U'', ferner die Punkte 2, 7, 8, 9 die Berührungspunkte derselben, die Punkte 4 und 5 die Schnittpunkte der beiden Curven, dann die Punkte 3 und 6 die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden von 4 und 5 mit den Tangenten L_1 und L_2, und bezeichnen wir wie früher mit dem Symbol z. B. (132) das Verhältniss der Strecke $\overline{12}$ zur Strecke $\overline{32}$, so haben nach der Relation von Carnot folgende Gleichungen Giltigkeit:

$$(132) \,.\, (132) \,.\, (364) \,.\, (365) \,.\, (617) \,.\, (617) = 1$$
$$(138) \,.\, (138) \,.\, (364) \,.\, (365) \,.\, (619) \,.\, (619) = 1$$

durch Division:

$$[(132)]^2 \,.\, [(617)]^2 = [(138)]^2 \,.\, [(619)]^2$$

oder

$$(132) \,.\, (617) = (138) \,.\, (619)$$

daher:

$$\frac{(132)}{(138)} = \frac{(619)}{(617)}$$

Daraus ersieht man, dass die Doppelverhältnisse der Punkte 1, 2, 3, 8, und der Punkte 1, 7, 6, 9 einander gleich sind, woraus erhellt, dass die Strahlen, welche durch die Punkte 7, 2, ferner durch 4, 5, und durch 8, 9 gehen, sich in einem Punkte schneiden müssen.

V. Zieht man von Punkten einer Geraden die Polaren in Bezug auf 2 gegebene Curven, so liegen die Schnittpunkte dieser, je 2 zusammengehörigen Polaren, wieder in einer Geraden. Durch diese Schnittpunkte gehen selbstverständlich nach Satz III. auch die zu den Punkten der Geraden gehörigen Polaren aller Curven, welche durch die 4 Schnittpunkte der gegebenen Curven gehen.

Es wären 2 Curven U', U'' und eine Gerade L gegeben. Wir nehmen 3 Punkte P_1, P_2, P_3 in dieser Geraden an. Die zu den Punkten gehörigen Polaren in Bezug auf die Curven U' und U'' bezeichnen wir mit p_1', p_2', p_3' und p_1'', p_2'', p_3''. Die Coordinaten der Punkte P_1 seien x_1, y_1, von P_2, x_2, y_2, von P_3, x_3, y_3.

Da P_3 auf der Verbindungsgeraden von P_1 und P_2 liegt, so unterliegen seine Coordinaten folgender Relation:

$$x_3 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y_3 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

wobei λ ein veränderlicher Parameter ist.

Es ist

$$p_3' \equiv g' x_3 + h' y_3 + i' = 0$$
$$p_3'' \equiv g'' x_3 + h'' y_3 + i'' = 0$$

Für x_3 und y_3 die oben gefundenen Werte eingesetzt:

$$p_3' \equiv g' \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + h' \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} + i' = 0$$
$$p_3' \equiv g'(x_1 - \lambda x_2) + h'(y_1 - \lambda y_2) + i'(1 - \lambda) = 0$$
$$p_3' \equiv g' x_1 + h' y_1 + i' - \lambda(g' x_2 + h' y_2 + i') = 0$$
$$p_3' \equiv g_1' x + h_1' y + i_1' - \lambda(g_2' x + h_2' y + i_2') = 0$$
$$p_3' \equiv (g_1' - \lambda g_2') x + (h_1 - \lambda h_2') y + (i_1' - \lambda i_2') = 0$$

$$p_3'' \equiv g'' \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} + h'' \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} + i'' = 0$$

$$p_3'' \equiv g_0''(x_1 - \lambda x_2) + h_0''(y_1 - \lambda y_2) + i''(1-\lambda) = 0$$

$$p_3'' \equiv g''x_1 + h''y_1 + i'' - \lambda(g''x_2 + h''y_2 + i'') = 0$$

$$p_3'' \equiv g_1''x + h_1''y + i_1'' - \lambda(g_2''x + h_2''y + i_2'') = 0$$

$$p_3'' \equiv (g_1'' - \lambda g_2'')x + (h_1'' - \lambda h_2'')y + (i_1'' - \lambda i_2'') = 0$$

Die Gleichung einer Geraden M, welche durch den Schnittpunkt von p_3' und p_3'' hindurchgeht, lautet:

$$M \equiv p_3' - \varrho\, p_3'' = 0$$

wobei ϱ ein veränderlicher Parameter ist.

Die Werte für p_3' und p_3'' in diese Gleichung eingesetzt ergeben:

$$M \equiv (g_1' - \lambda g_2')x + (h_1' - \lambda h_2')y + (i_1' - \lambda i_2') - \varrho[(g_1'' - \lambda g_2'')x + (h_1'' - \lambda h_2'')y + (i_1'' - \lambda i_2'')] = 0$$

$$M \equiv [(g_1' - \lambda g_2') - \varrho(g_1'' - \lambda g_2'')]x + [(h_1' - \lambda h_2') - \varrho(h_1'' - \lambda h_2'')]y + [(i_1' - \lambda i_2') - \varrho(i_1'' - \lambda i_2'')] = 0$$

$$M \equiv [g_1' - \lambda g_2' - \varrho g_1'' + \varrho\lambda g_2'']x + [h_1' - \lambda h_2 - \varrho h_1'' + \varrho\lambda h_2'']y + [i_1' - \lambda i_2' - \varrho i_1'' + \varrho\lambda i_1''] = 0$$

$$M \equiv [(g_1' - \varrho g_1'') - \lambda(g_2' - \varrho g_2'')]x + [(h_1' - \varrho h_1'') - \lambda(h_2' - \varrho h_2'')]y + [(i_1' - \varrho i_1'') - \lambda(x_2' - \varrho i_2'')] = 0$$

$$M \equiv (g_1' - \varrho g_1'')x + (h_1' - \varrho h_1'')y + (i_1' - \varrho i_1'') - \lambda[(g_2' - \varrho g_2'')x + (h_2' - \varrho h_2'')y + (i_2' - \varrho i_2'')] = 0$$

Nun ist aber

$$p_1' \equiv g_1'x + h_1'y + i_1' = 0$$

$$p_1'' \equiv g_1''x + h_1''y + i_1'' = 0$$

$$p_1' - \varrho p_1'' \equiv (g_1' - \varrho g_1'')x + (h_1' - \varrho h_1'')y + (i_1' - \varrho i_1'') = 0$$

$$p_2' \equiv g_2'x + h_2'y + i_2' = 0$$

$$p_2'' \equiv g_2''x + h_2''y + i_2'' = 0$$

$$p_2' - \varrho p_2'' \equiv (g_2' - \varrho g_2'')x + (h_2' - \varrho h_2'')y + (i_3' - \varrho i_2'') = 0$$

Diese Werte in die obere Gleichung eingesetzt, ergeben:

$$M \equiv (p_1' - \varrho p_1'') - \lambda(p_2' - \varrho p_2'') = 0$$

Da sich in dieser Gleichung die Gerade $(p_1' - \varrho p_1'')$, welche durch den Schnittpunkt von p_1' und p_1'' hindurchgeht, von der

Geraden $(p_2' - \varrho p_2'')$ welche durch den Schnittpunkt von p_2' und p_2'' hindurchgeht nur durch den Factor λ von einander unterscheidet, so können die Geraden $(p_1' - \varrho p_1'')$ und $(p_2' - \varrho p_2'')$ nur entweder parallel sein oder sie müssen zusammenfallen. Der erste Fall ist nicht möglich, da beide Gerade laut Annahme der Geraden M durch den Schnittpunkt von p_3' und p_3'' hindurchgehen müssen. Infolgedessen muss der zweite Fall eintreten, die Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen in einer Geraden laut Annahme, die Schnittpunkte der zusammengehörigen Polaren nach eben erbrachten Beweise ebenfalls.

Schnitt zweier Curven.

Es wären in Fig IV. die beiden Curven U' (Kreis) und U'' (Hyperbel) gegeben mit ihren Mittelpunkten O' und O''. Die Schnittpunkte dieser beiden Curven wären zu suchen.

Indem ich die früher ausgesprochenen Sätze ins Auge fasse, nehme ich einen Punkt der Mittelpunktscurve an, hier am besten den Punkt O' (sonst müsste ich mir einen Punkt der Mittnlpunkts curve errechnen, was sehr leicht geschieht, wie später gezeigt wird).

Von diesem Punkte O' ziehe ich mir an die Hyperbel die Tangenten T_1 und T_2, welche dieselbe in den Punkten 1 und 2 berühren. Nun brauche ich die Berührungspunkte jener Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U' und U'' hindurchgehen und die Geraden T_1 und T_2 berührt. Diese Forderung ist möglich und zwar nach dem Satze Nr. III. und deshalb, weil jede Curve 2ter Ordnung durch 5 Stücke vollkommen bestimmt ist.

Ich finde diesen Berührungspunkt folgendermassen.

Ich ziehe vom Punkte 1 die Polare in Bezug auf den Kreis U'; wo diese Polare die Tangente T_1 schneidet, also im Punkte I., liegt der Berührungspunkt der geforderten Curve.

Die Begründung hiefür liegt im Folgenden. Es ist

$$T_1 \equiv g_1''x + h_1y + i_1''$$
$$p_1' \equiv g_1'x + h_1'y + i_1'$$

wenn der Pol von T_1, also der Punkt 1, die Coordinaten $x_1 y_1$ hat

$$T_1 - \lambda p_1' \equiv (g_1'' - \lambda g_1')x + (k_1'' - \lambda h_1')y + (i_1'' - \lambda i_1') = 0$$

$(T_1 - \lambda p_1')$ ist aber die Polare des Punktes 1 in Bezug auf die Curve $(U' - \lambda U'')$. Da aber der Punkt 1 in der Polare T_1 des

des Punktes I. in Bezug auf die Curve $(U' - \lambda U'')$ liegt, so muss die Polare des Punktes 1 in Bezug auf die Curve $(U' - \lambda U'')$, also $(T_1 - \lambda p_1')$, durch den Berührungspunkt der zu suchenden Curve gehen. Nun ist aber $(T_1 - \lambda p_1')$ nichts anderes als das Symbol einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt von T_1 und p_1' hindurch geht, also durch den Punkt I., daher I. der Berührungspunkt der zu suchenden Curve.

Mit dem Punkte 2 mache ich dasselbe und bekomme durch den Schnitt von p_2' und T_2 den Berührungspunkt der zu suchenden Curve also II.

Durch den Schnitt der Verbindungslinien von den Punkten 1 und 2, sowie von I. und II. bekomme ich nach dem Satze Nr. IV. den Punkt A, ein Punkt jener Geraden, welche durch 2 gemeinschaftliche Schnittpunkte der Curven U' und U'' hindurch geht.

Es handelt sich nun darum einen 2ten Punkt der Geraden zu bekommen.

Dies geschieht dadurch, dass ich mir zum Punkte O'' die Polare P in Bezug auf den Kreis U' construire, sodann mache ich Anwendung vom Satze Nr. V., — da ich keine Tangenten ziehen, somit auch nicht deren Berührungspunkte in der Polaren P finden kann — und nehme mir 2 beliebige Punkte in der Polaren P an, also 3 und 4; zu diesen Punkten ziehe ich mir die Polaren in Bezug auf die Curven U' und U''; ich nenne diese Polaren p_3', p_3'', p_4', p_4''. Der Schnittpunkt von p_3' und p_3'' ist N, der von p_4' und p_4'' ist M. Die Verbindungsgerade von M und N schneidet die Polare P im Punkte B, welcher ein zweiter Punkt jener Geraden ist, welche durch 2 Schnittpunkte der Curven U' und U'' hindurch geht. Die Verbindung von A und B geht durch 2 Schnittpunkte der Curven U' und U''.

Natürlich muss man bei einer derartigen Lage der Curven gleich vom Anfang so construiren, dass man 2 gleichnamige Punkte A und B erhält, d h. dass die Punkte A und B für ein und dieselben 2 Schnittpunkte der Curven U' und U'' erhalten sind. Dies wird aber durch die soeben dargestellte Construction kaum, d. h. bei dieser speciellen Lage der Curven gar nicht möglich sein, weil die Construction des Punktes O'' und der Polaren P für die Schnittpunkte des linken Hyperbelastes, während die Construction des Punktes A für die beiden Schnittpunkte der rechten Hyperbelastes giltig sind.

Man wird daher zur Construction des Punktes B ein anderes Verfahren einschlagen

Man construirt sich einen günstigen Punkt der Mittelpunktscurve und verfährt dann gerade so, wie mit der Construction vom Punkte $0''$ aus, u. s. w.

Die Construction des Punktes der Mittelpunktscurve oder der Mittelpunktscurve selbst, kann im vorliegenden, sowie in allen ähnlichen Fällen durch Rechnung sehr leicht gefunden werden und zwar:

Es sei die Gleichung der Hyperbel

$$U'' \equiv 2xy + x_1 y - xy_1 = 0$$

wobei x, y die Variablen und x_1, y_1 zwei beliebige Constanten bedeuten, und die Gleichung des Kreises

$$U' \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

wobei x, y die Variablen und r den Radius des Kreises bedeutet.

Um nun einen Punkt der Mittelpunktscurve zu rechnen, brauche ich nur

$$g_x = h_x = 0$$

zu setzen, wobei g_x und h_x die schon anfangs erwähnte Bedeutung haben; daraus rechnet man die Variabeln x und y und hat schon die Coordinaten für einen Punkt der Mittelpunktscurve.

Für den Mittelpunkt einer Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U' und U'' hindurchgeht, also für die Curve $(U' - \lambda U'')$, ist:

$$g \equiv (g' - \lambda g'') \equiv (a_{11}' - \lambda a_{11}'')x + (a_{12}' - \lambda a_{12}'')y + (a_{13}' - \lambda a_{13}'') = 0$$
$$h \equiv (h' - \lambda h'') \equiv (a_{12}' - \lambda a_{12}'')x + (a_{22}' - \lambda a_{22}'')y + (a_{23}' - \lambda a_{23}'') = 0$$

U' . . . $a_{11}' = a_{22}' = a_{33}' = 0 \quad a_{12}' = 1$

$$a_{13}' = -\frac{y_1}{2}, \quad a_{23}' = +\frac{x_1}{2}$$

U'' . . . $a_{12}'' = a_{13}'' = a_{23}'' = 0 \quad a_{11}'' = 1, \quad a_{22}'' = 1$

$$a_{33}'' = -r^2$$

λ kann verschiedene Werte annehmen. Ich nehme hier $\lambda = 1$ an, somit ist

$$g \equiv 2x - 2y + y_1 = 0$$
$$h \equiv 2x - 2y + x_1 = 0$$

Diese beiden Geraden sind parallel, haben daher ihren Schnittpunkt im Unendlichen; wir haben es daher mit dem unendlich fernen

Punkte der Mittelpunktscurve zu tun, und es ist die Richtung dieser beiden Geraden auch gleichzeitig die Richtung der Asymptote.

Setzen wir $\lambda = 2$, so ergiebt sich:

$$g \equiv 4x - 2y + y_1 = 0$$
$$h \equiv 2x - 4y + x_1 = 0$$

daraus folgt

$$x = \frac{2y_1 - x_1}{6}, \quad y = \frac{2x_1 - y_1}{6}$$

als Coordinaten eines Punktes der Mittelpunktscurve. Von diesem Punkte aus wird nun die Construction, wie schon früher erwähnt, durchgeführt.

Es ist interessant, die Lage der Mittelpunktscurve selbst zu kennen, weil man aus derselben verschiedene Schlüsse machen kann.

Wir berechnen die Gleichung derselben folgendermassen:

Die Gleichungen des Mittelpunktes einer Curve $(U' - \lambda U'')$ lauten:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \lambda a_{12}'')\,(a_{22}' - \lambda a_{22}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'')\,(a_{23}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'')\,(a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'')\,(a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'')\,(a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'')\,(a_{23}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'')\,(a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'')\,(a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Die Werte eingesetzt:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (0-\lambda 1)\,(1-\lambda 0) \\ \left(0+\lambda\frac{y_1}{2}\right)\left(0-\lambda\frac{x_1}{2}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-\lambda 0)\,(0-\lambda 1) \\ (0-\lambda 1)\,(1-\lambda 0) \end{vmatrix}} = \frac{\lambda^2\frac{x_1}{2} - \lambda\frac{y_1}{2}}{1-\lambda^2} = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(\lambda x_1 - y_1)$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} (1-\lambda 0)\,(0-\lambda 1) \\ \left(0+\lambda\frac{y_1}{2}\right)\left(0-\lambda\frac{x_1}{2}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-\lambda 0)\,(0-\lambda 1) \\ (0-\lambda 1)\,(1-\lambda 0) \end{vmatrix}} = \frac{\lambda\frac{x_1}{2} - \lambda^2\frac{y_1}{2}}{1-\lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(x_1 - \lambda y_1)$$

$$x = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(\lambda x_1 - y_1)$$

$$y = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(x_1 - \lambda y_1)$$

Durch Elimination von λ erhalten wir eine Gleichung mit den Veränderlichen x und y, welche uns die Gleichung der Mittelpunktscurve darstellt.

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda x_1 - y_1}{x_1 - \lambda y_1}$$

$$x(x_1 - \lambda y_1) = y(\lambda x_1 - y_1)$$

$$xx_1 - \lambda xy_1 = \lambda x_1 y - yy_1$$

$$xx_1 + yy_1 = \lambda(x_1 y + xy_1)$$

$$\lambda = \frac{xx_1 + yy_1}{x_1 y + xy_1}$$

$$\frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)} = \frac{\dfrac{xx_1 + yy_1}{x_1 y + xy_1}}{2\left(\dfrac{x_1^2 y^2 + x^2 y_1^2 - x^2 x_1^2 - y^2 y_1^2}{(x_1 y + xy_1)^2}\right)}$$

$$\frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)} = \frac{(xx_1 + yy_1)(x_1 y + xy_1)}{2(x^2 - y^2)(y_1^2 - x_1^2)}$$

$$\lambda x_1 - y_1 = \frac{xx_1^2 + x_1 y_1 y}{x_1 y + xy_1} - y_1$$

$$\lambda x_1 - y_1 = \frac{x(x_1^2 - y_1^2)}{x_1 y + xy_1}$$

$$x = \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}(\lambda x_1 - y_1) = \frac{(xx_1 + yy_1)(x_1 y + xy_1) = x(x_1^2 - y_1^2)}{-2(x^2 - y^2)(y_1^2 - x_1^2)(x_1 y + xy_1)}$$

$$1 = \frac{xx_1 + yy_1}{-2(x^2 - y^2)}$$

$$2(y^2 - x^2) = xx_1 + yy_1$$

$$y^2 = \frac{y_1}{2}y = x^2 + \frac{x_1}{2}x$$

Die letzte Gleichung ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Coordinatenaxen parallel zu den angenommenen Coordinatenaxen der Hyperbel U'' (also zu den Asymptoten der ursprünglichen Hyperbel U'') sind. Der Mittelpunkt dieser Mittelpunktscurve liegt in O'', wobei

$$O'O''' = O''O'''$$

ist, die Axen dieser Curve liegen in den Parallelen durch O''' zu den Asymptoten der ursprünglichen Hyperbel U''. Die Lage dieser Mittelpunktshyperbel ist in Fig. IV. durch die Curve U''' ersichtlich gemacht. Die Axe a derselben ist

$$a = \tfrac{1}{4}\sqrt{x_1^2 - y_1^2}$$

Die Curve U'' giebt uns auch darüber Aufschluss, welcher Teil der Hyperbel U'' genommen werden muss, um darin Punkte anzunehmen, von welchen aus die Construction durchgeführt werden kann, damit man Punkte jener Geraden erhalte, welche durch ein und dieselben Schnittpunkte der Curven U' und U'' hindurchgeht.

Die Dreiteilung des Winkels.

Es wäre in Fig. V., ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte 0, ferner der Punkt 1 der Peripherie. Der Winkel 1, 0, 6 wäre gleich α und der Winkel 3, 0, 5 $= \frac{\alpha}{3}$. Verbinde ich den Punkt 1 mit dem Punkte 3 und verlängere die Verbindungsgerade, bis sie die Axe x im Punkte 4 durchschneidet, so ist offenbar die Länge der Geraden $\overline{34}$ gleich r, dem Radius des Kreises. Denn der Winkel α ist gleich der Summe der Winkel bei den Punkten 1 und 4, der Winkel beim Punkte 0 ist gleich der Summe der Winkel bei 0 und 4, das Dreieck 1, 0, 3 ist gleichschenklig, daher der Winkel bei 1 gleich dem bei 3, der Winkel bei 0 ist $\frac{\alpha}{3}$, daher muss der Winkel bei 4 ebenfalls $\frac{\alpha}{3}$ sein, das Dreieck 0, 3, 4, muss infolgedessen auch gleichschenklig sein, deshalb $\overline{03}$ gleich 34 gleich dem Radius des Kreises.

Die Coordinaten der Punkte 1, 2, 3 u. s w. wären $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$ u. s. w.

Es ist:

$$(x_4 - x_3)^2 + y_3^2 = r^2$$
$$x_4^2 - 2x_4x_3 + x_3^2 + y_3^2 = r^2$$
$$x_3^2 + y_3^2 = r^2$$

daher

$$x_4^2 - 2x_4x_3 = 0$$
$$x_4 = 2x_3$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Gerade $\overline{34}$ gleich ist der Geraden $\overline{23}$ gleich dem Radius des Kreises.

Nun handelt es sich darum, eine Curve 2ter Ordnung zu errechnen, welche durch den Punkt 3 hindurchgeht; ist dies gelungen, so ist die ganze Aufgabe auf den Schnitt zweier Curven zurückgeführt, welche nach dem früher Gesagten durchgeführt werden kann, da der Punkt 3 genau ermittelt ist, und somit der Winkel 1, 0, 6, in 3 Teile geteilt wird.

Wir wollen nun eine solche Curve errechnen.

$$\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} = \frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}$$

$$(x_1-x_2)(y_1-y_3) = (y_1-y_2)(x_1-x_3)$$

$$x_1y_1-x_2y_1-x_1y_3+x_2y_3 = y_1x_1-y_2x_1-x_3y_1+x_3y_2$$

da $$x_2 = 0$$

$$x_1y_3 = x_1y_2+x_3y_1-x_3y_2$$

$$x_1y_3 = 2r_1y_3+r_3y_1-2x_3y_3$$

Nehmen wir statt $x_3 \mid y_3$ die allgemeinen Coordinaten $x \mid y$, so erhalten wir:

$$x_1y = 2r_1y+xy_1-2ry$$

$$x_1y+xy_1-2xy = 0$$

Da aber x_1 in diesem Falle negativ ist, so wird

$$2xy+x_1y-xy_1 = 0$$

Das ist dieselbe Gleichung, die ich früher beim Schnitt der Curven U' und U'' in Fig. IV. angenommen habe. Es ist die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf Coordinatenaxen, die zu ihren Asymptoten parallel sind. Der Mittelpunkt $0''$ lässt sich nach der bekannten Art sehr schnell rechnen, ebenso durch Transformation der Coordinaten, die Axen der Hyperbel, und es ist somit die ganze Construction genau so durchzuführen, wie es in Fig. IV. durchgeführt wurde.

Es ist aus den Strecken a, b, und c das x zu construiren, welches der Gleichung genügt,

$$x = \sqrt[3]{abc}$$

Wenn ich diese Gleichung in Proportionen zerlege und dabei noch eine Unbekannte y einführe, so erhalte ich:

I) $\quad x : a = y : x \ldots\ldots x^2 = ay$

II) $\quad x : b = c : y \ldots\ldots x = \frac{bc}{y}$

daher

$$x^3 = abc$$

Die Gleichung I) drückt aber die Scheitelgleichung einer Parabel aus, bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen y Axe mit der Parabelaxe zusammenfällt, während die Gleichung II) eine Hyperbel und zwar eine gleichseitige Hyperbel darstellt, deren Asymptoten mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Die Axe dieser gleichseitigen Hyperbel ergiebt sich aus ihrer Gleichung

$$xy = bc$$

und ist daher $2\sqrt{2bc}$, der Parameter der Parabel resultirt aus seiner Gleichung

$$x^2 = ay$$

und ist gleich a.

Die Lage dieser beiden Curven ist daher vollkommen bestimmt. Man kann daher nach dem allgemeinen Verfahren den Schnitt dieser beiden Curven bestimmen; die Abscisse des einzigen reellen Schnittpunktes giebt den Wert, welcher der Gleichung

$$x = \sqrt[3]{abc}$$

genügt.

Da die Mittelpunkte dieser beiden Curven eine ungünstige Lage haben, so wird es notwendig sein, sich 2 Punkte der Mittelpunktscurve zu rechnen und zu construiren, um von diesen aus den Schnitt der Curven nach der bekannten Art und Weise durchzuführen.

Wie die Rechnung eines solchen Punktes der Mittelpunktscurve geschieht, ist bereits früher gezeigt worden. Also:

$$U' \equiv x^2 - ay = 0 \ldots\ldots a_{11}' = 1, \quad a_{23}' = -\frac{a}{2}$$
$$a_{12}' = a_{13}' = a_{22}' = a_{33}' = 0$$

$$U'' \equiv xy - bc = 0 \ldots\ldots a_{12}'' = \tfrac{1}{2}, \quad a_{33}'' = -bc$$
$$a_{11}'' = a_{22}'' = a_{12}'' = a_{23}'' = 0$$

$$U' - \lambda U'' \equiv x^2 - ay - \lambda(xy - bc) = 0$$

$$U' - \lambda U'' \equiv x^2 - ay - \lambda xy + \lambda bc = 0$$

Durch die verschiedenen Werte von λ erhalte ich verschiedene Punkte der Mittelpunktscurve, wenn ich aus der Gleichung $(U' - \lambda U'')$ welche mir ebenfalls eine Curve darstellt, die durch die 4 Schnittpunkte von U' und U'' hindurchgeht, die Coordinaten ihres Mittelpunktes errechne.

Ich erhalte für die Coordinaten des Mittelpunktes einer Curve $(U' - \lambda U'')$ (identisch mit einem Punkte der Mittelpunktscurve) folgende Werte:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - \lambda a_{12}'')(a_{22}' - \lambda a_{22}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'')(a_{33}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'')(a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'')(a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'')(a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{13}' - \lambda a_{13}'')(a_{23}' - \lambda a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - \lambda a_{11}'')(a_{12}' - \lambda a_{12}'') \\ (a_{12}' - \lambda a_{12}'')(a_{22}' - \lambda a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Für einen bestimmten Punkt setze ich $\lambda = 1$. Somit ist:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_{12}' - a_{12}'')(a_{22}' - a_{22}'') \\ (a_{13}' - a_{13}'')(a_{23}' - a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - a_{11}'')(a_{12}' - a_{12}'') \\ (a_{12}' - a_{12}'')(a_{22}' - a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} (a_{11}' - a_{11}'')(a_{12}' - a_{12}'') \\ (a_{13}' - a_{13}'')(a_{23}' - a_{23}'') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}' - a_{11}'')(a_{12}' - a_{12}'') \\ (a_{12}' - a_{12}'')(a_{22}' - a_{22}'') \end{vmatrix}}$$

Die den Gleichungen für U' und U'' entsprechenden Werte eingesetzt, ergeben:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{a}{4}}{-\frac{1}{4}} = -a$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{a}{2}}{-\frac{1}{4}} = -2a$$

Somit wäre ein Punkt der Mittelpunktscurve bestimmt. Setze ich für λ einen andern Wert, so erhalte ich einen zweiten Punkt, und es kann die bekannte Construction des Schnittes dieser beiden Curven tadellos durchgeführt werden.

Das Berührungs-Problem des Pappus.

Die allgemeine Aufgabe dieses Problems lautet:

„Wenn Punkte, Gerade und Kreise, im ganzen 2 Elemente gegeben sind. Kreise von gegebenem Radius zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die gegebenen Geraden oder Kreise berühren".

Nach dem bisher Gesagten kann man dieses Problem allgemein mittelst Schnitten von Curven 2ter Ordnung durchführen und es lässt sich auch in Anbetracht dessen dieses Problem folgendermassen erweitern:

„Wenn Punkte, Gerade, Kreise oder überhaupt Curven 2ter Ordnung, im ganzen 2 Elemente gegeben sind, Kreise von gegebenem Radius zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen, und die gegebenen Geraden, Kreise oder Curven 2ter Ordnung berühren".

Zur Erläuterung will ich eine Aufgabe kurz besprechen.

Es wären 2 Curven 2ter Ordnung U_1' und U_1'' gegeben. Man soll nun einen Kreis von gegebenem Radius construiren, welcher die beiden Curven berührt.

Man construirt sich den geometrischen Ort aller Kreismittelpunkte, von welchem aus man mit dem gegebenen Radius berührende

Kreise an die Curve U_1' zeichnen kann. Dieser geometrische Ort wird eine zur Curve U_1' ähnliche Curve sein, welche leicht und schnell construirt werden kann. Ich nenne diese Curve U_2'. Dasselbe thue ich bei der Curve U_1'' und erhalte als geometrischen Ort die Curve U_2''. Die Schnittpunkte von U_2' und U_2'', welche sich nach der bekannten Construction finden lassen, sind die geforderten Kreismittelpunkte

Das Berührungs-Problem des Apollonius.

Die allgemeine Aufgabe desselben lautet:

„Wenn Punkte, Gerade und Kreise, im ganzen 3 Elemente gegeben sind, Kreise zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die gegebenen Geraden und Kreise berühren".

Dieses Problem kann nach dem bisher Gesagten ebenfalls allgemein mittelst Schnitten von Curven 2ter Ordnung gelöst werden.

Es ist allgemein bekannt, dass der geometrische Ort aller Kreismittelpunkte, von welchen aus berührende Kreise an 2 Kreise, oder an einen Kreis und einen Punkt gezogen werden können, eine Curve 2ter Ordnung ist, welche sich in den beispielsweise genannten Fällen, als Hyperbel, Parabel repräsentirt.

Indem ich nun zu je 2 der gegebenen Elemente den geometrischen Ort aller Mittelpunkte der sie berührenden Kreise construire, erhalte ich 3 Curven 2ter Ordnung, welche untereinander geschnitten, die geforderten Kreismittelpunkte ergeben.

Der Schnitt je zweier solchen Curven lässt sich nach der bekannten Construction leicht durchführen.

Uebrigens lässt sich auch dieses Problem erweitern. Bevor ich jedoch die erweiterte Aufgabe niederschreibe, muss ich noch einen hiezu wichtigen und notwendigen Satz beweisen, und zwar:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche 2 gegebene Curven 2ter Ordnung berühren, ist wieder eine Curve 2ter Ordnung, welche durch die 4 Schnittpunkte der beiden gegebenen Curven hindurchgeht.

Die beiden gegebenen Curven hiessen U_1' und U_1''. Ich construire mir zu U_1' den geometrischen Ort aller Mittelpunkte der Kreise von einem bestimmten Radius R, welche U_1' berühren. Ich

nenne diese Curve U_2'. Dasselbe mache ich in Bezug auf die Curve U_1'', und erhalte die Curve U_2''. Der Schnitt der Curven U_2' und U_2'' geben mir den Mittelpunkt des Kreises vom Radius R, welcher sowol die Curve U_1' als auch U_1'' berührt.

Die Gleichungen der Curven lauten:

$$U_1' \equiv a_{11}'x_1^2 + 2a_{12}'xy + 2a_{13}'x + a_{22}'y^2 + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0$$

Da die Curve U_2' der Curve U_1' ähnlich ist, so kann sich die Gleichung von U_2' von der von U_1' nur durch das letzte Glied unterscheiden. Es ist somit

$$U_2' \equiv a_{11}'x_2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}'x + a_{22}'y^2 + 2a_{23}'y + m' = 0$$

desgleichen ist:

$$U_1'' \equiv a_{11}''x^2 + 2a_{12}''xy + 2a_{13}''x + a_{22}''y_2 + 2a_{23}''y + a_{33}'' = 0$$

und

$$U_2'' \equiv a_{11}''x^2 + 2a_{12}''xy + 2a_{13}''x + a_{22}''y^2 + 2a_{23}''y + m'' = 0$$

Die Gleichung der Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U_2' und U_2'' hindurchgeht, lautet:

$$\begin{aligned} U_2 \equiv U_2' - \lambda U_2'' \equiv {} & (a_{11}' - \lambda a_{11}'')y^2 + 2(a_{12}' - \lambda a_{12}'')xy \\ & + 2(a_{13}' - \lambda a_{13}'')x + (a_{22}' - \lambda a_{22}'')y^2 \\ & + 2(a_{23}' - \lambda a_{23}'')y + (m' - \lambda m'') = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Curve, welche durch die 4 Schnittpunkte von U_1' und U_1'' hindurchgeht, ist:

$$\begin{aligned} U_3 \equiv U_1' - \lambda U_1'' \equiv {} & (a_{11}' - \lambda a_{11}'')x^2 + 2(a_{12}' - \lambda a_{12}'')xy \\ & + 2(a_{13}' - \lambda a_{13}'')x + (a_{22}' - \lambda a_{22}'')y^2 \\ & + 2(a_{23}' - \lambda a_{23}'')y + (a_{33}' - \lambda a_{33}'') = 0 \end{aligned}$$

Man sieht, dass sich die beiden Gleichungen U_1 und U_2 nur das letzte Glied von einander unterscheiden. Daraus folgt, dass die Curven U_1 und U_2 einander ähnlich sein müssen, oder sie müssen dentisch sein. Der erstere Fall kann nicht eintreten, denn die Curve U_2 muss auch durch die 4 Schnittpunkte von U_1' und U_1'' hindurchgehen, weil dieselben auch Kreismittelpunkte darstellen für jene berührende Kreise, welche einen unendlich kleinen Radius

haben. Die Curven U_1 und U_2 müssen daher ein und dieselbe Curve darstellen, womit der Satz bewiesen ist.

Nach diesem kann ich dem Probleme des Apollonius einen allgemeinen Charakter geben und es folgendermassen aussprechen:

„Wenn Punkte, Gerade, Kreise oder überhaupt Curven 2ter Ordnung, im ganzen 3 Elemente gegeben sind, Kreise zu construiren, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die übrigen Elemente berühren."

Nach dieser kurzen Abhandlung glaube ich einen kleinen Einblick in ein Gebiet gegeben zu haben, in welchem sich die mannigfaltigsten und schönsten Aufgaben der analytischen Geometrie lösen lassen.

Wien, am 20. März 1892.

XIV.

Einige Aufgaben aus der Combinatorik.

Von

Alfred Holtze,

Gymnasiallehrer in Naumburg a. S.

Vorbemerkung. Die nachfolgenden Abhandlungen sind ohne vorheriges Quellenstudium entstanden. Es mag das der Arbeit zum Vorwurf gereichen oder nicht — jedenfalls vermag ich nicht zu entscheiden, wie weit die Resultate oder vielleicht gar die Fragen neu sind. Um so wahrscheinlicher ist es, dass ich in der Art der Behandlung von etwaigen Vorarbeiten hier und da abweiche. Neuheit des Gegenstandes vermute ich für die Frage I, vielleicht auch V, sowie für die Resultate im letzten und hauptsächlichen Teile von III, der von den Combinationen (im engeren Sinne) handelt.

I. Aufgabe aus der Theorie der Permutationen.

Stellung der Frage. Man denke sich aus der vollständigen Tabelle der Permutationen von n Elementen alle diejenigen Complexionen gestrichen, in denen das Element a_1 den Platz p_1 oder das Element a_2 den Platz p_2 u. s. w. oder endlich das Element a_k den Platz p_k inne hat. Dabei werden die Plätze $p_1 p_2 \ldots p_k$ (ebenso die Elemente $a_1 a_2 \ldots a_k$) als verschieden vorausgesetzt. Wieviel Complexionen bleiben übrig?

Durchführung. Nennen wir die gesuchte, übrig bleibende Zahl R_k, so haben wir:

$$R_k = n! - x$$

wobei x die Zahl derjenigen Complexionen bezeichnet, worin entweder a_1 den Platz p_1 oder a_2 den Platz p_2 u. s. w. einnimmt, oder mehrere dieser Fälle gleichzeitig eintreten. Wir berechnen zunächst x.

Wird ein beliebiges Element auf beliebigem Platze festgehalten, so bleiben noch $(n-1)!$ Complexionen möglich, d. h. der $n$te Teil der früheren Gesamtzahl $n! = Z$, also $\frac{1}{n} . Z$.

Werden gleichzeitig zwei Elemente an feste Plätze gebannt, so bleiben

$$(n-2)! = \frac{Z}{n(n-1)}$$

und entsprechend für k festgehaltene Elemente:

$$(n-k)! = \frac{Z}{n(n-1) \ldots (n+1-k)}$$

Complexionen möglich. Um aber x zu berechnen, haben wir die k Elemente $a_1 \ldots a_k$ nicht gleichzeitig, sondern nach einander auf ihren Plätzen festzuhalten. Es scheinen so $\frac{k}{n}$ der früheren Gesamtzahl, also $\frac{k}{n} . Z$ Complexionen möglich zu bleiben. Bei dieser Zahl aber sind alle diejenigen Complexionen doppelt gezählt, also einmal wieder in Abzug zu bringen, bei welchen gleichzeitig zwei Elemente ihre festen Plätze einnehmen. Je eine solche Ambe (z. B. gleichzeitig a_1 auf p_1 und a_2 auf p_2) bedingt die Subtraction von

$$\frac{1}{n(n-1)} . Z$$

es giebt aber solcher Amben k_2; unser vorläufiges Resultat lautet also:

$$\left(\frac{k}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)}\right) . Z$$

Das Resultat ist noch kein endgültiges: denn diejenigen Complexionen in denen sich gleichzeitig z. B. a_1 auf p_1, a_2 auf p_2 und a_3 auf p_3 befinden, sind zuerst 3mal gezählt, dann $3_2 = 3$ mal in Abzug gebracht worden: sie sind also noch einmal hinzuzufügen. Dasselbe gilt für jede andre Terne von Elementen, die gleichzeitig ihre Plätze inne haben; also erhalten wir jetzt:

$$\left(\frac{k}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)} + \frac{k_3}{n(n-1)(n-2)}\right) . Z$$

So schliesst man weiter: Complexionen mit gleichzeitig richtig angeordneten 4 Elementen sind bis jetzt $4_1 - 4_2 + 4_3 = 2$ mal gezählt worden; zieht man sie also einmal wieder ab, so erhält man:

$$\left(\frac{k}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)} + \frac{k_3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{k_4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\right) . Z$$

Um zu zeigen, dass das Bildungsgesetz in dieser Form weiter geht, nehmen wir an, es habe sich wie bereits für Amben, Ternen und Quaternen schon für diejenigen Complexionen als richtig erwiesen, in denen gleichzeitig $(2l-1)$ Elemente ihre festen Plätze inne haben. Wir prüfen jetzt diejenigen Complexionen, in denen eben dasselbe für $2l$ Elemente gilt. Diese sind bisher gezählt worden

$$(2l)_1 - (2l)_2 + (2l)_3 - + \ldots + (2l)_{2l-1} = 2 \text{ mal}$$

[man vergleiche die binomische Entwicklung von $(1-1)^{2l}$]; also sind sie einmal in Abzug zu bringen, und unser Bildungsgesetz hat sich einen Schritt weiter bestätigt. Man prüfe endlich die Complexionen, worin gleichzeitig $(2l+1)$ Elemente ihre festen Plätze einnehmen: diese sind bisher

$$(2l+1)_1 - (2l+1)_2 + (2l+1)_3 - + \ldots - (2l+1)_{2l} = 0 \text{ mal}$$

gezählt worden, müssen also einmal wieder hinzugefügt werden. Hiernach ist unser Bildungsgesetz abermals einen Schritt weiter und somit allgemein als richtig bewiesen, und wir erhalten endgültig:

$$x = n! \left\{\frac{k_1}{n} - \frac{k_2}{n(n-1)} + \frac{k_3}{n(n-1)(n-2)} - + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{k_k}{n(n-1) \ldots (n+1-k)}\right\}$$

Hiermit ist auch

$$R_k = n! - x$$

allgemein gefunden.

Specialisirung. Am interessantesten ist der Fall $k = n$, wobei also jedem Elemente ein bestimmter Platz versagt ist, nämlich jedem wieder ein anderer. Wir erhalten dann:

$$R_n = n! \left\{1 - \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n(n-1)} - \frac{n_3}{n(n-1)(n-2)} + - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n \cdot \frac{n_n}{n!}\right\}$$
$$= n! \left\{1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right\} \qquad (\alpha)$$

Es ist aber

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

also

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots \text{ in inf.}$$

Fügen wir nun in dem Ausdruck (α) für R_n noch die Glieder hinzu:

$$\pm n! \left\{ \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + - \ldots \right\}$$

so ist deren absoluter Betrag gleich

$$n! \left\{ \frac{1}{(n+1)!} - \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) - (\ldots) - (\ldots) \ldots \right\}$$

also

$$< n! \frac{1}{(n+1)!}, \text{ d. h } < \frac{1}{n+1} \text{ oder, weil } n \geq 1, \; < \tfrac{1}{2}$$

Jene Zusatzglieder halten sich also innerhalb der Grenzen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ derart, dass diese Grenzen selbst ausgeschlossen sind. Bezeichnen wir nun durch $P\left(\frac{p}{q}\right)$ die dem Bruche $\frac{p}{q}$ zunächstliegende ganze Zahl, wobei wir über den zweifelhaften Fall, dass $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl plus $\frac{1}{2}$ ist, hier hinweggehen dürfen, so haben wir:

$$R_n = P\left(\frac{n!}{e}\right) \ldots \text{ oder in Worten:}$$

„Es giebt $P\left(\frac{n!}{e}\right)$ solcher Complexionen, in welchen jedem Elemente ein bestimmter Platz versagt ist, nämlich jedem wieder ein anderer."

Beispiele. $n = 1$ giebt $P\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

$n = 2$ „ $P\left(\frac{2}{e}\right) = 1$ (nämlich ba, wenn dem a der 1te, dem b der 2te Platz versagt ist)

$n = 3$ „ $P\left(\frac{6}{e}\right) = 2 = 2.1$ (bca, cab)

$n = 4$ „ $P\left(\frac{24}{e}\right) = 9 = 3.3$ ($badc$, $bcda$, $bdac$; $cadb$, $cdab$, $cdba$; $dabc$, $dcab$, $dcba$)

$n = 5$ giebt $P\left(\frac{120}{e}\right) = 44 = 4.11$

$n = 6$ „ $P\left(\frac{720}{e}\right) = 265 = 5.53$

$n = 7$ „ $P\left(\frac{5040}{e}\right) = 1854 = 6.309$

$n = 8$ „ $P\left(\frac{40320}{e}\right) = 14833 = 7.2119$

$n = 9$ „ $P\left(\frac{362880}{e}\right) = 133496 = 8.16687$

$n = 10$ „ $P\left(\frac{3628800}{e}\right) = 1334961 = 9.148329$

Lehrsatz. „R_n ist stets teilbar durch $(n-1)$".

Es ist nämlich nach Gleichung (α):

$$R_n = n! - n! + [n(n-1) \ldots 4.3] - [n(n-1) \ldots 5.4] + [n(n-1) \ldots 6.5] - + \ldots + (-1)^{n-1}.\{n(n-1)(n-2) - n(n-1) + n - 1\}$$

Die Teilbarkeit durch $(n-1)$ leuchtet ein, wenn man die beiden letzten Posten des Aggregats n und -1 zu $(n-1)$ zusammenfasst. Aber auch a priori liess sich diese Teilbarkeit erkennen. Man führe neue Bezeichnungen für die Elemente ein derart, dass dasjenige Element, dem der 1te Platz versagt ist, a heisst; ebenso sei der 2te Platz dem b, der 3te dem c versagt u. s. f. Die Aufgabe lautete dann: „Wieviel Permutationen giebt es, worin weder a den 1ten noch b den 2ten Platz u. s. w. einnimmt?" Teilt man, wie üblich, die fertige Permutationstabelle in Ordnungen ein, so fällt für unser Problem die Ordnung a ganz aus. In der Ordnung b fallen die Bedingungen für die Elemente a und b fort, denn in ihr nimmt a nicht den 1ten und b nicht den 2ten Platz ein; es bleiben nur die Bedingungen für die $(n-2)$ übrigen Elemente bestehen. Dasselbe gilt auch dann noch, wenn b als Kopf der Ordnung consequent gestrichen wird: dann ist diese ihres Kopfs beraubte Ordnung eine geschlossene Permutationstabelle von $(n-1)$ Elementen, welche $(n-2)$ der bekannten Bedingungen zu erfüllen haben; der Numerus dieser Ordnung ist also ein $[R_k]^{n=n-1}_{k=n-2}$. Genau dieselbe Ueberlegung lässt sich aber auch an den übrigen Ordnungen vornehmen: für die Ordnung c fallen die Bedingungen fort, denen sonst a und c zu genügen haben; nach Streichung des Ordnungskopfes c erhält man wieder

eine Tabelle mit $[R_k]_{k=n-2}^{n=n-1}$ Complexionen. Selbst wenn nun diese R_k unbekannt sind, müssen sie doch, weil bloss von $(n-1)$ und $(n-2)$ abhängig, einander gleich sein; es zerfällt also das in Rede stehende R_n in $(n-1)$ gleichgrosse Gruppen, ist also durch $(n-1)$ teilbar. Man vergleiche das oben durchgeführte Beispiel $n=4$.

Recursionsformel zur Berechnung der R_n.

Weil

$$R_n = P\left(\frac{n!}{e}\right) \quad \text{und} \quad R_{n+1} = P\left(\frac{(n+1)!}{e}\right)$$

so muss R_{n+1} ungefähr $(n+1)$ mal so gross sein als R_n. Ein Blick auf die gegebenen Beispiele bestätigt dies und zeigt, dass der Unterschied zwischen R_{n+1} und $(n+1)R_n$ immer nur ± 1 beträgt. Es lässt sich dies leicht allgemein beweisen.

Der absolute Wert der zum ursprünglichen Ausdruck von R_n zum Zweck der Einführung des e hinzugefügten Glieder ist, wie oben gesagt, $< \frac{1}{n+1}$. Unterscheiden wir zwischen geradem und und ungeradem n, so haben wir:

$$R_{2n} = (2n)!\left\{1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}-+\ldots+\frac{1}{(2n)!}\right\}$$

also $> \frac{(2n)!}{e}$; Differenz zwischen beiden $< \frac{1}{2n+1}$, also:

$$R_{2n} = P\left(\frac{(2n)!}{e}\right) = \frac{(2n)!}{e} + \frac{\zeta}{2n+1}$$

wobei $\zeta > 0$ und < 1 ist.

Dagegen:

$$R_{2n+1} = (2n+1)!\left\{1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}-+\ldots-\frac{1}{(2n+1)!}\right.$$

also $< \frac{(2n+1)!}{e}$, Differenz $< \frac{1}{2n+2}$, also:

$$R_{2n+1} = P\left(\frac{(2n+1)!}{e}\right) = \frac{(2n+1)!}{e} - \frac{\zeta'}{2n+2}$$

Daher ist:

$$(2n+1)R_{2n} = \frac{(2n+1)!}{e} + \zeta = \text{ganze Zahl}$$

und andererseits:

$$R_{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{e} - \frac{\zeta'}{2n+2} = \text{ganze Zahl.}$$

Da ζ und $\frac{\zeta'}{2n+2}$ beide positiv und < 1 sind, so müssen $(2n+1)R_{2n}$ und R_{2n+1} benachbarte ganze Zahlen sein, und zwar ist R_{2n+1} die kleinere, also:

$$R_{2n+1} = (2n+1)\,R_{2n} - 1$$

Entsprechend folgt aus

$$(2n+2)R_{2n+1} = \frac{(2n+2)!}{e} - \zeta' = \text{ganze Zahl}$$

und

$$R_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{e} + \frac{\zeta''}{2n+3} = \text{ganze Zahl,}$$

dass

$$R_{2n+2} = (2n+2)R_{2n+1} + 1 \quad \text{ist.}$$

Die gefundenen Resultate lassen sich zusammenfassen, nämlich:

(β) $\qquad R_n = n\,R_{n-1} + (-1)^n$, also $\equiv (-1)^n \pmod{n}$

und zugleich nach dem Früheren

$$\equiv 0 \pmod{\overline{n-1}}$$

Nach der gefundenen Formel (β) lassen sich die R_n leicht berechnen.

Noch eine zweite Recursionsformel lässt sich herleiten. Es ist nach Gleichung (β):

$$\begin{aligned}
R_1 &= 0\\
R_2 &= 2R_1+1\\
R_3 &= 3R_2-1\\
R_4 &= 4R_3+1\\
R_5 &= 5R_4-1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
R_{2n} &= 2nR_{2n-1}+1\\
R_{2n+1} &= (2n+1)R_{2n}-1
\end{aligned}$$

also, indem wir summiren:

a) $\displaystyle\sum_1^{2n} R_i = \sum_1^{2n-1} (i+1)R_i + 1$ oder

$$R_{2n} = \sum_1^{2n-1} iR_i + 1 \quad \text{z. B.}$$

$$R_6 = 1 + R_1 + 2R_2 + 3R_3 + 4R_4 + 5R_5$$

b) $\displaystyle\sum_1^{2n+1} R_i = \sum_1^{2n} (i+1)R_i$ oder

$$R_{2n+1} = \sum_1^{2n} iR_i \quad \text{z. B.}$$

$$R_7 = R_1 + 2R_2 + 3R_3 + 4R_4 + 5R_5 + 6R_6$$

Will man zusammenfassen, so kann man schreiben:

$$R_n = \sum_{1}^{n-1} iR_i + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

II. Darstellung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen gegebener Zahlen.

Um kürzer sprechen zu können, betrachten wir die gegebenen Zahlen als Nenner von Brüchen: dann haben wir es mit der Aufsuchung des (kleinsten) „Generalnenners" zu tun. Zwei Nenner A und B, die relativ prim sind, haben ihr Product AB zum Generalnenner. Besitzen A und B einen gemeinsamen Divisor, sodass man

$$A = fa, \quad B = fb$$

setzen darf, wobei a und b relative Primzahlen sind, so ist ihr Generalnenner fab oder $\frac{AB}{f}$. — Wir gehen zu drei Zahlen über. In dem Beispiel

$$A = 3.5, \quad B = 3.7, \quad C = 5.7$$

ist der Generalnenner

$$N = 3.5.7, \text{ d. h. } N = \frac{ABC}{3.5.7}$$

man hat also das Product ABC durch das Product der gemeinschaftlichen Divisoren (3) von A und B, (5) von A und C und (7) von B und C zu dividiren. Diese Regel ist aber keineswegs allgemein gültig. Die Zahlen

$$A = 2.3.5, \quad B = 2.3.7, \quad C = 2.5.7$$

ergeben

$$N = 2.3.5.7$$

nach obigem Verfahren behandelt würden sie das falsche Resultat

$$\frac{2^3.3^2.5^2.7^2}{2.3.2.5.2.7} = 3.5.7$$

ergeben; es muss also im Zähler noch der gemeinschaftliche Divisor aller drei Zahlen A, B, C, der im ersten Beispiel $= 1$ war, hinzugefügt werden.

Dass das modificirte Verfahren bei drei Nennern stets zum richtigen Resultat führt, kann leicht bewiesen werden. A, B, C mögen den ihnen allen gemeinsamen grössten Divisor f besitzen, also:

$$A = fA', \quad B = fB', \quad C = fC'$$

Die Grössen A', B', C' alle drei können nun keinen gemeinschaftlichen Factor mehr besitzen, wol aber die aus ihnen gebildeten Combinationen zu je zweien: so mögen A' und B', A' und C', B' und C' bezüglich die grössten gemeinsamen Factoren g_1, g_2, g_3 haben: dann sind die Grössen g, jede zu jeder anderen, relative Primzahlen, weil anderenfalls der Factor f zu klein, also falsch gewählt worden wäre. Daher muss in A' sowol der Factor g_1 als der Factor g_2 enthalten sein u. s w., also:

$$A' = g_1 g_2 . a; \quad B' = g_1 g_3 . b; \quad C' = g_2 g_3 . c$$

Wir behaupten nun: der Generalnenner von A', B', C' ist

$$N' = g_1 g_2 g_3 abc$$

und folglich der von A, B, C:

$$N = fN' = fg_1 g_2 g_3 abc$$

Erstens nämlich ist N' überhaupt ein gemeinschaftliches Vielfaches von A', B', C', und die Quotienten $\frac{N'}{A'}$, $\frac{N'}{B'}$, $\frac{N'}{C'}$ sind:

$$Q_1 = g_3 bc, \quad Q_2 = g_2 ac, \quad Q_3 = g_1 ab$$

Um zweitens zu zeigen, dass N' die kleinste Zahl dieser Art ist, beweisen wir, dass die drei Quotienten Q keinen gemeinschaftlichen Factor mehr besitzen. Nach der Definition der Grössen g müssen $\frac{A'}{g_1}$ und $\frac{B'}{g_1}$ relativ prim sein, ebenso $\frac{A'}{g_2}$ und $\frac{C'}{g_2}$, $\frac{B'}{g_3}$ und $\frac{C'}{g_3}$; also ist

1) $g_2 a$ zu $g_3 b$, 2) $g_1 a$ zu $g_3 c$, 3) $g_1 b$ zu $g_2 c$

relativ prim.

Nun ist:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c}{c} \cdot \frac{g_3 b}{g_2 a}$$

folglich nach 1) c grösster gemeinsamer Teiler von Q_1 und Q_2. Dieser aber ist relativ prim zu

$$Q_3 = g_1 ab$$

weil er es einzeln zu g_1, zu a und zu b ist nach 2), 2), 3). Also ist wirklich N' der Generalnenner zu A', B', C' und folglich N der zu A, B, C.

Andrerseits ergiebt das beschriebene Verfahren den Ausdruck:

$$\frac{f^3(g_1 g_2 g_3)^2 \cdot abc}{fg_1 \cdot fg_2 \cdot fg_3} \times f = fg_1 g_2 g_3 abc, \text{ d. h. } N$$

In gleicher Weise findet man den Generalnenner zu vier gegebenen Nennern A, B, C, D durch die Formel:

$$N = \frac{ABCD \cdot \pi d'''}{\pi d'' \cdot d''''}$$

Dabei bezeichnen die d'', die d''' und d'''' die grössten gemeinschaftlichen Divisoren von je zweien, von je drei und von der Gesamtheit der vier Zahlen. Zunächst nämlich mögen die Zahlen A, B, C, D den grössten gemeinsamen Divisor f besitzen:

$$A = fA', \quad B = fB', \quad C = fC', \quad D = fD'$$

Die grössten gemeinsamen Divisoren von

$$A'B'C', \quad A'B'D', \quad A'C'D', \quad B'C'D'$$

seien bezüglich

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4$$

Die Grössen g sind, paarweis zusammengestellt, relative Primzahlen, weil anderenfalls f zu klein, also falsch gewählt worden wäre. Daher muss z. B. A' sowol den Factor g_1 als g_2 als g_3 enthalten, also:

$$A' = g_1 g_2 g_3 A''; \quad B' = g_1 g_2 g_4 B''; \quad C' = g_1 g_3 g_4 C''; \quad D' = g_2 g_3 g_4 D''$$

Endlich mögen die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahlenpaare

$$A''B'', \quad A''C'', \quad A''D'', \quad B''C'', \quad B''D'', \quad C''D''$$

sein:

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \quad h_4, \quad h_5, \quad h_6$$

Auch die Grössen h sind, paarweis zusammengestellt, relativ prim. Denn hätten z. B. h_1 und h_2 oder aber h_1 und h_6 noch einen gemeinschaftlichen Factor, so wäre im einen Falle g_1, im anderen f zu klein gewählt worden. Daher enthält z B. A'' neben einander die Factoren h_1, h_2, h_3, und wir erhalten die Ansätze:

$$A'' = h_1 h_2 h_3 a; \quad B'' = h_1 h_4 h_5 b; \quad C'' = h_2 h_4 h_6 c; \quad D'' = h_3 h_5 h_6 d$$

Also ist nun:

$$A = fg_1 g_2 g_3 h_1 h_2 h_3 a \quad | \quad C = fg_1 g_3 g_4 h_2 h_4 h_6 c$$
$$B = fg_1 g_2 g_4 h_1 h_4 h_5 b \quad | \quad D = fg_2 g_3 g_4 h_3 h_5 h_6 d$$

Wir behaupten nun: der Generalnenner von A, B, C, D ist

$$N = fg_1g_2g_3g_4h_1h_2h_3h_4h_5h_6abcd = f \,.\, \pi g \,.\, \pi h \,.\, abcd$$

Offenbar ist N überhaupt teilbar durch A, B, C, D. Dass aber N die kleinste Zahl dieser Art ist, beweisen wir, indem wir zeigen, dass die vier Quotienten

$$Q_1 = \frac{N}{A}, \quad Q_2 = \frac{N}{B}, \quad Q_3 = \frac{N}{C}, \quad Q_4 = \frac{N}{D}$$

keinen Factor gemeinschaftlich haben. Es ist:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{h_6cd}{h_6cd} \cdot \frac{g_4h_4h_5b}{g_3h_2h_3a} \quad \text{und} \quad \frac{Q_3}{Q_4} = \frac{h_1ab}{h_1ab} \cdot \frac{g_2h_5h_6d}{g_1h_2h_4c}$$

Nun dürfen nach der Definition von g_1 die drei Quotienten

$$\frac{A'}{g_1} = g_2g_3h_1h_2h_3a; \quad \frac{B'}{g_1} = g_2g_4h_1h_4h_5b; \quad \frac{C'}{g_1} = g_3g_4h_2h_4h_6c$$

keinen Factor mehr gemeinschaftlich haben; Factoren, die zweien dieser Quotienten gemeinsam sind, müssen also zum jedesmaligen dritten relativ prim sein. So erhalten wir: g_2h_1 ist relativ prim zu $g_3g_4h_2h_4h_6c$ u. s. w. Aehnliche Bedingungen ergeben sich aus der Definition von g_2, g_3 und g_4. — Ferner müssen nach der Definition von h_1 die Quotienten

$$\frac{A''}{h_1} = h_2h_3a \quad \text{und} \quad \frac{B''}{h_1} = h_4h_5b$$

relativ prim sein u. s. f. Stellt man so sämtliche Bedingungen auf, so erhält man folgende Tabelle, in der die relativen Primzahlen bloss durch einen zwischengesetzten Strich als solche bezeichnet worden sind:

g_2h_1	$g_3g_4h_2h_4h_6c$	g_1h_2	$g_2g_4h_3h_5h_6d$	h_2h_3a	h_4h_5b
g_3h_2	$g_2g_4h_1h_4h_5b$	g_2h_3	$g_1g_4h_2h_4h_6c$	h_1h_3a	h_4h_6c
g_4h_4	$g_2g_3h_1h_2h_3a$	g_4h_6	$g_1g_2h_1h_2h_3a$	h_1h_2a	h_5h_6d
g_1h_1	$g_3g_4h_3h_5h_6d$	g_1h_4	$g_2g_3h_3h_5h_6d$	h_1h_5b	h_2h_6c
g_3h_3	$g_1g_4h_1h_4h_5b$	g_2h_5	$g_1g_3h_2h_4h_6c$	h_1h_4b	h_3h_6d
g_4h_5	$g_1g_3h_1h_2h_3a$	g_3h_6	$g_1g_2h_1h_4h_5b$	h_2h_4c	h_3h_5d

Aus der Tabelle folgt (was man teilweise schon weiss): 1) alle g sind unter einander relativ prim; 2) ebenso alle h; 3) ebenso a, b, c, d unter einander; ausserdem aber 4) (bei derselben Schreibweise wie soeben):

g_1	h_3, h_5, h_6, d	h_1	g_3, g_4, c, d	a	g_4, h_4, h_5, h_6
g_2	h_2, h_4, h_6, c	h_2	g_2, g_4, b, d	b	g_3, h_2, h_3, h_6
g_3	h_1, h_4, h_5, b	h_3	g_1, g_4, b, c	c	g_2, h_1, h_3, h_5
g_4	h_1, h_2, h_3, a	h_4	g_2, g_3, a, d	d	g_1, h_1, h_2, h_4
		h_5	g_1, g_3, a, c		
		h_6	g_1, g_2, a, b		

Hiernach erkennen wir nun, dass die in den Quotienten $\frac{Q_1}{Q_2}$ und $\frac{Q_3}{Q_4}$ vorkommenden Brüche $\frac{g_4 h_4 h_5 b}{g_3 h_2 h_3 a}$ und $\frac{g_2 h_3 h_5 d}{g_1 h_2 h_4 c}$ unkürzbar sind, und dass also die Producte $h_6 cd$ und $h_1 ab$ die grössten gemeinschaftlichen Teiler von Q_1 und Q_2, von Q_3 und Q_4 darstellen. Diese beiden Producte sind aber nach der obigen Tabelle relativ prim. Daher haben die vier Quotienten keinerlei Factoren gemeinsam, und N ist wirklich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, D.

Nun behaupteten wir, N lasse sich finden durch die Formel:

$$N = \frac{ABCD \,.\, \pi d'''}{\pi d'' \,.\, d''''}$$

Man erhält:

$$ABCD = f^4 \,.\, (\pi g)^3 \,.\, (\pi h)^2 \,.\, abcd$$

$$\pi d'' = fg_1 g_2 h_1 \cdot fg_1 g_3 h_2 \cdot fg_2 g_3 h_3 \cdot fg_1 g_4 h_4 \cdot fg_2 g_4 h_5 \cdot fg_3 g_4 h_6$$
$$= f^6 \,.\, (\pi g)^3 \,.\, \pi h$$

$$\pi d''' = fg_1 \cdot fg_2 \cdot fg_3 \cdot fg_4 = f^4 \,.\, \pi g$$

$$d'''' = f$$

folglich:

$$\frac{ABCD \,.\, \pi d'''}{\pi d'' \,.\, d''''} = \frac{f^8 \,.\, (\pi g)^4 \,.\, (\pi h)^2 \,.\, abcd}{f^7 \,.\, (\pi g)^3 \,.\, \pi h}$$
$$= f \,.\, \pi g \,.\, \pi h \,.\, abcd, \text{ d. h. } = N$$

Allgemein gilt für m Nenner $ABC \,.\, .\, .\, L$ das Gesetz, dass ihr Generalnenner ist

$$N = \frac{AB \,.\, .\, .\, L \,.\, \pi d''' \,.\, \pi d^{V} \,.\, .\, .}{\pi d'' \,.\, \pi d^{IV} \,.\, \pi d^{VI} \,.\, .\, .} \qquad (1)$$

Diese Formel, die natürlich bloss für die Theorie, nicht auch für die Rechenpraxis Bedeutung besitzt, beweisen wir folgendermassen. Die Primzahlen, die in den Grössen $AB \,.\, .\, .\, L$ überhaupt vorkommen, mögen $p_1 p_2 \,.\, .\, .\, p_k$ heissen. Dann können wir ansetzen:

$$\left.\begin{array}{l} A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \\ B = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ L = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k} \end{array}\right\} \text{ wobei die Exponenten } \geqq 0 \text{ sind.}$$

Der Generalnenner wird sein:

$$N = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_k^{\nu_k} \tag{2}$$

wobei ν_1 die grösste der Zahlen $\alpha_1 \beta_1 \ldots \lambda_1$, ν_2 die grösste der Zahlen $\alpha_2 \beta_2 \ldots \lambda_2$ u. s. w. bezeichnet.

Die Gleichung (1) wird also richtig sein, wenn sich beweisen lässt, dass

$$p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_k^{\nu_k} =$$
$$\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \lambda_1 + \Sigma\omega_1''' + \Sigma\omega_1^{V} + \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$p_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot p_2 \qquad \cdot p_3 \cdot \ldots$$
$$\Sigma\omega_1'' + \Sigma\omega_1^{IV} + \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$p_1 \qquad\qquad \cdot p_2 \qquad \cdot p_3 \qquad \ldots$$

ist. Hierbei bezeichnet ω_1'' immer die kleinere von zwei nach Art von Combinationen ohne Wiederholung aus der Reihe $\alpha_1 \beta_1 \ldots \lambda_1$ herausgegriffenen Zahlen, und falls solche zwei Zahlen von gleicher Grösse sind, eine derselben; ebenso ist ω_1''' immer die kleinste von drei solchen Zahlen u. s. w. Die Richtigkeit der letzten Gleichung ist bewiesen, wenn sich die Exponenten der einzelnen Primzahlen beiderseits als gleich gross herausstellen; dieser Nachweis braucht nur für einen beliebigen Primfactor, z. B für p_i geführt zu werden. Die zu beweisende Gleichung lautet also:

$$\nu_i = \alpha_i + \beta_i + \ldots + \lambda_i - \Sigma\omega_i'' + \Sigma\omega_i''' - \Sigma\omega_i^{IV} + - \ldots \tag{3}$$

Wir müssen jetzt wissen, in welcher Reihenfolge die $\alpha_i \beta_i \ldots \lambda_i$ ihrer Grösse nach auf einander folgen. Wir setzen deshalb voraus, dass die m Zahlen $A, B, \ldots L$ von vornhereiu so geordnet worden sind, dass

$$\alpha_i \geqq \beta_i \geqq \gamma_i \geqq \ldots \geqq \lambda_i$$

ist. Dann ist $\nu_i = \alpha_i$, und die zu beweisende Gleichung (3) geht über in

$$0 = \beta_i + \gamma_i + \ldots + \lambda_i - \Sigma\omega_i' + \Sigma\omega_i''' - \Sigma\omega_i^{IV} + - \ldots \tag{4}$$

Um $\Sigma\omega_i''$ zu bilden, haben wir von folgenden Zahlenverbindungen:

$$\alpha_i\beta_i,\ \alpha_i\gamma_i,\ \ldots\ \alpha_i\lambda_i,\ \beta_i\gamma_i,\ \ldots\ \beta_i\lambda_i,\ \gamma_i\delta_i,\ \ldots\ \ldots\ \varkappa_i\lambda_i$$

jedesmal die kleinere Zahl zu wählen und alle diese kleineren Zahlen zu addiren. Sollten zwei oder mehr benachbarte Grössen gleich gross sein, z. B. β_i, γ_i, δ_i, so ist es an sich gleichgültig, ob wir bei Aufstellung der Amben $\beta_i\gamma_i$, $\beta_i\delta_i$, $\gamma_i\delta_i$ der gesuchten Summe die Beiträge β_i oder γ_i oder δ_i zuführen. Wir setzen aber fest, dass auch in diesen Fällen stets die als späteres Element angeordnete Zahl gewählt werden soll, also in dem genannten Beispiel $\gamma_i+\delta_i+\delta_i$. Sonach erhalten wir:

$$\Sigma\omega_i'' = \left\{\begin{array}{r} \beta_i+\gamma_i+\delta_i+\ldots+\lambda_i \\ +\gamma_i+\delta_i+\ldots+\lambda_i \\ +\delta_i+\ldots+\lambda_i \\ +\ldots \\ +\lambda_i \end{array}\right\} = \beta_i+2\gamma_i+3\delta_i+\ldots+(m-1)\lambda_i$$

Allgemein wollen wir jetzt $\Sigma\omega_i^{(h)}$ bilden, wobei

$$h \leqq m$$

sein muss. Dazu haben wir alle Combinationen der Zahlen $\alpha_i\beta_i\ldots\lambda_i$ zur $h$ten Classe ohne Wiederholung zu bilden, aus jeder Combination die kleinste Zahl — oder besser gesagt: die jedesmal an letzter Stelle stehende Zahl — herauszugreifen und die so gewonnenen Zahlen zu addiren. Dabei wird eine beliebige Zahl ζ_i so oft in der Summe vorkommen, als es Combinationen der Elemente $\alpha_i^0\beta_i\ldots\lambda_i$ zur $h$ten Classe giebt, in denen ζ_i das an letzter Stelle stehende Element ist, oder auch: als es Combinationen der Elemente $\alpha_i\beta_i\ldots\zeta_i$ zu je h giebt, worin das letzte Element ζ_i wirklich vorkommt. Ist nun ε_i das dem ζ_i unmittelbar vorausgehende Element, so lässt sich unser Resultat auch so formuliren: ζ_i wird in der Summe $\Sigma\omega_i^{(h)}$ so oft vorkommen, als es Combinationen der Elemente $\alpha_i\beta_i\ldots\varepsilon_i$ zu je $h-1$ giebt. Ist ζ_i das $r$te, also ε_i das $(r-1)$te Element, so kommt also ζ_i $(r-1)_{h-1}$ mal vor. Also erhalten wir:

$$\Sigma\omega_i^{(h)} = 1_{h-1}\beta_i+2_{h-1}\gamma_i+3_{h-1}\delta_i+\ldots+(r-1)_{h-1}\zeta_i+\ldots \\ \ldots+(m-1)_{h-1}\lambda_i$$

Die Gleichung (4) wird nun dann richtig sein, wenn sich nachweisen lässt, dass jede einzelne unter den Zahlen $\beta_i\gamma_i\ldots\lambda_i$ nach der Zusammenfassung verschwindet. Der Coefficient von ζ_i in dieser Gleichung aber wird:

$$1-(r-1)_1+(r-1)_2-(r-1)_3+-\ .\ .\ .+(-1)^{m-1}(r-1)_{m-1}$$

Da aber

$$r \leqq m$$

ist, ist dieser Ausdruck identisch mit

$$1-(r-1)_1+(r-1)_2-+\ .\ .\ .+(-1)^{r-1}(r-1)_{r-1}=(1-1)^{r-1}=0$$

Hiermit ist die Richtigkeit der Gleichung (4) und somit auch der Lehrsatz (1) bewiesen. Schreiben wir statt des Productes aus den Zahlen $A, B, \ldots L$ der Gleichförmigkeit halber $\pi d'$, so haben wir das Resultat:

$$N = \frac{\pi d' \,.\, \pi d''' \,.\, \pi d^{V} \,.\ .\ .}{\pi d'' \,.\, \pi d^{IV} \,.\, \pi d^{VI} \,.\ .\ .}$$

Beispiel zur Erläuterung der Gleichung (3). Es handle sich um fünf Zahlen $A, B, \ldots,$ in denen neben anderen Primfactoren die Primzahl p vorkommt und zwar in den Potenzen:

$$p^5,\ p^1,\ p^5,\ p^7,\ p^\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ entweder } = 1 \text{ oder } = 0)$$

Wir ordnen die Exponenten nach ihrer Grösse:

$$7,\ 5,\ 5,\ 1,\ \varepsilon$$

Dann soll nach Gleichung (3) sein:

$$7 = (7+5+5+1+\varepsilon)-(5+5+1+\varepsilon+5+1+\varepsilon+1+\varepsilon+\varepsilon)$$
$$+(5+1+\varepsilon+1+\varepsilon+\varepsilon+1+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)-(1+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)+\varepsilon$$

Dies bedeutet für $\varepsilon = 0$:

$$7 = 18-18+8-1$$

und für $\varepsilon = 1$:

$$7 = 19-22+14-5+1$$

beides Identitäten.

Zwei Beispiele zu Gleichung (1).

I) $A = 2^3 \,.\, 5^2 \,.\, 7;\quad B = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 7;\quad C = 3^2 \,.\, 11;$
$D = 5 \,.\, 7 \,.\, 11$

Die d'' sind hier:

$$2 \,.\, 7;\ 1;\ 5 \,.\, 7;\ 3^2;\ 7;\ 11$$

die d''' sind

$$1;\ 7;\ 1;\ 1$$

endlich ist

$$d^{IV} = 1$$

Also wird

$$\frac{\pi d' \cdot \pi d'''}{\pi d'' \cdot d^{IV}} = \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \times 7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \times 1}$$

$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11, \text{ d. h. das richtige } N$$

II) $A = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$; $B = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$; $C = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$;
$D = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

Die d'' sind hier:

$$3^2;\ 2 \cdot 3 \cdot 7;\ 2 \cdot 3^3 \cdot 7;\ 3 \cdot 11;\ 3^2 \cdot 5;\ 2 \cdot 3 \cdot 7$$

die d''' sind

$$3;\ 3^2;\ 2 \cdot 3 \cdot 7;\ 3;\ \text{endlich ist}$$
$$d^{IV} = 3$$

Folglich:

$$\frac{\pi d' \cdot \pi d'''}{\pi d'' \cdot d^{IV}} = \frac{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \times 2 \cdot 3^5 \cdot 7}{2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \times 3}$$

$$= 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = N$$

III. Addition gewisser aus den combinatorischen Operationen hervorgehender Zahlen.

Stellung der Aufgabe. Gegeben seien Elemente, die entweder selbst Zahlen sind oder Zahlenwerte besitzen. Diese Elemente sollen permutirt, variirt oder combinirt werden. Die einzelne Complexion erscheint in der Form einer mehrziffrigen Zahl, z B. die Complexion 4073 als viertausend dreiundsiebzig. Um indes die Aufgabe etwas allgemeiner zu fassen, sollen die Stellenwerte der einzelnen Elemente in einer Complexion wie 4073 nicht unbedingt Potenzen der 10 sein, auch nicht notwendig Potenzen einer anderen Zahl, sondern beliebig gegebene Werte $A_1 A_2 \ldots$, sodass der Complexion 4073 der Wert $4A_1 + 7A_3 + 3A_4$ zuzuschreiben wäre. Hiernach sind als Elemente auch mehrziffrige ganze Zahlen, sowie Brüche, negative Zahlen u. s. w. zulässig. Die Complexion $cafgd$ hat jedenfalls den Wert $cA_1 + aA_2 + fA_3 + gA_4 + dA_5$. Solcher Werte gehen durch die vorgeschriebene Umstellung der Elemente eine grosse Zahl hervor: all diese Werte sollen addirt werden.

Lösung für Permutationen. Wir behandeln sogleich den allgemeinen Fall, dass unter den Elementen auch gleiche vorkommen: es seien α Elemente a, β Elemente b u. s. w. gegeben, kurz:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

Man nenne die Zahl aller Elemente n, also:

$$n = \alpha + \beta + \gamma \ldots$$

Steht a an vorderster Stelle, so hat es den Wert aA_1: solcher Complexionen, die mit a beginnen, giebt es $\frac{(n-1)!}{(\alpha-1)!\ \beta!\ \gamma! \ldots}$; analog sind die Ausdrücke für b, c, . . . Somit ist der Beitrag der an vorderster Stelle stehenden Elemente zu der zu bildenden Summe:

$$\left[\frac{a(n-1)!}{(\alpha-1)!\ \beta!\ \gamma! \ldots} + \frac{b(n-1)!}{\alpha!\ (\beta-1)!\ \gamma! \ldots} + \ldots\right] \cdot A_1$$
$$= \frac{(n-1)!\ A_1}{\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots}(a\alpha + b\beta + \ldots) = \frac{(n-1)!\ q}{\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots} \cdot A_1$$

Hierbei ist

$$q = a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$$

die „Quersumme" der gegebenen Complexion.

Steht a an zweiter Stelle, so hat es den Wert aA_2', ebenso an dritter Stelle den Wert aA_3 u. s. w. Es giebt nun wieder $\frac{(n-1)!}{(\alpha-1)!\ \beta!\ \gamma! \ldots}$ Complexionen, worin a an zweiter Stelle steht, und ebenso viele, worin es an dritter Stelle steht u. s. f. Analoges gilt für b, c, . . .; daher erhält man als Ausdruck der gesuchten Summe:

$$S = \frac{(n-1)!\ q}{\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots} \cdot \Sigma A$$

Bemerkenswert ist bei diesem Resultat, dass nicht notwendig $\frac{(n-1)!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots}$ eine ganze Zahl zu sein braucht, obwol es dies z. B. immer ist, wenn n eine Primzahl ist: in solchen Fällen hebt dann der Factor q (denn ΣA kann jeden beliebigen Wert annehmen, z. B. auch den Wert 1) den übrig bleibenden Nenner fort. Beispiele:

Für $n = 6$ ist

$$\frac{5!}{4!\ 2!} = \frac{5}{2}, \quad \text{aber} \quad 4a + 2b \equiv 0 \pmod 2$$

$$\frac{5!}{3!\ 3!} = \frac{10}{3}, \quad \text{aber} \quad 3a + 3b \equiv 0 \pmod 3$$

Für $n = 8$ ist

$$\frac{7!}{4!\ 4!} = \frac{35}{4}, \quad \text{aber} \quad 4a + 4b \equiv 0 \pmod 4$$

Die Ganzzahligkeit des Factors $\frac{(n-1)!\,q}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}$ bei ganzzahligen Elementen a, b, c . . . ist also ein Nebenergebniss.

Beispiel zur obigen Summenformel:

$$\Sigma 1885 = \frac{3!\,22}{2!} \,.\, \Sigma A = 66\,\Sigma A$$

z. B. für $A_1 = 1000$, $A_2 = 100$, $A_3 = 10$, $A_4 = 1$:
$= 66 \,.\, 1111 = 73326$

für $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = A_4 = 0$ gleich $66 \,.\, 1 = 66$

für $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ gleich $66 \;\; 4 = 264$

für $\Sigma A = 0$ gleich null.

Lösung für Variationen ohne Wiederholung. Die n Elemente $abc\,\ldots n$ sollen z. B. zur sechsten Classe variiren. a kommt an erster und ebenso an zweiter, dritter Stelle u. s. w.

$$(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-5)\,\text{mal}$$

vor. Mit Berücksichtigung des Stellenwertes erhält man als Beitrag des a zur gesuchten Summe:

$$(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-5)\,.\,a\,.\,\Sigma A$$

Ganz dasselbe gilt für b, c . . .; also:

$$S = (n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-5)\,.\,q\,.\,\Sigma A$$

wobei

$$q = a+b+c+\ldots+n$$

allgemein für Variationen $k$ter Classe:

$$S = (n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n+1-k)\,.\,q\,.\,\Sigma A$$

Der Specialfall $k = n$ führt auf Permutationen mit lauter verschiedenen Elementen zurück: man erhält in Uebereinstimmung mit dem Obigen

$$S = (n-1)!\,q\,.\,\Sigma A$$

Variationen mit Wiederholung. Handelt es sich um die $k$te Classe, so tritt jedes Element n^{k-1}mal an jedem Platze auf, daher erhält man:

$$S = n^{k-1}\,.\,q\,.\,\Sigma A$$

Combinationen ohne Wiederholung. Wir führen unsere Betrachtungen zunächst an einem Beispiel durch: die 8 Elemente

$abcdefgh$ mögen zur 5ten Classe ohne Wiederholung combinirt werden. An vorderster Stelle können die Elemente a, b, c, d stehen und zwar bezüglich 7_4, 6_4, 5_4, 4_4mal. Mit Rücksicht auf die Werte der $abc\ldots$ und ihren Stellenwert erhalten wir als erste Teilsumme:

$$\mathrm{I} = (a \cdot 7_4 + b \cdot 6_4 + c \cdot 5_4 + d \cdot 4_4)A_1$$

An zweiter Stelle sind die Elemente b, c, d, e möglich und zwar $1 \cdot 6_3$, $2 \cdot 5_3$, $3 \cdot 4_3$, $4 \cdot 3_3$mal. Aehnliches gilt für die späteren Stellen. Man erhält also die weiteren Teilsummen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= (b \cdot 1 \cdot 6_3 + c \cdot 2 \cdot 5_3 + d \cdot 3 \cdot 4_3 + e \cdot 4 \cdot 3_3)A_2\\
\mathrm{III} &= (c \cdot 2_2 \cdot 5_2 + d \cdot 3_2 \cdot 4_2 + e \cdot 4_2 \cdot 3_2 + f \cdot 5_2 \cdot 2_2)A_3\\
\mathrm{IV} &= (d \cdot 3_3 \cdot 4_1 + e \cdot 4_3 \cdot 3_1 + f \cdot 5_3 \cdot 2_1 + g \cdot 6_3 \cdot 1_1)A_4\\
\mathrm{V} &= (e \cdot 4_4 + f \cdot 5_4 + g \cdot 6_4 + h \cdot 7_4)A_5
\end{aligned}$$

Auf Summen von ähnlicher Form stösst man nun, wenn man eine vollständig durchgeführt gedachte Tabelle von Combinationen in bestimmter Weise in Teile zerlegt. Es seien etwa die 12 Elemente $ab\ldots m$ zur 7ten Classe combinirt und zwar ohne Wiederholung. An erster Stelle sind die Elemente $abcdef$ möglich, und das Ganze (12_7) zerlegt sich folgendermassen in Teile („Ordnungen"):

$$12_7 = 11_6 + 10_6 + 9_6 + 8_6 + 7_6 + 6_6$$

Ebenso sind an zweiter Stelle die Elemente $b\ldots g$, an dritter die Elemente $c\ldots h$ möglich, und man erhält, wenn man die Häufigkeit dieser Fälle erwägt, die ferneren Formeln:

$$\begin{aligned}
12_7 &= 1_1 \cdot 10_5 + 2_1 \cdot 9_5 + 3_1 \cdot 8_5 + 4_1 \cdot 7_5 + 5_1 \cdot 6_5 + 6_1 \cdot 5_5\\
&= 2_2 \cdot 9_4 + 3_2 \cdot 8_4 + 4_2 \cdot 7_4 + 5_2 \cdot 6_4 + 6_2 \cdot 5_4 + 7_2 \cdot 4_4\\
&= 3_3 \cdot 8_3 + 4_3 \cdot 7_3 + 5_3 \cdot 6_3 + 6_3 \cdot 5_3 + 7_3 \cdot 4_3 + 8_3 \cdot 3_3\\
&= 4_4 \cdot 7_2 + \ldots \text{wie oben}\\
&\qquad\qquad \text{u. s. w. wie oben.}
\end{aligned}$$

Genau dieselben Resultate erhält man, wenn man die 6 Elemente $abcdef$ zur 7ten Classe mit Wiederholung combinirt und dieselben Ueberlegungen anstellt wie soeben. Die gefundenen Formeln lassen sich allgemein folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
(\alpha)\quad & k_k(l+m)_l + (k+1)_k(l+m-1)_l + (k+2)_k(l+m-2)_l + \ldots\\
& \qquad \ldots + (k+m)_k l_l = (k+l+m+1)_{k+l+1}
\end{aligned}$$

Diese Formel lässt sich nun zur Ermittlung der oben gefundenen Teilsummen dann anwenden, wenn $abc\ldots h$ die Werte 123 . . 8 besitzen oder ihnen wenigstens proportional sind:

$$a = u, \quad b = 2u, \quad c = 3u, \ldots h = 8u$$

Die erste Teilsumme wird jetzt:

$$(1_1 \cdot 7_4 + 2_1 \cdot 6_4 + 3_1 \cdot 5_4 + 4_1 \cdot 4_4) A_1 u = 9_6 A_1 u$$

Die zweite Teilsumme lässt sich schreiben:

$$2 \cdot (2_2 \cdot 6_3 + 3_2 \cdot 5_3 + 4_2 \cdot 4_3 + 5_2 \cdot 3_3) A_2 u = 2 \cdot 9_6 A_2 u$$

Ebenso die dritte:

$$3 \cdot (3_3 \cdot 5_2 + 4_3 \cdot 4_2 + 5_3 \cdot 3_2 + 6_3 \cdot 2_2) A_3 u = 3 \cdot 9_6 A_3 u$$

u. s. w. Man erhält:

$$S = 9_6 u (A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 5A_5) = 9_6 u \, \Sigma i A_i \qquad (\beta)$$

Wählt man z. B. $u = 1$ und $A_1 = 10^4$, $A_2 = 10^3$ u s. w., so hat man das bemerkenswerte Resultat:

$$12345 + 12346 + \ldots + 45678 = 9_6 \cdot 12345 = 84 \cdot 12345$$

Die Summe aller Combinationszahlen ist hier also ein Vielfaches der kleinsten unter ihnen.

Man erkennt jetzt leicht, welche erste Verallgemeinerung bei unserer Aufgabe möglich ist. Man wähle die Elemente $a b \ldots h$ als Glieder einer beliebigen arithmetischen Reihe erster Ordnung:

$$a = u + v, \quad b = 2u + v, \quad c = 3u + v, \ldots h = 8u + v$$

Jede einzelne Complexion, z. B. $b d e f h$, mit den jetzigen Werten der Elemente $a \ldots h$ übertrifft die gleichnamige Complexion mit den früheren Werten um $v v v v v$, d. h. um

$$v(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = v \Sigma A_i$$

Da wir im ganzen 8_5 Complexionen zu addiren haben, so erhalten wir:

$$S' = 9_6 u \, \Sigma i A_i + 8_5 v \, \Sigma A_i \qquad (\beta')$$

Beispiele:

$23456 + 23457 + \ldots + 56789 = 9_6 \cdot 12345 + 8_5 \cdot 11111$

$87654 + 87653 + \ldots + 54321$ giebt für $u = -1$, $v = 9$:

$= 8_5 \cdot 9 \cdot 11111 - 9_6 \cdot 12345 = 6 \cdot 9_6 \cdot 11111 - 9_6 \cdot 12345$

$= 9_6 \cdot (66666 - 12345) = 9_6 \cdot 54321$

ähnlich dem ursprünglichen Beispiel.

$98765 + 98764 + \ldots + 65432 = 9_6 \cdot 54321 + 8_5 \cdot 11111$

$76543 + 76542 + \ldots + 43210 = 9_6 \cdot 54321 - 8_5 \cdot 11111$

Unsere Betrachtungen lassen sich nun dahin verallgemeinern, dass die Elemente $ab \ldots h$ als Glieder einer beliebigen arithmetischen Reihe höherer Ordnung gewählt werden können, und es wird sich herausstellen, dass die Aufgabe hiermit in voller Allgemeinheit ihre Lösung findet.

Als Beispiel wählen wir eine Reihe vierter Ordnung; es sei nämlich:

$$a, b, c \ldots h = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2 \ldots 7$$

Um die Gleichung (α) anwenden zu können, müssen wir die Elemente $a \ldots h$ auf eine andere Form bringen. Man bestimme für ein beliebiges k die Coefficienten $x\,y\,z\,u\,v$ derart, dass identisch ist:

$$\alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon = x(n+k)_4 + y(n+k-1)_3 + z(n+k-2)_2 + u(n+k-3)_1 + v$$

Diese Bestimmung ist stets möglich durch ein System linearer Gleichungen. Im Falle einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung z. B. erhält man die Identität:

$$\alpha n^2 + \beta n + \gamma = 2\alpha(n+k)_2 + (\beta - \alpha(2k-1))(n+k-1)_1 + (\alpha(k-1)^2 - \beta(k-1) + \gamma)$$

Hiernach wähle man (im obigen Beispiel) $k = 4$ und allgemein im Falle einer arithmetischen Reihe $r$ter Ordnung $k = r$. Da für das Element a $n = 0$ ist, für b $n = 1$ u. s. f., so erhält man die folgenden Ausdrücke für die Elemente:

$a = x \cdot 4_4 + y \cdot 3_3 + z \cdot 2_2 + u \cdot 1_1 + v$	7_4							
$b = x \cdot 5_4 + y \cdot 4_3 + z \cdot 3_2 + u \cdot 2_1 + v$	6_4	$1 \cdot 6_3$						
$c = x \cdot 6_4 + y \cdot 5_3 + z \cdot 4_2 + u \cdot 3_1 + v$	5_4	$2 \cdot 5_3$	$2_2 \cdot 5_2$					
$d = x \cdot 7_4 + y \cdot 6_3 + z \cdot 5_2 + u \cdot 4_1 + v$	4_4	$3 \cdot 4_3$	$3_2 \cdot 4_2$	$3_3 \cdot 4_1$				
$e = x \cdot 8_4 + y \cdot 7_3 + z \cdot 6_2 + u \cdot 5_1 + v$		$4 \cdot 3_3$	$4_2 \cdot 3_2$	$4_3 \cdot 3_1$	4_4			
$f = x \cdot 9_4 + y \cdot 8_3 + z \cdot 7_2 + u \cdot 6_1 + v$			$5_2 \cdot 2_2$	$5_3 \cdot 2_1$	5_4			
$g = x \cdot 10_4 + y \cdot 9_3 + z \cdot 8_2 + u \cdot 7_1 + v$				$6_3 \cdot 1_1$	6_4			
$h = x \cdot 11_4 + y \cdot 10_3 + z \cdot 9_2 + u \cdot 8_1 + v$					7_4			

Die beigefügten 5 Factoren-Columnen sind den oben aufgestellten Ausdrücken für die einzelnen Teilsummen I II III IV V entsprechend gewählt. Mit Benutzung der vordersten Factoren-Columne und der Gleichung (α) erhalten wir so als Beitrag der vordersten Stelle:

$$\mathrm{I} = A_1(x \cdot 12_9 + y \cdot 11_8 + z \cdot 10_7 + u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

Bei Ermittlung des Beitrags der zweiten Stelle schreibe man statt der Producte $x \cdot 5_4 \cdot 1 \cdot 6_3$, $x \cdot 6_4 \cdot 2 \cdot 5_3$, $x \cdot 7_4 \cdot 3 \cdot 4_3$, $x \cdot 8_4 \cdot 4 \cdot 3_3$ die damit identischen $5x \cdot 5_5 \cdot 6_3$, $5x \cdot 6_5 \cdot 5_5$, $5x \cdot 7_5 \cdot 4_3$, $5x \cdot 8_5 \cdot 3_3$ und verfahre ähnlich mit den Factoren von y, z, u, v. Es ergiebt sich:

$$\text{II} = A_2(5x \cdot 12_9 + 4y \cdot 11_8 + 3z \cdot 10_7 + 2u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

Die dritte Teilsumme erfordert folgende Umformung:

$$x \cdot 6_4 \cdot 2_2 \cdot 5_2 = \frac{6!}{4!\,2!} x \cdot 6_6 \cdot 5_2 = 6_2 x \cdot 6_6 \cdot 5_2$$

$$x \cdot 7_4 \cdot 3_2 \cdot 4_2 = \frac{6!}{4!\,2!} x \cdot 7_6 \cdot 4_2 \quad \text{u. s. w.}$$

sodass das Product, das den Factor x enthält, die Form annimmt:

$$6_2 x \cdot (6_6 \cdot 5_2 + 7_6 \cdot 4_2 + 8_6 \cdot 3_2 + 9_6 \cdot 2_2) = 6_2 x \cdot 12_9$$

So erhalten wir:

$$\text{III} = A_3(6_2 x \cdot 12_9 + 5_2 y \cdot 11_8 + 4_2 z \cdot 10_7 + 3_2 u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

Ebenso:

$$\text{IV} = A_4(7_3 x \cdot 12_9 + 6_3 y \cdot 11_8 + 5_3 z \cdot 10_7 + 4_3 u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

und:

$$\text{V} = A_5(8_4 x \cdot 12_9 + 7_4 y \cdot 11_8 + 6_4 z \cdot 10_7 + 5_4 u \cdot 9_6 + v \cdot 8_5)$$

Fassen wird endlich die Teilsummen zusammen, so ergiebt sich:

$$S = 12_9 x \Sigma(i+3)_{i-1} A_i + 11_8 y \Sigma(i+2)_{i-1} A_i + 10_7 z \Sigma(i+1)_{i-1} A_i + 9_6 u \Sigma i_{i-1} A_i + 8_5 v \Sigma A_i$$

oder:

$$S = 12_3 x \Sigma(i+3)_4 A_i + 11_3 y \Sigma(i+2)_3 A_i + 10_3 z \Sigma(i+1)_2 A_i + 9_3 u \Sigma i_1 A_i + 8_3 v \Sigma A_i \qquad (\gamma)$$

Für $x = y = z = 0$ erhält man wieder die Formel (β').

Wir haben bisher immer das Beispiel von 8 Elementen zu Grunde gelegt, die zur 5. Classe zu combiniren waren. Haben wir allgemein n Elemente zur $k$ten Classe zu combiniren, so treten an Stelle der Factoren

$$8_5 \; 9_6 \; 10_7 \; 11_8 \; 12_9 \quad \text{die folgenden auf:}$$

$$n_k \quad (n+1)_{k+1} \; . \; . \; . \; (n+4)_{k+4}$$

oder:

$$n_{n-k} \quad (n+1)_{n-k} \; . \; . \; . \; (n+4)_{n-k}$$

So wenigstens, wenn wir es in der Endformel, die (γ) entspricht, wieder mit 5 Posten zu tun haben: diese 5 Posten rührten her von der arithmetischen Reihe 4ter Ordnung. Für eine Reihe $r$ter Ordnung bekommen wir $(r+1)$ Posten mit den Factoren:

$$n_{n-k}\ (n+1)_{n-k}\ (n+2)_{n-k}\ .\ .\ .\ (n+r)_{n-k}$$

Die n gegebenen Elemente lassen sich wieder auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
a &= xr_r + y(r-1)_{r-1} + z(r-2)_{r-2} + \ .\ .\ .\ + u\ .\ 1_1 + v\\
b &= x(r+1)_r + yr_{r-1} + z(r-1)_{r-2} + \ .\ .\ .\ + u\ .\ 2_1 + v\\
c &= x(r+2)_r + y(r+1)_{r-1} + zr_{r-2} + \ .\ .\ .\ + u\ .\ 3_1 + v\\
&\ .\\
&\ .
\end{aligned}$$

Endlich steigen die zu den A_i hinzutretenden Factoren bis zu $(i+r-1)_r$ an. Die allgemeine Summenformel wird also:

$$\begin{aligned}
S = {} & (n+r)_{n-k}x\ .\ \sum_{i=1}^{k}(i+r-1)_r A_i + (n+r-1)_{n-k}y\ .\ \Sigma(i+r-2)_{r-1}A_i\\
& + (n+r-2)_{n-k}z\ .\ \Sigma(i+r-3)_{r-2}A_i + \ .\ .\ .\ + (n+1)_{n-k}u\ .\ \Sigma i_1 A_i\\
& + n_{n-k}v\ .\ \Sigma A_i \qquad (\delta)
\end{aligned}$$

Hiermit ist die Aufgabe allgemein gelöst, denn die Reihe der n scheinbar vielleicht gesetzlos auf einander folgenden Elemente lässt sich stets mindestens als arithmetische Reihe $(n-1)$ter Ordnung darstellen. Zugleich ergiebt sich, dass stets

$$r \leqq n-1 \quad \text{ist}$$

Ein Beispiel mag die Richtigkeit der Formel (δ) erhärten. Es handle sich um Combinationen der 5 Elemente 12356 zur dritten Classe. Die unmittelbare Addition ergiebt für $A_1 = 100$, $A_2 = 10$, $A_3 = 1$:

$$123 + 125 + 126 + 135 + 136 + 156 + 235 + 236 + 256 + 356 = 1884$$

Die Elemente 12356 müssen, wie die Aufstellung der Differenzenreihen 1ter, 2ter und 3ter Ordnung zweifellos macht, als Glieder einer Reihe 4ter Ordnung aufgefasst werden, sodass hier der Fall

$$r = n - 1$$

vorliegt. Man setze also in Uebereinstimmung mit unseren allgemeinen Festsetzungen:

$$1 = x \cdot 4_4 + y \cdot 3_3 + z \cdot 2_2 + u \cdot 1_1 + v = x + y + z + u + v$$
$$2 = x \cdot 5_4 + y \cdot 4_3 + z \cdot 3_2 + u \cdot 2_1 + v = 5x + 4y + 3z + 2u + v$$
$$3 = x \cdot 6_4 + y \cdot 5_3 + z \cdot 4_2 + u \cdot 3_1 + v = 15x + 10y + 6z + 3u + v$$
$$5 = x \cdot 7_4 + y \cdot 6_3 + z \cdot 5_2 + u \cdot 4_1 + v = 35x + 20y + 10z + 4u + v$$
$$6 = x \cdot 8_4 + y \cdot 7_3 + z \cdot 6_2 + u \cdot 5_1 + v = 70x + 35y + 15z + 5u + v$$

Man erhält:

$$x = -3, \quad y = 13, \quad z = -21, \quad u = 16, \quad v = -4$$

Ueberdies ist

$$n = 5, \quad k = 3, \quad r = 4$$

somit ergiebt (δ):

$$S = 9_2 \cdot (-3)\Sigma(i+3)_4 A_i + 8_2 \cdot 13\Sigma(i+2)_3 A_i + 7_2 \cdot (-21)\Sigma(i+1)_2 A_i$$
$$+ 6_2 \cdot 16\Sigma i A_i + 5_2 \cdot (-4)\Sigma A_i$$
$$= -108\overset{1}{\Sigma} + 364\overset{2}{\Sigma} - 441\overset{3}{\Sigma} + 240\overset{4}{\Sigma} - 40\overset{5}{\Sigma}$$

Es ist aber:

$$\overset{1}{\Sigma} = 100 + 50 + 15 = 165; \quad \overset{2}{\Sigma} = 100 + 40 + 10 = 150$$
$$\overset{3}{\Sigma} = 100 + 30 + 6 = 136; \quad \overset{4}{\Sigma} = 100 + 20 + 3 = 123; \quad \overset{5}{\Sigma} = 111$$

Also:

$S = -17820 + 54600 - 59976 + 29520 - 4440 = 1884$, wie oben.

Combinationen mit Wiederholung. Einfache Aufgaben aus diesem Gebiet lassen sich auf Combinationen ohne Wiederholung zurückführen. Es handle sich z. B. um die 4 Elemente 0123, die zur 5ten Classe mit Wiederholung zu combiniren sind. Nun vergleiche man die Combinationen

00000, 00001, 00002, 00003, 00011, . . . 11111, 11112, ... 33333

deren Anzahl 8_5 ist, mit den ebenfalls 8_5 Combinationen der 8 Elemente 12 . . . 8 zur 5ten Classe ohne Wiederholung:

12345, 12346, 12347, 12348, 12356, . . . 23456, 23457, ... 45678

Jede Combination der ersten Art ist um 12345 kleiner als die homologe der zweiten Art. Die Combinationen zweiter Art sind oben addirt worden und ergaben die Summe $9_6 \cdot 12345$, folglich finden wir für diejenigen der ersten Art:

$$S = 9_6 \,.\, 12345 - 8_5 \,.\, 12345 = (9_6 - 8_5) \,.\, 12345 = 8_6 \,.\, 12345$$

oder allgemeiner $= 8_6 \,.\, \Sigma i A_i$

Durch Fortführung der hier eingeleiteten Gedankenreihe könnten wir in Anlehnung an die bereits gefundene Lösung für Combinationen ohne Wiederholung die jetzige Frage durchführen für Elemente $abc \,.\, .\, .$, die eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden und zwar in der von der früheren etwas abweichenden Form:

$$a = v, \quad b = u + v, \quad c = 2u + v, \quad d = 3u + v \quad \text{u. s. f.}$$

Wir ziehen es vor, das Problem von vornherein allgemeiner zu behandeln und wählen wieder das Beispiel einer Combination von 8 Elementen $ab \,.\, .\, .\, h$, die eine arithmetische Reihe 4ter Ordnung bilden, zur 5ten Classe. Sei ursprünglich wieder:

$$a, b, c, \,.\, .\, .\, h = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \,.\, .\, .\, 7$$

so hat man jetzt eine etwas andere Umformung dieses Ausdrucks vorzunehmen als früher, nämlich:

$$\alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon = x(n+k)_4 + y(n+k)_3 + z(n+k)_2 + u(n+k)_1 + v$$

und ferner hat man, um Gleichung (α) anwenden zu können, k hier $= 0$ zu wählen. Da nun die von den einzelnen Stellen der Combinationen herrührenden Teilsummen jetzt folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} \text{I} &= A_1(a \,.\, 11_4 + b \,.\, 10_4 + \,.\, .\, . + h \,.\, 4_4) \\ \text{II} &= A_2(a \,.\, 1 \,.\, 10_3 + b \,.\, 2 \,.\, 9_3 + \,.\, .\, . + h \,.\, 8 \,.\, 3_3) \\ \text{III} &= A_3(a \,.\, 2_2 \,.\, 9_2 + b \,.\, 3_2 \,.\, 8_2 + \,.\, .\, . + h \,.\, 9_2 \,.\, 2_2) \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

so erhalten wir die folgenden Ansätze für die Elemente und das beigefügte Factorenschema:

$a =$	v	11_4	$1_1 \,.\, 10_3$	$2_2 \,.\, 9_2$	$3_3 \,.\, 8_1$	4_4
$b =$	$1_1 u + v$	10_4	$2_1 \,.\, 9_3$	$3_2 \,.\, 8_2$	$4_3 \,.\, 7_1$	5_4
$c =$	$2_2 z + 2_1 u + v$	9_4	$3_1 \,.\, 8_3$	$4_2 \,.\, 7_2$	$5_3 \,.\, 6_1$	6_4
$d =$	$3_3 y + 3_2 z + 3_1 u + v$	8_4	$4_1 \quad 7_3$	$5_2 \,.\, 6_2$	$6_3 \,.\, 5_1$	7_4
$e =$	$4_4 x + 4_3 y + 4_2 z + 4_1 u + v$	7_4	$5_1 \,.\, 6_3$	$6_2 \,.\, 5_2$	$7_3 \,.\, 4_1$	8_4
$f =$	$5_4 x + 5_3 y + 5_2 z + 5_1 u + v$	6_4	$6_1 \,.\, 5_3$	$7_2 \,.\, 4_2$	$8_3 \,.\, 3_1$	9_4
$g =$	$6_4 x + 6_3 y + 6_2 z + 6_1 u + v$	5_4	$7_1 \,.\, 4_3$	$8_2 \,.\, 3_2$	$9_3 \,.\, 2_1$	10_4
$h =$	$7_4 x + 7_3 y + 7_2 z + 7_1 u + v$	4_4	$8_1 \,.\, 3_3$	$9_2 \,.\, 2_2$	$10_3 \,.\, 1_1$	11_4

Durch das bereits früher angewandte Verfahren ergeben sich jetzt die von den einzelnen Stellen herrührenden Teilsummen:

$$\begin{aligned}
\text{I} &= A_1(x \,.\, 12_9 + y \,.\, 12_8 + z \,.\, 12_7 + u \,.\, 12_6 + v \,.\, 12_5)\\
\text{II} &= A_2(5x \,.\, 12_9 + 4y \,.\, 12_8 + 3z \,.\, 12_7 + 2u \,.\, 12_6 + v \,.\, 12_5)\\
\text{III} &= A_3(6_2x \,.\, 12_9 + 5_2y \,.\, 12_8 + 4_2z \,.\, 12_7 + 3_2u \,.\, 12_6 + v \,.\, 12_5)\\
\text{IV} &= A_4(7_3x \,.\, 12_9 + 6_3y \,.\, 12_8 + 5_3z \,.\, 12_7 + 4_3u \,.\, 12_6 + v \,.\, 12_5)\\
\text{V} &= A_5(8_4x \,.\, 12_9 + 7_4y \,.\, 12_8 + 6_4z \,.\, 12_7 + 5_4u \,.\, 12_6 + v \,.\, 12_5)
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
S = {} & 12_9x \,.\, \Sigma(i+3)_{i-1}A_i + 12_8y \,.\, \Sigma(i+2)_{i-1}A_i + 12_7z \,.\, \Sigma(i+1)_{i-1}A_i\\
& + 12_6u \,.\, \Sigma i_{i-1}A_i + 12_5v\Sigma A_i = 12_9x \,.\, \Sigma(i+3)_4A_i + 12_8y \,.\, \Sigma(i+2)_3A_i\\
& + 12_7z \,.\, \Sigma(i+1)_2A_i + 12_6u \,.\, \Sigma i_1A_i + 12_5v \,.\, \Sigma A_i
\end{aligned}$$

Endlich mag die gewonnene Formel noch verallgemeinert werden. Ein Blick auf die oben gegebenen Ansätze für die Elemente und die beigefügten Factoren lehrt, dass im Falle von n Elementen $a_1\, a_2 \,.\,.\,.\, a_n$, die zur $k$ten Classe zu combiniren sind, an die Stelle von 12_5, $12_6 \,.\,.\,.\, 12_9$ die Factoren treten:

$$(n+k-1)_k,\quad (n+k-1)_{k+1},\ .\ .\ .\ (n+k-1)_{k+4}$$

So wenigstens, wenn wir es wieder mit einer arithmetischen Reihe 4ter Ordnung zu tun haben. Auch in dem allgemeinen Falle einer arithmetischen $r$ter Ordnung lassen sich die Elemente auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= v\\
a_2 &= u \,.\, 1_1 + v\\
a_3 &= t \,.\, 2_2 + u \,.\, 2_1 + v\\
a_4 &= s \,.\, 3_3 + t \,.\, 3_2 + u \,.\, 3_1 + v\\
&\ .\\
a_{r+1} &= x \,.\, r_r + y \,.\, r_{r-1} + \ .\ .\ . + s \,.\, r_3 + t \,.\, r_2 + u \,.\, r_1 + v\\
&\ .\\
a_n &= x \,.\, (n-1)_r + y \,.\, (n-1)_{r-1} + \ .\ .\ . + s \,.\, (n-1)_3 + t \,.\, (n-1)_2\\
&\qquad + u \,.\, (n-1)_1 + v
\end{aligned}$$

Hierbei sei wieder auf die Ungleichung

$$r \leqq n-1$$

hingewiesen, die hier bewirkt, dass selbst in dem äussersten Falle

$$r = n-1$$

die in dem Bau der Elemente $a_1 \ldots a_n$ zu Tage tretende terrassenförmige Anordnung ihren Abschluss findet, wie es sein muss.

In dem Fall der arithmetischen Reihe $r$ter Ordnung erhalten wir die Factoren:

$$(n+k-1)_k, \quad (n+k-1)_{k+1}, \ldots (n+k-1)_{k+r}$$

Ueber die Aenderungen, die die Summen $\Sigma(i+3)_4 A_i$ u. s. w. erleiden, gilt wörtlich das früher Gesagte. Also erhalten wir:

$$S = (n+k-1)_{k+r} x \cdot \sum_{i=1}^{k} (i+r-1)_r A_i$$
$$+ (n+k-1)_{k+r-1} y \cdot \Sigma(i+r-2)_{r-1} A_i + \ldots$$
$$+ (n+k-1)_{k+1} u \cdot \Sigma i_1 A_i + (n+k-1)_k v \cdot \Sigma A_i \qquad (\varepsilon)$$

Als Beispiel mögen dienen die 4 Elemente 2, 4, 5, 9, die zur 3. Classe zu combiniren seien. Direct erhält man (für $A_1 = 100$, $A_2 = 10$, $A_3 = 1$):

$$222+224+225+229+244+\ldots+599+999 = 7914$$

Ferner hat man zu setzen:

$$2 = v; \quad 4 = u+v; \quad 5 = y+2u+v; \quad 9 = x+3y+3u+v$$

Man erhält:

$$x = 4, \quad y = -1, \quad u = 2, \quad v = 2$$

Ueberdies ist $n = 4$, $k = 3$, $r = 3$, also:

$$S = 6_6 x \overset{1}{\Sigma} + 6_5 y \overset{2}{\Sigma} + 6_4 u \overset{2}{\Sigma} + 6_3 v \overset{4}{\Sigma} = 4\overset{1}{\Sigma} - 6\overset{2}{\Sigma} + 30\overset{3}{\Sigma} + 40\overset{4}{\Sigma}$$

Es ist aber:

$$\overset{1}{\Sigma} = 100+40+10 = 150; \quad \overset{2}{\Sigma} = 100+30+6 = 136$$
$$\overset{3}{\Sigma} = 100+20+3 = 123; \quad \overset{4}{\Sigma} = 111$$

Also:

$$S = 4 \cdot 150 - 6 \cdot 136 + 30 \cdot 123 + 40 \cdot 111 = 600 - 816 + 3690$$
$$+ 4440 = 7914, \text{ wie oben.}$$

IV. Bestimmung der Anzahl der Variationen und der Anzahl der Zahlen von gegebener Quersumme.

Unter Variationen sind im Folgenden stets solche mit Zulassung der Wiederholung der einzelnen Elemente zu verstehen. Die

Elemente sind ganze positive Zahlen entweder mit Ausschluss oder mit Zulassung der Null. Wir werden nämlich von Variationen zu sprechen haben, A) mit völligem Ausschluss der Null: Bezeichnung V; B) mit Zulassung der Null an jeder Stelle: V'; C) mit Zulassung der Null ausser an erster Stelle V''. — Wichtiger und principieller als diese Unterscheidung ist eine andere, wonach zur Bildung der Variationen entweder alle Elemente verwendet werden können, die bei der vorgeschriebenen Quersumme statthaft sind, oder nur ein beschränktes System von „Ziffern“: im letzteren Falle sprechen wir von Zahlen von gegebener Quersumme. So giebt es 17 Variationen zweiter Classe aus den Elementen 1, 2, 3, . . . 17, die die Quersumme 18 ergeben, aber nur eine Zahl des dekadischen Systems, nämlich 99. — Wir behandeln zunächst bloss die Variationen zur $k$ten Classe zur Quersumme n und schreiben je nach der Voraussetzung A, B oder C: $\overset{n}{V}_k$, $\overset{n}{V}_k'$, $\overset{n}{V}_k''$. — Beispiele:

A) $\overset{7}{V}_3 = 15 = 6_2$, nämlich:

115, 124, 133, 142, 151; 214, 223, 232, 241; 313, 322, 331; 412, 421; 511

B) $\overset{5}{V}_3' = 21 = 7_2$, nämlich:

005, 014, 023, 032, 041, 050; 104, 113, 122, 131, 140; 203, 212, 221, 230; 302, 311, 320; 401, 410; 500

C) $\overset{5}{V}_3'' = 15 = 6_2$, nämlich:

104, 113 u. s. w., Fortsetzung wie in B).

Bei Ermittlung der gesuchten Anzahlen kommen mehrfach die bekannten Formeln zur Verwendung:

$$n_k + n_{k+1} = (n+1)_{k+1} \tag{1}$$

$$k_k + (k+1)_k + \ldots + n_k = (n+1)_{k+1} \tag{2}$$

A) Die Null ist ausgeschlossen. Berechnung von $\overset{n}{V}_k$.

Es ist:

$$\overset{n}{V}_1 = 1 \quad \text{und} \quad \overset{n}{V}_2 = n-1 = (n-1)_1$$

Zur Berechnung von $\overset{n}{V}_3$ unterscheiden wir die Complexe der mit 1, mit 2, . . . mit $n-2$ beginnenden Variationen oder, was dasselbe besagt, die Ordnungen O_1, O_2, . . . O_{n-2} und finden:

Variationen und dekadischen Zahlen von der Quersumme n noch nicht vorliegt, so ergiebt uns Formel (β), dass es einziffrige, höchstens zweiziffrige, höchstens dreiziffrige, höchstens vierziffrige Zahlen u. s. f. der gedachten Art giebt:

$$9_0 = 1; \quad 10_1 = 10; \quad 11_2 = 55; \quad 12_3 = 220; \quad 13_4 = 715$$
$$14_5 = 2002 \quad \text{u. s. w.}$$

Formel (γ) dagegen ergiebt als Anzahl der wirklich ein-, zwei-, dreiziffrigen Zahlen u. s. f.:

$$8_0 = 1; \quad 9_1 = 9; \quad 10_2 = 45; \quad 11_3 = 165; \quad 12_4 = 495$$
$$13_5 = 1287 \quad \text{u. s. w.}$$

Andere Herleitung derselben Resultate.

Aus dem Resultat B) lässt sich C) herleiten, wie es geschehen ist; aber auch A) ist eine Folgerung von B). Denkt man sich nach der Bedingung B) eine Variationstabelle durchgeführt und erhöht dann jedes Element jeder Complexion um die Zahl 1, sodass z. B. aus 00324 die neue Complexion 11435 hervorgeht, so erhält man eine fehlerlose Variationstabelle nach der Bedingung A). Sie ist fehlerlos, da in ihr jede der verlangten Variationen vorkommt, aber keine mehrfach; denn wäre dies der Fall, so müsste auch in der ursprünglichen Tabelle, die sich aus der neuen durch Subtraction von lauter Einsen wiederherstellen lässt, eine Variation null- oder mehr als einmal aufgetreten sein. Durch das gedachte Verfahren gehen die $\overset{n}{V_k}'$ in die $\overset{n+k}{V_k}$ über, also ist

$$\overset{n+k}{V_k} = \overset{n}{V_k}' = (n+k-1)_{k-1}$$

folglich

$$\overset{n}{V_k} = (n-1)_{k-1}$$

wie in (α). — Dabei sei die Bemerkung eingeschaltet, dass bei den $\overset{n}{V_k}$ immer $n \geqq k$, bei den $\overset{n}{V_k}'$ $n \geqq 0$ und bei den $\overset{n}{V_k}''$ $n \geqq 1$ ist.

Gelingt es nun, Resultat B) herzuleiten, so sind auch A) und C) leicht gefunden. Man betrachte das oben gegebene Beispiel der $\overset{5}{V_3}'$, sowie das folgende der $\overset{2}{V_5}'$:

$$\overset{2}{V_5}' = 6_4 = 15$$

nämlich:

00002, 00011, 00020, 00101, 00110, 00200, 01001, 01010, 01100, 02000, 10001, 10010, 10100, 11000, 20000

In dem einen Beispiel ist $k<n$, im andern $k>n$. Sieht man die k Stellen, die man mit Ziffern zu besetzen hat, als Fächer an, die mit der Quersumme n, d. h. mit n Einsen auszufüllen sind, so läuft die Bestimmung der Anzahl $\overset{n}{V}_k'$ auf die Beantwortung der Frage hinaus: „Wie oft lassen sich n ununterscheidbare Gegenstände (z. B. lauter Einsen) in k wohlunterschiedene Fächer derart verteilen, dass einige Fächer auch leer bleiben (d. h. mit Nullen besetzt werden) dürfen?“ Um dies zu entscheiden, denken wir uns sowol die Gegenstände wie die Fächer numerirt Die Unterbringung würde dann in folgender Weise geschehen:

Gegenstand Nr.	1	2	3	$n-1$	n
in Fach	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	2
	.	.	. .	.	.
	.	.	. .	.	.
	.	.	. .	.	.
	1	1	1	1	k
	1	1	1	2	2
	.	.	. .	.	.
	1	1	1	2	k
	1	1	1	3	3
	.	.	. .	.	.
	.	.	. .	.	.
	k	k	k	k	k

Dabei ist zu bemerken, dass z. B. die Anordnungen

111 . . . 112 und 111 . . . 121

als identisch gelten müssen, denn beide drücken nur aus, dass $n-1$ Einsen in Fach 1 und eine Eins in Fach 2 getan wird. Daher haben wir es zu tun mit Combinationen von k Elementen zur $n$ten Classe mit Wiederholung; also ist:

$$\overset{n}{V}_k' = (k+n-1)_n = (n+k-1)_{k-1}, \quad \text{wie oben.}$$

Das gefundene Resultat lässt sich folgendermassen in Worte kleiden:

„Die Anzahl der Variationen $k$ter Classe zur Quersumme n mit überall zugelassener Null ist gleich der Anzahl der

Combinationen von k Elementen zur $n$ten Classe mit Wiederholung". – Es wechselt also der Classenindex.

Auch folgende Aufgabe gehört hierher: Wieviel Glieder ergiebt die Entwicklung von $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$? Auch hier handelt es sich um Unterbringung von n Einsen (jede Eins ist Potenzexponent) in k wohlunterschiedene Fächer (die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_k$). Also ergiebt sich auch hier dieselbe Anzahl $(n+k-1)_{k-1}$.

Der gefundene Ausdruck

$$(n+k-1)_{k-1} = (n+k-1)_n$$

ändert sich nicht, wenn man gleichzeitig $k-1$ und n vertauscht. Wählen wir statt $k-1$ lieber k, so haben wir folgende Resultate:

1) $\overset{n}{V}_{k+1}' = \overset{k}{V}_{n+1}' = (n+k)_k = (n+k)_n$.

2) n ununterscheidbare Dinge lassen sich ebenso oft in $(k+1)$ wol unterschiedene Fächer verteilen als k in $(n+1)$, nämlich $(n+k)_k = (n+k)_n$ mal.

3) Die Entwicklung von $(a_0+a_1+\ldots+a_k)^n$ liefert ebenso viel Glieder als diejenige von $(a_0+a_1+\ldots a_n)^k$, nämlich $(n+k)_k = (n+k)_n$.

Beispiel: 7 Dinge lassen sich in

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 . . .

Fächer ebenso oft verteilen wie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . .

Dinge in 8 Fächer.

Indem wir jetzt zu Zahlen von der Quersumme n übergehen, erwägen wir zunächst, dass die für Variationen gefundenen Resultate auch hier anwendbar sind, soweit auch zur Bildung der Variationen keine anderen Elemente als 012 . . . 9 erforderlich sind. Man findet leicht, dass dies unter den Bedingungen *A*, *B*, *C* der Fall ist, solange

A) $n \leqq k+8$ B) $n \leqq 9$ C) $n \leqq 10$

ist. Führen wir also analog zu V, V', V'' für die gesuchten Anzahlen die Bezeichnungen Z, Z', Z'' ein, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{Z}_k &= \overset{n}{V}_k = (n-1)_{k-1} \quad \text{für} \quad n \leqq k+8 \\ \overset{n}{Z}_k' &= \overset{n}{V}_k' = (n+k-1)_{k-1} \quad \text{für} \quad n \leqq 9 \\ \overset{n}{Z}_k'' &= \overset{n}{V}_k'' = (n+k-2)_{k-1} \quad \text{für} \quad n \leqq 10 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In allen anderen Fällen erfordert die Bestimmung der Z, Z', Z'' eine besondere Behandlung.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Falle A, wo die Null als Element nicht zugelassen wird. Ferner ist es ratsam die Zahl der verfügbaren Elemente nicht als 9, sondern allgemein als d anzunehmen. Die Frage lautet also:

1) Wieviel k-ziffrige Zahlen von der Quersumme n lassen sich im Zahlensystem mit der Grundzahl $d+1$ aus den Ziffern $1, 2, 3, \ldots d$ bilden?

Die Aufgabe ist identisch mit den beiden folgenden:

2) k d-flächige Polyeder, die keine einspringende Ecke besitzen tragen auf ihren Flächen je die Numern $1, 2, 3, \ldots d$; man würfelt mit ihnen und fragt, wie oft die Augensumme n möglich ist.

3) In jeder von k Urnen liegen die Numern $1, 2, 3, \ldots d$: aus jeder Urne wird eine, aber auch nur eine Numer gezogen; wie oft ergiebt sich die Summe n?

Alle diese Aufgaben lassen sich zurückführen auf die folgende:

4) Den Coefficienten von x^n in der Entwickelung von

$$F^k = (x+x^2+x^3 \ldots +x^d)^k$$

zu bestimmen [1]).

Wir behaupten: dieser Coefficient ist die in den Aufgaben 1, 2, 3 gesuchte Anzahl. Es ist:

$$F^k = (x^1+\overset{1}{\breve{x^2}}+\ldots+x^d)(x^1+\overset{2}{\breve{x^2}}+\ldots+x^d)(x^1+\overset{3}{\breve{x^2}}+\ldots+x^d)\ldots$$
$$\ldots(x^1+\overset{k}{\breve{x^2}}+\ldots+x^d)$$

1) Die Methode der Einführung solcher fonctions génératrices stammt von Laplace her.

Nun entsteht das Product $1 \cdot x^n$ jedesmal dann, wenn durch Zusammentreten der Factoren $x^{\lambda_1} x^{\lambda_2} \ldots x^{\lambda_k}$ die Exponentensumme n gebildet wird. Also:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k = n \\ \text{die } \lambda_k = 1, 2, \ldots d, \text{ aber nicht } = 0 \\ \text{die } \lambda_i \text{ dürfen nach Art von Variationen mit Wiederholung angeordnet erscheinen.} \end{cases}$$

Bei allen vier Aufgaben handelt es sich um Bildung sämtlicher Variationen $k$ter Classe zur Quersumme n aus einer beschränkten Anzahl von Elementen 1, 2, . . . d.

Es kommt also darauf an, den Coefficienten von x^n, geschrieben $[x^n]$, in der Entwicklung von F^k zu finden, und es ist dann:

$$\overset{n}{Z}_k = [x^n] \tag{4}$$

Man hat:

$$F = x(1+x+x^2+\ldots+x^{d-1}) = x\frac{1-x^d}{1-x}$$

folglich:

$$\begin{aligned} F^k &= x^k(1-x^d)^k(1-x)^{-k} \\ &= (x^k+k_1x^{k+1}+(k+1)_2x^{k+2}+(k+2)_3x^{k+3}+\ldots) \\ &\times (1-k_1x^d+k_2x^{2d}-+\ldots) \\ &= x^k+k_1x^{k+1}+(k+1)_2x^{k+2}+\ldots+(k+d-2)_{d-1}x^{k+d-1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} +(k+d-1)_dx^{k+d}+(k+d)_{d+1}x^{k+d+1}+(k+d+1)_{d+2}x^{k+d+2}+\ldots \\ \quad -k_1 \cdot x^{k+d} - k_1k_1 \cdot x^{k+d+1} \qquad -k_1(k+1)_2x^{k+d+2}-\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} +(k+2d-2)_{2d-1}x^{k+2d-1}+(k+2d-1)_{2d}x^{k+2d}+(k+2d)_{2d+1}x^{k+2d+1} \\ -k_1(k+d-2)_{d-1}x^{k+2d-1}-k_1(k+d-1)_dx^{k+2d}-k_1(k+d)_{d+1}x^{k+2d+1} \\ \qquad +k_2x^{k+2d} \qquad +k_2k_1x^{k+2d+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\ldots+(k+3d-2)_{3d-1}x^{k+3d-1}+(k+3d-1)_{3d}x^{k+3d}+\ldots \\ -\ldots-k_1(k+2d-2)_{2d-1}x^{k+3d-1}-k_1(k+2d-1)_{2d}x^{k+3d}-\ldots \\ +\ldots+k_2\{k+d-2)_{d-1}x^{k+3d-1}+k_2(k+d-1)_dx^{k+3d}+\ldots \\ \qquad -k_3 \cdot x^{k+3d} \qquad -\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ist nun $n < k$, so ist

$$[x^n] = 0$$

Ist $n \geqq k$, aber $\leqq k+d-1$, z. B. $= k+\lambda$, so ist $[x^n]$, also auch

$$\overset{n}{Z}_k = [x^{k+\lambda}] = (k+\lambda-1)_\lambda = (n-1)_{n-k} = (n-1)_{k-1}$$

wie in (3). In jedem Falle

$$n \geqq k$$

aber kann man setzen:

$$n-k = pd+\lambda$$

wobei p eine positive ganze Zahl und

$$0 \leqq \lambda < d$$

ist, also:

$$n = k+pd+\lambda$$

Dann wird:

$$\begin{aligned}
[x^n] &= (k+pd+\lambda-1)_{pd+\lambda} - k_1(k+\overline{p-1}\,d+\lambda-1)_{(p-1)d+\lambda} \\
&\quad + k_2(k+\overline{p-2}\,d+\lambda-1)_{(p-2)d+\lambda} - + \ldots \\
&\quad + (-1)^{p-1} \cdot k_{p-1}(k+d+\lambda-1)_{d+\lambda} + (-1)^p \cdot k_p(k+\lambda-1)_\lambda \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i (k+\overline{p-i}\,d+\lambda-1)_{(p-i)d+\lambda} \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i (n-id-1)_{n-id-k} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i (n-id-1)_{k-1}
\end{aligned}$$

Setzen wir endlich vermöge der Gleichung

$$\frac{n-k}{d} = p + \frac{\lambda}{d}$$

für p seinen Wert $E\left(\frac{n-k}{d}\right)$ ein, so wird

$$\overset{n}{Z}_k = \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-k}{d}\right)} (-1)^i k_i (n-id-1)_{k-1} \qquad (\alpha')$$

Der Fall B), zu dem wir jetzt übergehen, lässt sich auf A) zurückführen. Nehmen wir statt der früheren Function F^k jetzt:

$$F'^k = (1+x+x^2+\ldots+x^{d-1})^k = \frac{F^k}{x^k}$$

so wird der jetzige Coefficient von x^{n-k} identisch mit dem früheren von x^n, also

$$[x^{n-k}]' = [x^n]$$

folglich

$$[x^n]' = [x^{n\,|\,k}]$$

und somit:

$$Z_k^{n\prime} = \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n}{d}\right)} (-1)^i k_i (n-id+k-1)_{k-1} \qquad (\beta')$$

Endlich soll nach Bedingung C) die Null zugelassen werden, nur nicht an vorderster Stelle. Die Formel (β') ergiebt die Anzahl sämtlicher höchstens k-ziffrigen Zahlen von der Quersumme n; ziehen wir von dieser Anzahl diejenige aller höchstens $(k-1)$-ziffrigen Zahlen ab, so erhalten wir die gesuchte Zahl, also, wenn

$$n - id = \nu$$

gesetzt wird:

$$Z_k^{n\prime\prime} = \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n}{d}\right)} (-1)^i \cdot \{k_i(\nu+k-1)_{k-1} - (k-1)_i(\nu+k-2)_{k-2}\}$$

Der in der Klammer auftretende Ausdruck ist:

1) für $i = 0$:

$$k_0(n+k-1)_{k-1} - (k-1)_0(n+k-2)_{k-2} = (n+k-1)_{k-1} - (n+k-2)_{k-2} = (n+k-2)_{k-1}$$

2) für $i > 0$:

$$\frac{k(k-1)\ldots(k+1-i)}{i!} \cdot \frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)\ldots(\nu+1)}{(k-2)!\,(k-1)} - \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k+1-i)(k-i)}{i!} \cdot \frac{(\nu+k-2)\ldots(\nu+1)}{(k-2)!}$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k+1-i)}{i!} \cdot \frac{(\nu+k-2)\ldots(\nu+1)}{(k-2)!} \times \left(\frac{k(\nu+k-1)}{k-1} - (k-i)\right)$$

$$= \frac{1}{i} \cdot (k-1)_{i-1}(\nu+k-2)_{k-2} \cdot \frac{k\nu+i(k-1)}{k-1}$$

$$= (k-1)_{i-1}(\nu+k-2)_{k-i}\left(1+\frac{k\nu}{i(k-1)}\right)$$

Also:

$$Z_k^{n\prime\prime} = (n+k-2)_{k-1} + \sum_{i=1}^{E\left(\frac{n}{d}\right)} (-1)^i \cdot (k-1)_{i-1}(n-id+k-2)_{k-2} \cdot \left(1+\frac{k(n-id)}{i(k-1)}\right) \qquad (\gamma')$$

Sollen die Formeln α', β', γ' auf das dekadische Zahlensystem angewendet werden, so ist folgendes zu beachten. In A wurden als zulässig angesehen die Elemente 1, 2, 3, . . . d; also muss für (α') $d = 9$ gesetzt werden, wie es auch oben bei Formulirung der Aufgabe 1) angedeutet worden ist. In B und C dagegen waren 0, 1, 2, . . . $d-1$ die zulässigen Elemente, denn wir haben die Resultate (β') und (γ') durch Entwicklung der Function

$$F'^k = (1 + x + \ldots x^{d-1})^k$$

hergeleitet. Also haben wir hier $d = 10$ zu wählen.

Beispiel: Wie viel giebt es 4-ziffrige Zahlen mit der Quersumme 32?

$$k = 4, \quad d = 10, \quad n = 32$$

Aus (γ') erhalten wir:

$$\begin{aligned}
{}^{32}Z_4'' &= 34_3 + \sum_{i=1}^{3} (-1)^i \cdot 3_{i-1} \cdot (34-10i)_2 \cdot \left(1 + \frac{4(32-10i)}{3i}\right) \\
&= 34_3 - 3_0 \cdot 24_2 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 22}{3}\right) + 3_1 \cdot 14_2 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 12}{6}\right) \\
&\quad - 3_2 \cdot 4_2 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 2}{9}\right) \\
&= 5984 - 1 \cdot 276 \cdot \frac{91}{3} + 3 \cdot 91 \cdot 9 - 3 \cdot 6 \cdot \frac{17}{9} \\
&= 5984 - 8372 + 2457 - 34 = 35.
\end{aligned}$$

Die 35 Zahlen sind:

5999; 6899, 6989, 6998; 7799, 7889, 7898, 7979, 7988, 7997; 8699, 8789, 8798, 8879, 8888, 8897, 8969, 8978, 8987, 8996; 9599, 9689, 9698, 9779, 9788, 9797, 9869, 9878, 9887, 9896, 9959, 9968, 9977, 9986, 9995.

Allgemeine Sätze über die in α', β', γ' vorkommenden Entwicklungscoefficienten.

1) Für jedes $n > kd$ in A ist ${}^{n}Z_k$, also auch $[x^n]^k$ gleich null: für jedes $n > k(d-1)$ in B ist ${}^{n}Z_k'$, also auch $[x^n]^k$ gleich null. Diese Bemerkung ergiebt, auf (α') oder (β') angewendet, einen allgemeinen Lehrsatz der Arithmetik.

2) Lässt man in (α') und (β') n alle statthaften Werte durchlaufen, nämlich in (α') von k bis kd, in (β') von 0 bis $k(d-1)$, so erhält man eine symmetrische Reihe, d. h. es ist

$$[x^{k+n}] = [x^{kd-n}]$$

oder, was dasselbe ist:

$$[x^n]' = [x^{k(d-1)-n}]'$$

Es ist nämlich $[x^n]'$, d. h. der Coefficient $[x^n]$ in der Entwicklung von $(1+x+x^2+\ldots+x^{d-1})^k$

$$\text{gleich } [x^{-n}] \text{ in } \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)^k$$

$$\text{gleich } [x^{k(d-1)-n}] \text{ in } \left(x^{d-1}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)\right)^k$$

oder in $(1+x+x^2+\ldots+x^{d-1})^k$, d. h.

$$[x^n]' = [x^{k(d-1)-n}]'$$

3) Auch (γ') ergiebt eine symmetrisch verlaufende Reihe der $\overset{n}{Z_k}''$, wenn n alle statthaften Werte von 1 bis $k(d-1)$ durchläuft; es ist nämlich

$$\overset{1}{Z_k}'' = \overset{k(d-1)}{Z_k}''; \quad \overset{2}{Z_k}'' = \overset{k(d-1)-1}{Z_k}''; \quad \ldots \overset{n}{Z_k}'' = \overset{k(d-1)+1-n}{Z_k}$$

Es wurde nämlich $\overset{n}{Z_k}''$ durch den Ansatz

$$\overset{n}{Z_k}'' = \overset{n}{Z_k}' - \overset{n}{Z_{k-1}}'$$

gefunden; folglich ist $\overset{n}{Z_k}''$ der Coefficient von x^n in der Entwicklung von $F'^k - F'^{k-1} = F'^{k-1}(F'-1)$ oder:

$\overset{n}{Z_k}''$ gleich $[x^n]$ in $(1+x+\ldots+x^{d-1})^{k-1} \cdot (x+x^2+\ldots+x^{d-1})$

$$\text{gleich } [x^{1-n}] \text{ in } \left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)$$

$$\text{gleich } [x^{1-n}] \text{ in } \left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)^{k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-2}}\right)$$

$$\text{gleich } [x^{k(d-1)+1-n}] \text{ in } \left(x^{d-1}\left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-1}}\right)\right)^{k-1} \cdot \left(x^{d-1}\left(1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{d-2}}\right)\right)$$

oder in $(1+x+\ldots+x^{d-1})^{k-1}\,.\,(x+x^2+\ldots+x^{d-1})$

oder in $F'^{k-1}(F'-1)$

Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Hiernach hätte man das vorhin behandelte Beispiel kürzer erledigen können, nämlich:

$$Z_4''^{32} = Z_4''^{37-32} = Z_4''^{5} = (n+k-2)_{k-1}, \quad \text{d. h.} \quad = 7_3 = 35$$

Der symmetrische Bau in den Entwicklungen, die zu den Formeln α', β', γ' führten, ergiebt, auf eben diese Formeln angewendet, wieder einen Lehrsatz der Arithmetik.

4) Die genannten Entwicklungen ergeben Coefficienten, die bis zur Mitte der Reihe ansteigen, dann wieder sinken. Das Letztere haben wir wegen der Symmetrie der Entwicklung nicht weiter zu beweisen. Um das Erste zu zeigen, beachten wir zunächst, dass die Entwicklungen A und B sich nur durch den Factor x^k unterscheiden, sodass sich der Beweis auf die Fälle B und C beschränken kann. Wir zeigen zunächst die Richtigkeit der Behauptung für $k=2$. In B liegt die Entwicklung von F'^2 vor, die die Form hat

$$(1+x+x^2+\ldots+x^p)^2 = (1+x+\ldots+x^p)\,(1+x+\ldots+x^p)$$

Multipliciren wir aus, so erhalten wir folgendes Coefficienten-Schema:

x^0	x^1	x^2	$\ldots$	x^{p-1}	x^p	x^{p+1}	x^{p+2}	$\ldots$	x^{2p-1}	x^{2p}
1	1	1	$\ldots$	1	1					
	1	1	$\ldots$	1	1	1				
		1	$\ldots$	1	1	1	1			
			$\ldots$							
			$\ldots$							
				1	1	1	1	$\ldots$	1	
					1	1	1	$\ldots$	1	1
1	2	3	$\ldots$	p	$p+1$	p	$p-1$	$\ldots$	2	1

Ganz ähnlich in C, wo wir $(1+x+x^2+\ldots+x^p)(x+x^2+\ldots+x^p)$ zu multipliciren haben: wir erhalten die Coefficienten

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ p\ \ p\ \ p-1\ \ldots\ 2\ 1$$

Für beide Entwicklungen trifft unsere Behauptung zu, und die Producte haben die Form:

$$Q = 1+a_1x+a_2x^2+ \ldots +a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m+a_{m-1}x^{m+1} + \ldots +a_1x^{2m-1}+x^{2m}$$

und

$$Q' = x(1+b_1x+b_2x^2+ \ldots +b_nx^n+b_nx^{n+1}+ \ldots +b_1x^{2n}+x^{2n+1})$$

Dabei ist $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ und $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, und die Entwicklungen sind symmetrisch. Es mögen nun die Ausdrücke Q und $\frac{Q'}{x}$ mit

$$P = 1+x+x^2+ \ldots +x^p$$

multiplicirt werden, wobei $p \leqq m$ und $\leqq n$ vorausgesetzt wird. Wenn sich beweisen lässt, dass in der Entwicklung der Producte bis zur Mitte hin wiederum ein Aufsteigen der Coefficienten stattfindet, so ist unsre Behauptung überhaupt bewiesen. Man hat dann nämlich bloss nötig, $2m$ oder $2n+1$ gleich $k(d-1)$ und für den Fall *B*) $p = d-1$, für den Fall *C*) $p = d-2$ anzunehmen, um durch den Schluss von k auf $k+1$ von $k = 2$ aus die allgemeine Richtigkeit unserer Behauptung zu erschliessen. — Für das Product QP ergiebt sich folgendes Coefficienten-Schema:

x^0	x^1	x^2	x^3	. . .	x^{p-1}	x^p	x^{p+1}	x^{p+2}	. . .
1	a_1	a_2	a_3	. . .	a_{p-1}	a_p	a_{p+1}	a_{p+2}	. . .
	1	a_1	a_2	. . .	a_{p-2}	a_{p-1}	a_p	a_{p+1}	. . .
		1	a_1	. . .	a_{p-3}	a_{p-2}	a_{p-1}	a_p	. . .
			. . . . .						
			. . . . .						
					1	a_1	a_2	a_3	. . .
						1	a_1	a_2	. . .

. . .	x^m	x^{m+1}	x^{m+2}	. . .
. . .	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	. . .
. . .	a_{m-1}	a_m	a_{m-1}	. . .
. . .	a_{m-2}	a_{m-1}	a_m	. . .
. . .	a_{m-p+1}	a_{m-p+2}	a_{m-p+3}	. . .
. . .	a_{m-p}	a_{m-p+1}	a_{m-p+2}	. . .

Man erkennt nun, dass zunächst infolge unserer Voraussetzung über die $a_1a_2 \ldots a_m$ bis zur Potenz x^m ein beständiges Steigen der

Coefficienten stattfindet. Dasselbe gilt aber auch noch jenseits x^m, und zwar wird solange

$$[x^{m+r}] \leqq [x^{m+r+1}] \text{ sein, als } a_{m-p+r} \leqq a_{m-r-1}$$

ist; denn beim Uebergang von der einen zur anderen Potenz wird der Posten a_{m-p+r} verdrängt, und a_{m-r-1} tritt an seine Stelle. Die gefundene Bedingung aber reducirt sich auf folgende:

$$p - r \geqq r + 1 \quad \text{oder} \quad r \leqq \frac{p-1}{2}$$

Dies aber bedeutet: ist p gerade, so steigen die Coefficienten an bis zu dem mittelsten $\left[x^{m+\frac{p}{2}}\right]$; ist p ungerade, so gilt dasselbe für die zwei einander gleichen mittleren Coefficienten:

$$\left[x^{m+\frac{p-1}{2}}\right] = \left[x^{m+\frac{p+1}{2}}\right]$$

Ein genau entsprechendes Resultat ergiebt sich für das Product $\frac{Q'}{x} \cdot P$. Wir stellen nur die folgenden Coefficienten auf:

$$\begin{aligned}
[x^n] &= b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_{n-p} \\
[x^{n+1}] &= b_n + b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-p+1} \\
[x^{n+2}] &= b_{n-1} + b_n + b_n + \ldots + b_{n-p+2} \\
&\ldots \\
&\ldots \\
[x^{n+r}] &= b_{n-(r-1)} + \ldots + b_n + b_n + \ldots + b_{n-(p-r)} \\
[x^{n+r+1}] &= b_{n-r} + \ldots + b_n + b_n + \ldots + b_{n-(p-r-1)}
\end{aligned}$$

Also ist solange

$$[x^{n+r}] \leqq [x^{n+r+1}], \text{ als } b_{n-(p-r)} \leqq b_{n-r}$$

$$\text{oder } p - r \geqq r \quad \text{oder } r \leqq \tfrac{1}{2}p$$

ist. Man erhält entsprechend den $2n+2+p$ Gliedern der ganzen Entwicklung bei geradem p zwei mittelste und grösste Coefficienten, bei ungeradem p einen.

Beispiel. Wir leiten die Anzahl der dreiziffrigen (dekadisch geschriebenen) Zahlen (Bedingung C) nochmals her aus der Anzahl

der höchstens dreiziffrigen und der höchstens zweiziffrigen (Bedingung *B*) und zwar für alle möglichen Quersummen. Um die $\overset{n}{Z}_3'$ zu erhalten, nehmen wir folgende Entwicklung vor:

$$F'^3 = (1+x+\ldots+x^9)^3 = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{10})^3(1-x)^{-3}$$
$$= (1-3x^{10}+3x^{20}-x^{30})(1+3_1x+4_2x^2+5_3x^3+6_4x^4+7_5x^5+\ldots)$$
$$= (1-3x^{10}+3x^{20}-x^{30})(1+3_2x+4_2x^2+5_2x^3+6_2x^4+7_2x^5+\ldots)$$
$$= 1+3_2x+4_2x^2+\ldots+11_2x^9+12_2x^{10}+13_2x^{11}+\ldots$$
$$+21_2x^{19}+22_2x^{20}+\ldots+31_2x^{29}+32_2x^{30}+\ldots$$
$$-3x^{10}-3\,.\,3_2x^{11}-\ldots-3\,.\,11_2x^{19}-3\,.\,12_2x^{20}-\ldots$$
$$-3\,.\,21_2x^{29}-3\,.\,22_2x^{30}-\ldots+3\,.\,2_2x^{20}+\ldots$$
$$+3\,.\,11_2x^{29}+3\,.\,12_2x^{30}+\ldots-1\,.\,2_2x^{30}-\ldots$$

Hierbei ist z. B.

$[x^{30}] = 32_2-3\,.\,22_2+3\,.\,12_2-2_2 = 496-3\,.\,231+3\,.\,66-1 = 0$

wie es sein muss. Man erhält:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Quersumme											12	13
$n =$	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
											15	14
$\overset{n}{Z}_3' =$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69
											73	75

Bis $n = 9$ hätte schon die Formel (β) geführt:

$$\overset{n}{V}_3' = (n+2)_2$$

Mechanisch ausgeführte Addition sämtlicher $\overset{n}{Z}_3'$ ergiebt die Summe 1000, wie es sein muss, da 000 mitgezählt wird.

Um die $\overset{n}{Z}_2'$ zu finden, worin n bis 18 steigen kann, erwägen wir die Symmetrie ihrer Reihe; wir brauchen nur bis $n = 9$ zu gehen, und für diesen Zweck reicht schon die Formel (β) hin:

$$\overset{n}{V}_2' = (n+1)_1$$

Also erhalten wir:

Quersumme	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n =$	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
$\overset{n}{Z}_2' =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dabei ist übrigens $\sum_{n=0}^{18} {}^{n}Z_2' = 100$, wie es sein muss.

Subtrahiren wir jetzt die ${}^{n}Z_2'$ von den ${}^{n}Z_3'$, so erhalten wir die ${}^{n}Z_3''$ nämlich:

Quersumme $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 12	11 13	14
	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18 16	17 15	
${}^{n}Z_3'' =$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	54 66	61 69	70

Dabei ist $\sum_{n=1}^{27} {}^{n}Z_3'' = 900$, wie es sein muss.

Auch zahlentheoretisch ist das Ergebniss interessant, dass durch Subtraction einer symmetrischen Zahlenreihe von einer anderen, die nicht dieselbe Gliederzahl besitzt, wieder eine symmetrische Zahlenreihe hervorgehen kann.

Bemerkung. Die Sätze 2) und 3) über die Symmetrie der Reihen Z, Z', Z'' liessen sich auch auf anderem Wege herleiten. Zwei Beispiele werden genügen, um dies zu zeigen, das eine für den Fall B (oder ebenso gut A), das andere für C. Es handle sich zunächst um die ${}^{n}Z_3'$, also:

039, 048, 057, 066, 075, 084, 093; 129, 138, . . . 930

Nimmt man jetzt statt jeder Ziffer ihre Ergänzung zu 9, so müssen lauter dreistellige Zahlen von der Quersumme $27 - 12 = 15$ entstehen, nämlich:

960, 951. 942, 933, 924, 915, 906; 870, 861, . . . 069

Die entstandene Reihe muss ein fehlerloses System der ${}^{15}Z_3'$ darstellen, denn sie kann weder lückenhaft sein noch eine Zahl mehrmals enthalten, weil dann ganz dasselbe für die Reihe der ${}^{12}Z_3'$ gelten müsste, aus der sie hergeleitet ist, und die sich aus ihr wiederherstellen lässt. Also ist

$${}^{15}Z_3' = {}^{12}Z_3' \quad \text{und ebenso} \quad {}^{n}Z_3' = {}^{27-n}Z_3'$$

allgemein

$${}^{n}Z_k' = {}^{k(d-1)-n}Z_k'$$

Ferner mögen vorliegen die $\overset{13}{Z_3}''$, nämlich:

$$139,\ 148,\ 157,\ 166,\ 175,\ 184,\ 193;\ 229,\ldots 490,$$
$$508,\ldots 940$$

Man ersetze die jedesmalige erste Ziffer durch ihre Ergänzung zu 10, die übrigen Ziffern durch ihre Ergänzung zu 9. Es gehen so die Ziffern $1\ldots 9$ der ersten und $0\ldots 9$ der zweiten und dritten Stelle über in $9\ldots 1$ an erster und $9\ldots 0$ an den übrigen Stellen: die Bedingung C bleibt also gewahrt. Es entsteht eine Reihe von $\overset{28-13}{Z_3}'' = \overset{15}{Z_3}''$
und zwar die vollständige Reihe, aus denselben Gründen wie oben, nämlich:

$$960,\ 951,\ 942,\ 933,\ 924,\ 915,\ 906;\ 870,\ldots 609,$$
$$591,\ldots 159$$

Es ist also

$$\overset{13}{Z_3}'' = \overset{15}{Z_3}'' \quad \text{und ebenso} \quad \overset{n}{Z_3}'' = \overset{28-n}{Z_3}''$$

und allgemein

$$\overset{n}{Z_k}'' = \overset{n'}{Z_k}''$$

wenn $n+n' = k(d-1)+1$ ist.

V. Problem der bunten Reihe.

Eine Gesellschaft besteht aus n Herren und n Damen oder aus n Norddeutschen und n Süddeutschen — wir werden sagen: aus n Personen I und n Personen II Sie setzen sich in bunter Reihe neben einander. Es entsteht die Frage: „Wieviel verschiedene Anordnungen wird es geben?“ Dabei haben wir hauptsächlich zu unterscheiden, ob nur ein Tisch gebildet wird oder mehrere. Jede Anordnung soll in einer geschlossenen oder Kreisreihe erfolgen, nicht etwa in einer Längsreihe.

Bunte Reihe an einem Tisch. Haben wir eine beliebige Tischordnung vor uns und lassen dann die ganze Gesellschaft um einen oder mehrere Stühle weiter rücken, so gilt die neue Anordnung als identisch mit der alten. Daher werden wir einer Person I von vornherein einen festen Platz anweisen dürfen. Die übrigen Personen I können noch $(n-1)!$ verschiedene Reihenfolgen annehmen, und die zwischen ihre Sitze sich einschiebenden Personen II $n!$ eben solche. Wir dürfen nämlich keiner II einen bestimmten Platz anweisen, da diese eine Person dann entweder immer oder nie

Nachbar der auf dem festen Platz sitzenden I sein würde, sodass uns zahlreiche Anordnungen entgehen würden. Wir erhalten also vorläufig das Resultat $(n-1)!\,n!$ Wir setzen aber fest, dass Anordnungen, die sich nur durch den Drehungssinn unterscheiden, als identisch gelten sollen, denn es bleiben bei Anordnung der ganzen Tischgesellschaft in umgekehrter Reihenfolge sämtliche Nachbarschaften erhalten. Daher haben wir noch durch 2 zu dividiren, ausser falls $n = 1$ ist; also:

$$\left.\begin{aligned} f(n) &= \varepsilon \cdot \frac{(n-1)!\,n!}{2} = \varepsilon \cdot \frac{n!\,n!}{2n} \\ \varepsilon &\text{ stets } = 1, \text{ bloss für } n = 1 \text{ gleich } 2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Beispiele:

$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 6,\ f(4) = 72,\ f(5) = 1440,$
$f(6) = 43200,\ f(7) = 1814400,\ f(8) = 101606400, \ldots$

Bezeichnen wir die Personen I und die Personen II durch A, B, . . . , so sind für $n = 2$ die beiden Sitzweisen

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ 1 & & 2 \\ & B & \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} & A & \\ 2 & & 1 \\ & B & \end{array}$$

identisch, weil sie sich nur durch die Anordnung rechts- und linksherum unterscheiden. Für $n = 3$ giebt es 6 Anordnungen, nämlich:

$$\begin{array}{cccccc} A & A & A & A & A & A \\ 1\ \ 3 & 1\ \ 2 & 2\ \ 3 & 2\ \ 1 & 3\ \ 2 & 3\ \ 1 \\ B\ \ C & B\ \ C & B\ \ C & B\ \ C & B\ \ C & B\ \ C \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

A ist die festgehaltene Person; eine Vertauschung von B und C führt nach der vorgenommenen Festsetzung über den Drehungssinn zu keiner neuen Anordnung.

Bunte Reihe an zwei Tischen. An dem einen Tisch sollen k Paare sitzen, an dem anderen $n-k$; wir suchen die Zahl aller möglichen Anordnungen $f(k, n-k)$. Vertauschen wir an irgend einer vorliegenden Tischordnung die beiden Tische, ohne die Anordnung der Personen unter sich zu ändern, so gilt uns dieser Wechsel als nichts neu zu Zählendes. Daher muss

$$f(k, n-k) = f(n-k, k)$$

sein, und wir könnten, falls die Tische ungleich stark besetzt werden sollen, als ersten Tisch stets den stärker besetzten annehmen; doch

ist dies nicht einmal nötig. Zunächst lassen sich zur Besetzung des ersten Tisches in n_k Weisen Personen I und in n_k Weisen Personen II aussuchen; aus den gewählten Personenpaaren lassen sich $f(k)$ Anordnungen am ersten Tische vornehmen. Die übrigen $n-k$ Paare können sich am anderen Tische in $f(n-k)$ verschiedenen Arten gruppiren; daher erhalten wir das Resultat $(n_k)^2 \cdot f(k)f(n-k)$. Herleitung und Resultat bleiben richtig, wenn k oder $n-k$ gleich 1 ist. Nur in dem Falle

$$k = n-k, \quad \text{d. h.} \quad k = \frac{n}{2}$$

haben wir noch durch 2 zu dividiren, weil hier ein Wechsel der blossen Tische, der niemals neu zu zählende Anordnungen ergeben soll, solche Anordnungen wieder ergiebt, die bereits gezählt worden sind. Also:

$$f(k, n-k) = (n_k)^2 \cdot f(k)f(n-k) : \alpha$$

wobei $\alpha = 1$, nur in dem Falle $k = \frac{n}{2}$ gleich 2 zu setzen ist. Setzen wir jetzt

$$f(k) = \frac{k!\,k!}{2k} \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad f(n-k) = \frac{(n-k)!(n-k)!}{2(n-k)} \cdot \varepsilon'$$

ein, so erhalten wir, weil

$$n_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{ist:}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(k, n-k) = \dfrac{n!\,n!}{4k(n-k)} \cdot \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} \\ \varepsilon = 2 \text{ für } k = 1,\ \varepsilon' = 2 \text{ für } n-k = 1,\ \alpha = 2 \text{ für } k = \dfrac{n}{2} \\ \text{sonst } \varepsilon = \varepsilon' = \alpha = 1 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Wie es sein muss, ergiebt sich:

$$f(k, n-k) = f(n-k, k)$$

Beispiele:

$f(1, 1) = 2$, denn hier ist $\varepsilon = \varepsilon' = \alpha = 2$
$f(1, 2) = 9$; $f(1, 3) = 96$; $f(1, 4) = 1800$; $f(1, 5) = 51840$
$f(2, 2) = 18$; $f(2, 3) = 600$; $f(2, 4) = 16200$
$f(3, 3) = 7200$; $f(4, 4) = 12700800$

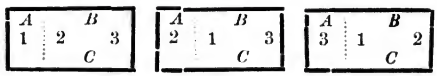
Der Fall $f(1, 1)$ ergiebt die beiden Anordnungen

A	B
1	2

und

A	B
2	1

Der Fall $f(1, 2)$ ergiebt:



u. s. w.

nämlich noch 6 weitere Zusammenstellungen, worin am kleineren Tische B mit 1, 2 oder 3 und C mit 1, 2 oder 3 zusammensitzt.

Dividiren wir Formel (2) durch Formel (1) und berücksichtigen, dass der Fall $n = 1$ jetzt unmöglich ist, so erhalten wir:

$$f(k, n-k) = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} \cdot \frac{n}{2k(n-k)} \cdot f(n) \qquad (3)$$

1) Für $n = 2$ und $k = 1$ erhalten wir so:

$$f(1, 1) = 2 \cdot \frac{2}{2} \cdot f(2) = 2f(2)$$

also ist $f(1, 1)$ doppelt so gross als $f(2)$.

2) $n > 2$, $k = 1$ ergiebt $\varepsilon = 2$, $\varepsilon' = \alpha = 1$, also:

$$f(1, n-1) = \frac{n}{n-1} \cdot f(n)$$

also ist auch hier noch $f(1, n-1) > f(n)$. — In allen übrigen Fällen ist $f(k, n-k) < f(n)$, nämlich:

3) $n > 2$, $k > 1$, $k \leqq n-k$, also auch $n \geqq 4$. Schliessen wir den Fall

$$k = n-k = \frac{n}{2}$$

zunächst aus, so ist

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} = 1, \quad \text{also:} \quad f(k, n-k) = \frac{n}{2k(n-k)} \cdot f(n)$$

Nun ist der Zusatzfactor

$$\frac{n}{2k(n-k)} = \frac{\frac{1}{2}n}{n-k} \cdot \frac{1}{k}$$

also $< \frac{1}{k}$, daher sogar $f(k, n-k) < \frac{1}{k} f(n)$. Für

$$k = n-k = \frac{n}{2} \quad \text{ist} \quad \alpha = 2, \quad \text{also:}$$

$$f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(n)$$

Denken wir uns einstweilen k als stetig veränderlich, so lehrt der Differentialquotient des Nenners $2k(n-k)$ nach k, dass die Function

$f(k, n-k)$ mit wachsendem k stetig abnimmt bis zu $k = \frac{n}{2}$. Daher wird im Falle eines geraden n

$$k = \frac{n}{2}$$

im Fall eines ungeraden n

$$k = \frac{n-1}{2}$$

den kleinsten (hier in Betracht kommenden) Wert von $f(k, n-k)$ ergeben. Man erhält:

$$n \equiv 0 \pmod 2\text{:} \quad f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(n)$$

$$n \equiv 1 \pmod 2\text{:} \quad f\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{2}{n-\frac{1}{n}} \cdot f(n)$$

Für $n = \infty$ wird also $f\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ doppelt so gross als $f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, offenbar eine Folge des wechselnden Wertes von α.

Beispiel. Für $n = 10$ und $n = 11$ nimmt der Quotient

$$\frac{f(k, n-k)}{f(n)} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha} \cdot \frac{n}{2k(n-k)}$$

folgende Werte an:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n = 10$	1,111	0,313	0,238	0,208	0,100
$n = 11$	1,100	0,306	0,229	0,196	0,183

Bunte Reihe an drei oder mehr Tischen. Es sollen sich n Paare an r Tischen verteilen, und zwar sollen am ersten Tisch k_1 Paare Platz nehmen, am zweiten k_2 u. s. w., am letzten k_r; also:

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$$

Werden zunächst die Fälle ausgeschlossen, wo mehrere k einander gleich sind, oder wo auch nur eine Grösse $k = 1$ ist, so erhält man sofort:

$$f(k_1, k_2, \ldots k_r) = (n)^2_{k_1} f(k_1) \cdot (n-k_1)^2_{k_2} f(k_2) \cdot (n-k_1-k_2)^2_{k_3} f(k_3) \ldots \ldots (k_r)^2_{k_r} f(k_r)$$

Dabei wird an jedem Tische ein fester Platz etwa für diejenige Person reservirt, deren Name im Alphabet vorangeht. Also:

$$f(k_1, k_2, \ldots k_r) = ((n)_{k_1}(n-k_1)_{k_2}(n-k_1-k_2)_{k_3} \ldots (k_r)_{k_r})^2 \times f(k_1) f(k_2) \ldots f(k_r)$$

$$= \left(\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}\right)^2 \cdot \frac{k_1!\, k_1!}{2k_1} \cdot \frac{k_2!\, k_2!}{2k_2} \cdot \ldots \frac{k_r!\, k_r!}{2k_r}$$

$$= \frac{n!\, n!}{2^r \cdot k_1 k_2 \ldots k_r}$$

Sind nun α unter den Grössen k_i einander gleich, so würde jede Permutation der betreffenden α Tischgruppen, die doch kein neues Resultat ergeben soll, bereits gezählte Anordnungen wieder ergeben; also haben wir noch durch $\alpha!$ zu dividiren, oder wenn mehrere solcher Gruppen vorhanden sind, durch $\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots$ Sind ferner unter den Grössen k_i eine oder einige $= 1$, so haben wir entsprechend oft den Factor 2 hinzuzufügen. Also erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} f(k_1, k_2, \ldots k_r) = \dfrac{n!\, n!}{2^{r-\tau} \cdot k_1 k_2 \ldots k_r \cdot \alpha!\, \beta! \ldots \tau!} \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n;\ \alpha + \beta + \ldots + \tau = r; \text{ unter den } k_i \text{ giebt es } \alpha \text{ gleiche, } \beta \text{ gleiche u. s. f. und } \tau \text{ solche, die } = 1 \text{ sind.} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Specialfälle. $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = \frac{n}{r}$ ergiebt:

$$f\left(\frac{n}{r}, \frac{n}{r}, \ldots \frac{n}{r}\right) = \frac{n!\, n!}{\left(\frac{2n}{r}\right)^r \cdot r!} \quad \text{für } \frac{n}{r} > 1 \qquad (5)$$

und

$$f(1, 1, \ldots 1) = \frac{n!\, n!}{2^{n-n} \cdot n!} = n! \qquad (6)$$

$r = 2$ verwandelt Formel (4) wieder in Formel (3). nämlich:

$$f(k, n-k) = \frac{n!\, n!}{2^{2-\tau} \cdot k(n-k) \cdot \alpha!} = \frac{2^\tau}{\alpha} \cdot \frac{n!\, n!}{4k(n-k)}$$

Ebenso erhalten wir aus (5) und (6) wieder:

$$f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{n!\, n!}{2n^2} = \frac{1}{n} \cdot f(n); \quad f(1, 1) = 2!$$

Formel (6) bestätigt sich folgendermassen: da hier an jedem Tische nur ein Personenpaar sitzt, für das Paar aber es gleichgültig ist, an welchem Tische es sitzt, so lässt sich von vornherein jeder Person I ein bestimmter Platz zuweisen: dann bleiben uns noch die n Personen II zu permutiren übrig. — Einige Zahlenbeispiele sind:

$$f(1,1,2) = 72; \quad f(1,1,3) = 1200; \quad f(1,2,2) = 450$$
$$f(1,2,3) = 21600; \quad f(1,1,2,2) = 8100$$

Verallgemeinerung der Aufgabe. Statt von Paaren wollen wir jetzt von Gruppen zu je λ Personen (oder Dingen) sprechen. Solcher Gruppen mögen n vorhanden sein. Die einzelnen Sorten werden wieder durch I, II, III, . . . bezeichnet. Zunächst handelt es sich darum, die n Gruppen „in bunter Reihe" auf alle möglichen Weisen an einem Tisch anzuordnen. Das Wort „bunte Reihe" ist so zu verstehen, dass in jeder Reihe von λ Nachbarn alle „Sorten" vertreten sind und zwar innerhalb der ganzen Tischordnung immer in derselben Reihenfolge. Wir setzen zunächst innerhalb der λ Sorten eine bestimmte Reihenfolge fest und ordnen ihr zufolge an, etwa derart, dass die Personen I jedesmal Flügelmänner ihrer rechts neben ihnen sitzenden Gefolgschaft sind. Nachdem eine Person I einen festen Platz erhalten hat, bekommen wir

$$(n-1)!\, n!\, n! \ldots = \frac{(n!)^\lambda}{n}$$

verschiedene Anordnungen. Diese Anordnungen sind aber noch alle so beschaffen, dass z. B. für $\lambda = 4$ jede II zwischen einer I und einer III, jede III zwischen einer II und einer IV, jede IV zwischen einer III und einer I und jede I zwischen einer IV und einer II sitzt. Indem wir jetzt die Aufeinanderfolge innerhalb jeder Gruppe von λ Personen gleichmässig ändern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit festsetzen, dass die Personen I stets Flügelmänner ihrer Gruppen bleiben, denn bei jeder vorliegenden Tischordnung bleibt es der Willkür des Beobachters überlassen, von welcher Sorte aus er jede Gefolgschaft von λ Personen zu zählen beginnen will, sodass uns keine Anordnung entgehen kann, wenn wir die Gefolgschaften stets mit den Personen I anfangen. Somit ergeben sich $(\lambda-1)!$ gleichberechtigte Fälle zu je $\frac{(n!)^\lambda}{n}$ Anordnungen. Berücksichtigen wir endlich, dass bis jetzt jede Anordnung doppelt gezählt ist, einmal rechtsherum, einmal linksherum, so erhalten wir nach Division durch 2:

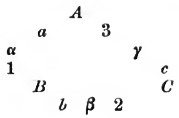
$$F_\lambda(n) = \frac{(n!)^\lambda (\lambda-1)!}{2n} \tag{7}$$

Die Formel bleibt offenbar auch für $n = 1$ richtig.

Beispiel: $\lambda = 4$, $n = 3$. Man soll erhalten:

$$F_4(3) = \frac{(3!)^4 \cdot 3!}{6} = 6^4 = 1296$$

Die erste Anordnung sei:



A ist Flügelmann der Gruppe $Aa\alpha 1$ u. s. f.; zugleich sei A die auf festem Platze sitzende Person. Man vertausche nun B und C auf ihren Plätzen und bloss auf diesen, ebenso abc, $\alpha\beta\gamma$ und 123: bisher giebt es $2 \cdot 6^3$ Anordnungen. Ueberall aber hat I (grosser lateinischer Buchstabe) noch Nachbarn von bestimmten Sorten (II und IV, kleiner lateinischer Buchstabe und Ziffer). Man nehme jetzt die Umstellung der Sorten vor: von den Stellungen

I	I	I	I	I	I
II	II	III	III	IV	IV
III	IV	II	IV	II	III
IV	III	IV	II	III	II

sind nur drei wirklich verschieden: die sechste z. B. ist bis auf den Drehungssinn dieselbe wie die erste. Daher erhalten wir in der Tat

$$2 \cdot 6^3 \cdot 3 = 6^4 = 1296$$

verschiedene Anordnungen.

Dasselbe für mehrere Tische. Am ersten Tische sollen k_1 Gruppen sitzen, am zweiten $k_2, \ldots$, am $r$ten k_r. Setzt man zunächst die k_i als sämtlich verschieden voraus, und beschränkt man sich vorläufig auf eine beliebig festgesetzte Normalreihenfolge der einzelnen Sorten innerhalb jeder Gruppe, so erhält man das Resultat:

$$n)^{\lambda}{}_{k_1}(n-k_1)^{\lambda}{}_{k_2}(n-k_1-k_2)^{\lambda}{}_{k_3} \ldots (k_r)^{\lambda}{}_{k_r} \cdot$$
$$\cdot \frac{(k_1!)^{\lambda}}{k_1} \cdot \frac{(k_2!)^{\lambda}}{k_2} \cdot \ldots \frac{(k_r!)^{\lambda}}{k_r} = \frac{(n!)^{\lambda}}{k_1 k_2 \ldots k_r}$$

Sind unter den k_i α und β und $\gamma \ldots$ gleiche vorhanden, so haben wir aus den früher angegebenen Gründen noch durch $\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots$ zu dividiren. Der Fall, dass ein oder einige $k_i = 1$ sind, ist nicht ausgeschlossen. Lässt man endlich noch die Sorten innerhalb jeder Gruppe permutiren und zwar in jeder Gruppe und an allen Tischen gleichmässig, so erhält man, wie sofort eingehender erörtert werden soll, $\frac{(\lambda-1)!}{2}$ gleichberechtigte Fälle, sodass sich das Resultat ergiebt:

$$\begin{cases} F\lambda(k_1, k_2, \ldots k_r) = \dfrac{(n!)\lambda}{k_1 k_2 \ldots k_r} \cdot \dfrac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots} \cdot \dfrac{(\lambda-1)!}{2} \\ \lambda > 2 \end{cases} \quad (8)$$

Wir haben noch den Nachweis zu führen, dass wir hier mit $\frac{(\lambda-1)!}{2}$ und nicht wie im Falle $\lambda = 2$ mit $\frac{(\lambda-1)!}{2^{r-\tau}}$ zu multipliciren haben. Zwei Tischordnungen werden nur dann als identisch gelten, wenn jede Person an jedem Tische ihre Nachbarn beibehalten hat. Dies wird in unserem Falle nur dann erreicht sein, wenn sich die Personen an sämtlichen Tischen gleichzeitig in verkehrter Reihenfolge (oder „in entgegengesetztem Drehungssinn") anordnen. Daher würden wir, wenn wir mit $(\lambda-1)!$ multiplicirten, jede Anordnung zweimal gezählt haben; der richtige Zusatzfactor ist also $\frac{(\lambda-1)!}{2}$. Anders lag die Sache im Falle $\lambda = 2$. Dort hatten wir $r-\tau$ Tische, an denen die $k_i > 1$ waren. Wenn an einem oder mehreren dieser Tische eine Umordnung der Personen in verkehrter Reihenfolge eintrat, so wurden dadurch die übrigen unter diesen Tischen nicht mit betroffen, weil bei zwei Sorten (I und II) das Gesetz der Abwechslung in ihrer Aufeinanderfolge oder das Gesetz der bunten Reihe durch eine Umordnung gedachter Art nicht gestört wird. Die Gesamt-Tischordnung im Sinne unserer Definition blieb also dieselbe für $2^{r-\tau}$ verschiedene Sitzweisen: darum mussten wir eben nicht mit $(\lambda-1)!$, sondern mit $\frac{(\lambda-1)!}{2^{r-\tau}}$ multipliciren.

Im Falle $\lambda > 2$ hat die Verkehrung der Personenfolge an einem Tische, gleichgültig, ob dessen $k_i >$ oder $= 1$ ist, stets auch eine Umordnung an den anderen Tischen, wenn auch nur innerhalb der einzelnen Grupppen, zur Folge: denn durch die Bedingung der völlig gleichmässigen Gruppirung der λ Sorten waren die verschiedenen Tische einheitlich verbunden. Soweit nun die übrigen Tische solche sind, deren $k_i = 1$ ist, tritt an ihnen allerdings nichts Neues ein, wohl aber für alle Tische mit grösserem k_i, sodass jede Umordnung auch nur an einem Tische eine neue Gesamtordnung ergiebt. Nur der Fall, dass für sämtliche übrigen Tische oder auch für sämtliche Tische überhaupt die $k_i = 1$ sind, erfordert eine gesonderte Behandlung: dieser Fall erledigt sich aber leicht, da dann mit der vorausgesetzten Verkehrung der Reihenfolge an dem einen Tische die gleichzeitige Verkehrung an allen übrigen Tischen von selbst verbunden ist: die Bedingung, die zur Aufstellung des Factors $\frac{(\lambda-1)!}{2}$ führte, ist hier also von selbst erfüllt. — Zur Erläuterung möge

noch das Folgende dienen: an einem Tische mit $k_1 = 1$ mag die ursprüngliche Reihenfolge $A_{\alpha\ \alpha}$ umgewandelt werden in $A_{\alpha\ \alpha}$. An einem andern Tische, dessen $k_1 = 2$ oder 3 ist, geht dann die ursprüngliche Reihenfolge

$$\begin{matrix} & B & \\ b & & \gamma \\ \beta & & c \\ & C & \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} & B\delta & \\ b & & d \\ \beta & & D \\ & C\ c' & \end{matrix}$$

über in die ganz andere:

$$\begin{matrix} & B & \\ \beta & & c \\ b & & \gamma \\ & C & \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} & Bd & \\ \beta & & \delta \\ b & & D \\ & C\ \gamma\ c & \end{matrix}$$

Ebenso hat die Verkehrung der Reihenfolge an einem Tische $k_1 = 3$, nämlich

$$\begin{matrix} & {}_{\alpha}A_{3} & \\ \alpha & & \gamma c \\ 1 & & C \\ & B b \beta & 2 \end{matrix} \quad \text{in} \quad \begin{matrix} & {}_{3}A a \alpha & \\ \gamma & & 1 \\ c & & B \\ & C_{2\beta} & b \end{matrix}$$

an anderen Tischen $k_1 = 1$ und 3 die Folge, dass sich

$$\begin{matrix} & D & \\ d & & 4 \\ & \delta & \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} & {}_{l}L\gamma & \\ \lambda & & \nu \\ 5 & & n \\ M & & N \\ & m\ \mu & 6 \end{matrix}$$

umwandeln in

$$\begin{matrix} & D & \\ 4 & & d \\ & \delta & \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} & {}_{5}Ln & \\ \lambda & & \nu \\ l & & 7 \\ M & & N \\ & 6\ \mu & m \end{matrix}$$

Specialfälle: $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = \frac{n}{r}$ ergiebt:

$$F\lambda\left(\frac{n}{r}, \frac{n}{r}, \ldots \frac{n}{r}\right) = \frac{(n!)^{\lambda}}{\left(\frac{n}{r}\right)^{r} \cdot r!} \cdot \frac{(\lambda-1)!}{2} \tag{9}$$

Für $r = n$ erhält man

$$F\lambda(1, 1, \ldots 1) = (n!)^{\lambda-1} \cdot \frac{(\lambda-1)!}{2} \tag{10}$$

Beispiel. $F\lambda(1, 1) = 2^{\lambda-2} \cdot (\lambda-1)!$, d. h. für $\lambda = 3$ und $\lambda = 4$ bezüglich $= 4$ und $= 24$.

$\lambda = 3$:

A		B	
a	α	b	β

A		B	
b	α	a	β

A		B	
a	β	b	α

A		B	
b	β	a	α

$\lambda = 4$ (bloss der erste Tisch ist 8 mal dargestellt):

A		A		A		A		A		A	
a	1	a	2	a	1	b	1	a	2	b	2
α		α		β		α		β		α	

A		A	
b	1	b	2
β		β	

Jetzt treten in der ersten Anordnung $A\alpha\alpha 1$ die Umstellungen ein: $A\alpha 1\alpha$ und $A\alpha\alpha 1$; ebenso in den übrigen sieben. Andere Umstellungen, wie $A\alpha 1\alpha$, $A 1\alpha\alpha$, $A 1\alpha\alpha$ ergeben nichts Neues. Somit bestätigt sich die Formel

$$F_4(1, 1) = 24$$

Weitere Beispiele sind:

$F_3(1, 1, 1) = (3!)^2 = 36$. Erste Anordnung:

A		B		C	
a	α	b	β	c	γ

Man permutire a, b, c bloss auf ihren Plätzen und ebenso α, β, γ auf den ihrigen; Zahl der Anordnungen

$$= 6 \cdot 6 = 36$$

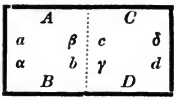
$F_4(1, 1, 1) = \frac{(3!)^4}{2} = 648$. Erste Anordnung:

A		B		C	
a	1	b	2	c	3
α		β		γ	

Man permutire a, b, c auf ihren Plätzen, ebenso α, β, γ und 1, 2, 3: bisher 6^3 Anordnungen; dann $a\alpha 1$ unter sich: Factor $\frac{3!}{2} = 3$; also in der Tat

$$3 \cdot 6^3 = 648$$

$F_3(2, 2) = \frac{(4!)^3}{2^2 \cdot 2} = 1728$. Erste Anordnung:



Man permutire a, b, c, d auf ihren Plätzen, ebenso α, β, γ, δ, ebenso B, C, D, die letzteren aber so, dass am zweiten Tisch nur B oder C den jetzt von C innegehabten Platz besetzen darf; also:

$$\frac{4!\,4!\,3!}{2} = 1728$$

Noch seien zwei Formeln erwähnt, die sich durch Vergleichung von (7), (9), (10) ergeben:

$$\frac{F\lambda(n)}{F\lambda\left(\frac{n}{r}, \frac{n}{r}, \ldots \frac{n}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{n}{r}\right)^r \cdot r!}{n} = \left(\frac{n}{r}\right)^{r-1} (r-1)!$$

$$\frac{F\lambda(n)}{F\lambda(1, 1, \ldots 1)} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

XV.

Die Willensfreiheit und der physische Determinismus.

Von

R. Hoppe.

Vor 15 Jahren hat Boussinesq in einem Artikel der Comptes Rendus t. LXXXIV. p. 362—364: „Sur la conciliation de la liberté morale avec le déterminisme scientifique" dargetan, dass die Willensfreiheit der Menschen mit keinem physikalischen Causalitätsgesetze im Widerspruch steht, und dass die Fälle freier Wahl nur vermöge gewisser Eigenschafteu der Materie in der leblosen Natur nicht vorkommen können. Der Artikel ist kurz gefasst, doch reichen die gegebenen Andeutungen hin, die nicht ausgeführte strenge Begründung erkennen zu lassen. Da die entgegengesetzte Meinung, die Willensfreiheit sei unverträglich mit durchgehender Causalität, seit Jahrhunderten eine sehr verbreitete, nur mit eilfertiger und augenfällig mangelhafter Logik verteidigte, gewiss noch nie eingehend geprüfte ist, so ist die von Boussinesq dargebotene Erledigung der Frage unstreitig von grosser Wichtigkeit, und sein Gedanke verdient mit hinreichender Ausführlichkeit ans Licht gestellt zu werden, die vielleicht nur gefehlt hat um demselben Beachtung zu verschaffen.

Indessen brauchen wir bei den genannten 2 Sätzen nicht stehen zu bleiben. Die Hauptfrage, ob die Willensfreiheit existirt, wird durch jene gar nicht in Angriff genommen. Auch in Bezug auf sie macht sich die leichtfertige Logik populär; man sagt: das vermeintliche Bewusstsein der Willeusfreiheit beruhe auf Selbsttäuschung; denn für jede Wahl gäbe es Bestimmungsgründe; fragt aber nicht danach, ob dieselben zur Entscheidung hinreichen, namentlich wenn

solche teils für, teils wider sprechen. Ein mathematischer Beweis der Existenz der Willensfreiheit lässt sich geben. Wir wollen im folgenden die drei Fragen, deren letzte sich wieder in zwei teilt, nach einander behandeln und die Antworten als Thesen voranstellen.

Ehe wir indes damit beginnen, ist es nötig den Sinn einiger Ausdrücke zu präcisiren.

1) Die Wörter „Ursache", „Causalität" gebrauchen wir nur im physikalischen Sinne. Demgemäss können Vorgänge an concreten Gegenständen durch Ursachen nur in Verbindung mit einer Epoche, d. h. einem vorausgehenden momentanen Zustande derselben Gegenstände bestimmt werden. Die Ursache ist ein dauerndes Gesetz' ihre Wirkung eine Zustandsänderung. Nur in zeitlicher Succession können Vorgänge causal verbunden sein, die gleichzeitigen sind es nicht.

2) Unter den möglichen Verbalprädicaten eines Menschen ist es schwer ein hinreichend allgemeines zu finden, das unabhängig von der Willensfreiheit verstanden würde. „Handlung" wird als activ gedeutet, „Vorgang" als passiv, und Activität unterscheidet sich nur durch die Willensfreiheit von Passivität. Da nun für eine Untersuchung über die Frage der Willensfreiheit ein Wort, welches ihr nicht vorgreift, unentbehrlich ist, so wählen wir dazu das Wort „tun". Dieses wird zwar für sich activ verstanden; doch sagt man nach einem vorausgehendem Verbum, auch wenn es ein Erleiden bedeutet: „Er tut es". Wir setzen daher fest, dass die Wörter „tun" und „Tat" hier Activität und Passivität ohne Unterschied umfassen.

Satz 1. „Die Willensfreiheit widerstreitet nicht dem ausnahmlosen causalen Zusammenhange der Vorgänge".

Ich beginne der Deutlichkeit wegen mit einem Beispiele. Es ist ohne Zweifel möglich eine undurchdringliche Fläche und einen schweren Punkt zu denken, gleichviel ob solche in der materiellen Natur existiren. Eine solche Fläche habe die Gleichungen:

$$x = \varrho\cos\varphi;\quad y = \varrho\sin\varphi;\quad \varrho = \psi - \sin\psi;\quad z = 1 - \cos\psi \qquad (1)$$

Die zAxe habe die positive Richtung der Schwerkraft. Ein Punkt von der Masse 1 bewege sich auf der Fläche, allein unter dem Einfluss seiner Schwere g. Dann sind die ersten Integrale der Bewegungsgleichungen:

$$\varrho^2\,\partial\varphi = \gamma\,\partial t \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\sin\frac{\psi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\varrho}\right)^2 = g\sin^2\frac{\psi}{2} + h \qquad (3)$$

(γ und h constant)

Nach Gl. (3) kann die Spitze $\psi = 0$ nur erreicht werden für $\gamma = 0$. Ist dann $h < 0$, so wird sie auch nicht erreicht; für $h = 0$ wird sie mit Nullgeschwindigkeit erreicht; für $h > 0$ ist die lebendige Kraft in der Spitze nicht erschöpft, der Punkt geht in der Tangente nach oben weiter und fällt auf sie zurück, ohne dass die Spitze sein Weiterfallen hindern kann. Für $h = 0$ hat man nach Gl. (3) (2):

$$\psi = \sqrt{g}(t - t_0); \qquad \varphi = \text{const}$$

und zwar sei für $t < t_0$

$$\varphi = \alpha$$

also

$$x = \varrho \cos\alpha; \quad y = \varrho \sin\alpha$$

Zur Zeit $t = t_0$ verschwinden x, y, z, ∂x, ∂y, ∂z, werden mithin unabhängig von α: folglich kann aus der ganzen Epoche der Bewegung der Wert von φ für alle Folgezeit nicht bestimmt werden. Wir können daher beliebig setzen:

$$\varphi = \beta \quad \text{für} \quad t > t_0$$
$$x = \varrho \cos\beta; \quad y = \varrho \sin\beta$$

Auf den Fall $h > 0$, wo das Analoge stattfindet, brauchen wir nicht einzugehen.

Hiermit ist gezeigt, dass das einfachste physikalische Gesetz, das der Schwerkraft, Fälle theoretisch zulässt, wo die dasselbe unabänderlich befolgende Bewegung in einzelnen Zeitpunkten sich willkürlich ändert, indem irgend welche Integrationsconstanten willkürliche andre Werte annehmen.

Es kommt nun bloss darauf an, ob etwas entgegensteht, dass der Zeitpunkt einer Willensentscheidung ein singulärer Punkt der bezeichneten Art in den physischen Vorgängen ist. Nach einem Satze der Physiologie ist jede psychische Tat, Empfindung, reflexives und äusserndes Denken, von gleichzeitigen eindeutig entsprechenden Vorgängen in den Nerven begleitet. Nur von den Organen der Empfindung und des äussernden Denkens sind Vorgänge bekannt, die des reflexiven Denkens sind es überhaupt nicht. Jede Tat aber, (Reflexion oder Gliederbewegung), die direct aus der Empfindung hervorgeht, ist unfrei, nur aus reflexivem Denken kann ein freies Wollen hervorgehen. Da die demselben entsprechenden physischen Vorgänge gänzlich unbekannt sind, so ist es klarerweise unmöglich einen Einwand gegen die Annahme zu erheben, dass sie singuläre Punkte enthalten, in denen sich die Folgen mit Erhaltung des Causalgesetzes willkürlich spalten, w. z. b. war.

Satz 2. „Der causale Determinismus der leblosen Natur wird durch den 1. Satz nicht berührt."

In der Mechanik physischer Körper kann der im Beweise zu Satz 1. gedachte Fall nicht vorkommen. Denn hier kann die Fläche (1) nur vermöge abstossender Kräfte undurchdringlich sein, während sie daselbst als indifferent betrachtet ward, und der bewegte Punkt gehört einem System von Punkten an, dessen innere Beziehungen die Unabhängigkeit von α und β aufheben würden. Handelt es sich aber um physische Vorgänge, deren Reduction auf Mechanik zur zur Zeit noch Problem ist, so gehört das Bestimmtsein der Folgen durch die Ursachen zu den Bedingungen der Lösung. Nun ist die Lösbarkeit aller physikalischen Probleme überhaupt nicht apriori verbürgt. Die mögliche Unlösbarkeit schliesst dann den Fall singularer Unbestimmtheit in sich. Folglich ist Satz 1., indem er die logische Möglichkeit singularer Unbestimmtheit innerhalb der fortbestehenden Causalität beweist, eine einfache specielle Bestätigung einer auch ohne ihn vorhandenen Ungewissheit und vermindert nicht die Berechtigung den causalen Determinismus der leblosen Natur als Antrieb zur Untersuchung vorauszusetzen, w. z b. war.

Satz 3. „Nicht alles, was Menschen tun, ist vorher bestimmt."

Wir nehmen an: zwei Menschen A und B gehen folgende Wette ein. Jeder schreibt eine Zahl auf. Nach Vergleichung soll derjenige gewonnen haben, welcher die grössere Zahl aufgeschrieben hat.

Wüsste nun A die Zahl b, welche B schreibt, so würde er eine Zahl $a > b$ schreiben. Wüsste auch B die Zahl a, welche A schreibt, so würde er eine Zahl $b > a$ schreiben. Es ergäbe sich der Widerspruch

$$a > b > a$$

Folglich ist es unmöglich, dass Jeder vorher weiss, was der Andere tun wird.

Offenbar ist nun der resultirende Widerspruch unabhängig von aller Begabung und allen Geistesfähigkeiten der zwei Beteiligten. Wäre also das, was jeder tut, notwendige Folge alles dessen, was vorhergegangen ist, so könnte man annehmen, dass A und B von allen mitwirkenden Tatsachen Kenntniss gehabt, und die notwendige Folge daraus sicher geschlossen hätten. Es ist daher ebenso unmöglich, dass die Wahl der Zahlen, welche Beide trafen, aus allem Vorhergegangenen mit Notwendigkeit hervorgieng.

Mit Anwendung auf alle Menschen und alle Zeiten folgt daraus, dass es nicht mehr als einen Menschen gegeben haben kann, dessen

sämtliches Tun determinirt wäre, und dass dieser eine längst tot sein würde.

Satz 4. „Ueber alles Tun der Menschen, welches nicht durch Ursachen vollständig bestimmt ist, entscheidet der Wille."

Die Begründung dieses Satzes ist empirisch und bedarf der Ergänzung durch eine Hypothese.

Zunächst muss ich eine Argumentation abweisen, die, so beliebt sie auch sein mag, aus irrigem und sehr verderblichem Princip hervorgeht. Wäre nämlich keine Entscheidung apriori vorhanden, so würden die Vorgänge nach Zufall eintreten. Dies scheint Vielen undenkbar, und sie halten die Unmöglichkeit damit für bewiesen. Dennoch würde die Vernunft gegen die erfolgende Tatsache nichts einzuwenden vermögen. Dadurch, dass das erkennende Subject etwas (die Ursache) bedarf, kann das Object nicht gezwungen sein sich dem Bedürfnisse gemäss zu verhalten. Jene Schlussweise ist ein Selbstbetrug, der oft als unbewusstes Vorurteil einwurzelt und gegen die offenen Bahnen der Erkenntniss blind macht.

Unser Fall lässt uns den fehlenden apriorischen Beweis nicht vermissen. Die Erfahrung gibt uns reichlich die Beantwortung unserer Frage. In unzähligen Fällen geht der Tat der Gedanke der Tat bewusstermassen voraus. Die Uebereinstimmung des Gedankens mit dem folgenden Geschehen zeigt dann die Abhängigkeit des letztern vom Gedanken. Die Zeit zwischen beiden kann beliebig kurz, mithin unmerklich sein, d. h. zur bewussten Auffassung der Succession nicht hinreichen. Gleichzeitigkeit des Gedankens mit dem gedachten Geschehen aber ist unmöglich. Denn wir denken stets, mit Ueberspringung der executiven Nerven- und Muskelvorgänge, unmittelbar an die Gliederbewegung (wenn nicht noch darüber hinaus an die Wirkung auf äussere Gegenstände); daher liegt stets zwischen dem Gedanken und der entsprechenden Ausführung durch die Glieder die Zeit der Fortpflanzung vom Gehirn bis zu den Gliedern. Der Gedanke nun, der in der genannten Beziehung zu dem ihm folgenden Geschehen steht, heisst, wofern letzteres nicht ursächlich bestimmt war, der Wille.

Hiermit ist unter Satz noch nicht vollständig bewiesen, weil noch fraglich bleibt, ob neben den durch Willen entschiedenen, es noch andre ursächlich nicht bestimmte Vorgänge geben kann, die zu keiner Entscheidung gelangen, bevor eine unerklärbare Tatsache entscheidend eintritt.

Zur Ergänzung stelle ich folgende, gewiss zulässige Hypothese auf: „Jedem singularen Punkte in den Nervenvorgängen, in welchem

die Folgen causal unbestimmt werden, entspricht in der Seele ein gesteigert klares Bewusstsein der wirklichen objectiven Umgebung des Menschen und der in dem Augenblicke erlangten Freiheit."

Dies angenommen, ist es nicht möglich, dass die erfolgende Nervenaction anders endigt als dem Gedanken entsprechend, ohne dass der Mensch es merkte, mithin würde es sich als Ausnahme von der allgemeinen Erfahrung offen darstellen.

Die Bestätigung anlangend, ist zunächst die Annahme an die Hand gegeben, dass die Gliederbewegung eines vernünftigen Wesens mit der richtigen Vorstellung von seiner Umgebung verbunden ist, weil sie Bedingung des beabsichtigten Erfolges der Bewegung ist. Eine auffallend treffende Bestätigung hat gewiss schon Mancher im halbwachenden Zustande erlebt, wo, solange noch traumhafte Vorstellungen von der Oertlichkeit in das Erwachen-wollen sich einmischen, alles Streben die Glieder zu bewegen erfolglos ist, im Augenblicke aber der Erinnerung an die wirkliche Oertlichkeit die freie Gliederbewegung und das volle Erwachen sofort eintritt.

XVI.

Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie.

Von

R. Hoppe.

Es soll zuerst das vollständige System von Regelflächen, welche eine gegebene Curve zur gemeinsamen Strictionslinie haben, analytisch dargestellt, dann das Resultat geometrisch interpretirt, und der Constructionsweg einer beliebigen Regelfläche gezeigt werden.

Gegeben sind, mit der Curve s, die Richtungscosinus der Tangente f, g, h, der Hauptnormale f', g', h', der Binormale l, m, n, der Krümmungs- und Torsionswinkel τ und ϑ.

Gesucht sind die Richtungscosinus a, b, c der Erzeugenden der Regelfläche. Bedingung dafür, dass s ihre Strictionslinie sei, ist

$$f\partial a + g\partial b + h\partial c = 0$$

Setzt man

$$\partial\nu^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 \tag{1}$$

so sind $\frac{\partial a}{\partial\nu}, \frac{\partial b}{\partial\nu}, \frac{\partial c}{\partial\nu}$ die Richtungscosinus einer Geraden L, welche auf der Tangente von s senkrecht steht, haben daher den allgemeinen Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial\nu} &= f'\cos\mu + l\sin\mu = p \\ \frac{\partial b}{\partial\nu} &= g'\cos\mu + m\sin\mu = q \\ \frac{\partial c}{\partial\nu} &= h'\cos\mu + n\sin\mu = r \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sofern μ willkürlich bleibt, sind p, q, r bekannte Grössen.

Setzt man

$$\partial w^2 = \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 \tag{3}$$

$$p_1 = \frac{q\,\partial r - r\,\partial q}{\partial w}; \quad q_1 = \frac{r\,\partial p - p\,\partial r}{\partial w}; \quad r_1 = \frac{p\,\partial q - q\,\partial p}{\partial w} \tag{4}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & \frac{\partial p}{\partial w} & \frac{\partial^2 p}{\partial w^2} \\ q & \frac{\partial q}{\partial w} & \frac{\partial^2 q}{\partial w^2} \\ r & \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial^2 r}{\partial w^2} \end{vmatrix} \tag{5}$$

so wird

$$\frac{\partial^2 p}{\partial w^2} = \Delta p_1 - p; \quad \frac{\partial^2 q}{\partial w^2} = \Delta q_1 - q; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial w^2} = \Delta r_1 - r \tag{6}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial w} = -\Delta \frac{\partial p}{\partial w}; \quad \frac{\partial q_1}{\partial w} = -\Delta \frac{\partial q}{\partial w}; \quad \frac{\partial r_1}{\partial w} = -\Delta \frac{\partial r}{\partial w}$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial w^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial w^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial w^2}\right)^2 = \Delta^2 + 1$$

Durch dreimalige Differentiation der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

erhält man vermöge der Formeln (2) (6):

$$p\,a + q\,b + r\,c = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial w} a + \frac{\partial q}{\partial w} b + \frac{\partial r}{\partial w} c = -\frac{\partial \nu}{\partial w} \tag{8}$$

$$p_1 a + q_1 b + r_1 c = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 \nu}{\partial w^2} \tag{9}$$

woraus:

$$a = -\frac{\partial p}{\partial w}\frac{\partial \nu}{\partial w} - \frac{p_1}{\Delta}\frac{\partial^2 \nu}{\partial w^2}; \quad \text{etc.} \tag{10}$$

daher:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 = \left(\frac{\partial \nu}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial w^2}\right)^2$$

integrirt:

$$\frac{\partial \nu}{\partial w} = \sin \int \Delta\,\partial w; \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial w^2} = \Delta \cos \int \Delta\,\partial w \tag{11}$$

eingeführt in die Gleichung (10):

$$a = -\frac{\partial p}{\partial w}\sin\int \Delta\,\partial w - p_1\cos\int \Delta\,\partial w; \quad \text{etc.} \tag{12}$$

Die Gleichungen der Regelfläche lauten also:

$$x_1 = x - u\left(\frac{\partial p}{\partial w}\int \Delta\,\partial w + p_1\cos\int \Delta\,\partial w\right); \quad \text{etc.} \tag{13}$$

Sei nun ψ_2 eine Curve, deren Tangente die Richtungscosinus p, q, r hat; dann ist nach Gl. (3) w ihr Krümmungswinkel und nach Gl. (5) Δ ihr Krümmungsverhältniss, das wir durch $\frac{\partial \eta}{\partial w}$ bezeichnen, daher

$$\eta + \text{const} = \int \Delta\,\partial w \tag{14}$$

ihr Torsionswinkel; ferner sind die Richtungscosinus

ihrer Hauptnormale $\frac{\partial p}{\partial w}, \frac{\partial q}{\partial w}, \frac{\partial r}{\partial w}$

ihrer Binormale p_1, q_1, r_1

Ist demnach ψ_3 parallel ψ_2, und sind $x_3 y_3 z_3$, $x_2 y_2 z_2$ entsprechende Coordinaten beider Curven, so ist

$$x_3 = x_2 - k\left[\frac{\partial p}{\partial w}\cos(\eta+\varkappa) - p_1\sin(\eta+\varkappa)\right]; \quad \text{etc}$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Gl. (12), wenn man

$$\frac{x_3 - x_2}{k} = a; \quad \text{etc.}$$

und $\varkappa + R$ an die Stelle der Constanten in Gl. (14) setzt; und zwar bedeutet k den Normalabstand der Parallelen, und es zeigt sich, dass a, b, c die Richtungscosinus ihrer gemeinsamen Normale sind.

Um also aus der Strictionslinie s die Regelfläche zu construiren, hat man erst eine beliebige Normalenfläche an s zu legen, indem man eine Gerade L an s gleiten lässt, die beständig mit der Tangente einen rechten Winkel macht, dabei aber beliebig um die Tangente rotiren kann. Diese Gerade hat dann die Richtungscosinus p, q, r. Dann beschreibt man (als Nebenfigur) eine Curve ψ_2, deren Tangente in den, den Curvenpunkten von s entsprechenden Punkten den obigen Normalen von s gleichgerichtet ist, und parallel mit ihr eine Curve ψ_3. Parallel mit der Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von ψ_2 und ψ_3 zieht man endlich durch den entsprechenden Punkt von s die Erzeugende der gesuchten Regelfläche.

Das Resultat enthält 2 willkürliche Functionen und 2 willkürliche Constanten. Zunächst ist die Rotation von L um die Tangente von s, gemessen durch die Variable μ, willkürlich. Ferner bleibt bei Bestimmung von ψ_2 durch die blosse Tangente das Linienelement $\partial\psi_2$ willkürlich. Endlich sind zur Bestimmung der Parallele ψ_3 noch 2 Constanten willkürlich festzusetzen, der Normalabstand k und der Winkel $\varkappa$ zwischen der gemeinsamen Normale und einer solchen für eine beliebig fest zu wählende Parallele ψ_0.

Von der im Vorstehenden gelösten Aufgabe sind bereits zwei Specialfälle, der eine für eine ebene, der andre für eine sphärische Strictionslinie, in einer Schrift von G. Pirondini: „Sulle superficie rigate". Battaglini G. XXV. — unter vielen andern die Regelflächen betreffenden Fragen behandelt worden.

XVII.

Miscellen.

1.

Dreiteilung jedes Winkels mittelst fester Kegelschnitte. (Dritter Artikel).

Im Anschluss an meine früheren Mitteilungen in diesem Archiv (II. Reihe, 10ter Teil, pag. 333 — 336 und pag. 441 — 442) und an eine inzwischen veröffentlichte Abhandlung [1]) wird nunmehr die Dreiteilung jedes Winkels mittelst einer festen Ellipse angegeben. Sie beruht auf folgendem Lehrsatz:

> Wenn man die eine der beiden Katheten ($CB = a$) eines rechtwinkligen Dreiecks ACB in zwölf, die andere ($CA = b$) in vier gleiche Teile teilt, durch den fünften Teilpunkt E der ersteren und den dritten Teilpunkt F der letzteren Parallele zu den Katheten legt, deren Schnittpunkt O heisse, FA durch A bis G verlängert, sodass FG die Grösse der Höhe eines über $\frac{b}{2}$ errichteten gleichseitigen Dreiecks erreicht, OB_1 und OB_2 gleich OG und OA_1 und OA_2 zu Höhen des über B_1B_2 errichteten gleichseitigen Dreiecks macht, so wird der dem Dreieck ACB umgeschriebene Kreis von der Ellipse, deren Mittelpunkt O und deren Achsen A_1A_2 und B_1B_2 sind, in C und den drei Punkten P_1, P_1 und P_3 derartig geschnitten, dass AP_1 und BP_3

1) Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Falk-Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1892. Ueber einige Lösungen des Trisectionsproblems mittelst fester Kegelschnitte. Von Wilhelm Panzerbieter. R. Gaertners Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder).

Trisectionslinien der spitzen Winkel BAC und ABC, AP_2 BP_2 Trisectionslinien der entsprechenden Nebenwinkel und MP_1 und MP_3 Trisectionslinien der Winkel BMC und AMC sind.

Beweis: Da $FO = \frac{5a}{12}$ und $FG = \frac{b\sqrt{3}}{4}$ ist, so folgt:

$$OG = \sqrt{\frac{25a^2}{144} + \frac{3b^2}{16}} = OB_1 = b_1 \quad \text{und} \quad OA_1 = b_1\sqrt{3}$$

Die halbe lineare Excentricität der Ellipse ist daher gleich $b_1\sqrt{2}$; ihre numerische Excentricität ε gleich $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Macht man OA_1 zur Xachse und OB_1 zur Yachse eines Coordinatensystems, so lautet die Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{3b_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

oder:

$$x^2 + 3y^2 = \frac{25a^2}{48} + \frac{9b^2}{16} \qquad \text{(I)}$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von O nach dem vierten Teilpunkt L der der Kathete a, so nimmt die Gleichung (I), da $x - \frac{3}{4}b$ für x und $y - \frac{a}{12}$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$x^2 - \tfrac{3}{2}bx + \frac{9b^2}{16} + 3y^2 - \frac{a}{2}y + \frac{a^2}{48} = \frac{25a^2}{48} + \frac{9b^2}{16}$$

oder:

$$2x^2 - 3bx + 6y^2 - ay = a^2 \qquad \text{(II)}$$

an, während die Gleichung des dem Dreieck ACB umgeschriebenen Kreises

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{6}\right)^2 = r^2$$

lautet und, da $r^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ ist, in

$$x^2 - bx + y^2 - \frac{a}{3}y = \frac{2a^2}{9}$$

oder:

$$3x^2 - 3bx + 3y^2 - ay = \frac{2a^2}{3} \qquad \text{(III)}$$

übergeht Durch Subtraction der Gleichung (III) von (II) ergiebt sich:

$$3y^2 - x^2 = \frac{a^2}{3}$$

oder:

$$y^2 - \tfrac{1}{3}x^2 = \frac{a^2}{9} \qquad \text{(IV)}$$

Da nun die Coordinaten der Schnittpunkte der Ellipse und des Kreises auch der Gleichung (IV) genügen müssen und diese letztere eine der beiden Hyperbeln ($\varepsilon = 2$) darstellt, deren Schnittpunkte mit dem Kreise nach den früheren Mitteilungen die Bogen der Centriwinkel 2α und 2β, $180^0 - 2\alpha$ und $180^0 - 2\beta$ etc. trisecciren (wenn α und β die spitzen Winkel BAC und ABC bedeuten), so ist hiermit der obige Lehrsatz bewiesen.

Aus demselben ergiebt sich folgende (weniger einfache) Construction für die Dreiteilung jedes beliebigen (concaven) Winkels 2β mittelst der festen Ellipse $O'(\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}})$:

Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck QRS mit dem spitzen Winkel $RQS = \beta$, mache $RT = \frac{5RS}{12}$ und $RU = \frac{RQ}{4}\sqrt{3}$, construire das dem Dreieck URT ähnliche Dreieck WRZ, dessen Hypotenuse die Länge der halben kleinen Achse $O'B_1'$ hat und ziehe durch Z die zu SQ parallele Gerade ZN. Alsdann trage man die Kathete RN auf der Hauptachse der Ellipse von A_2' bis K und die andere Kathete RZ auf der Scheiteltangente als $A_2'H$ ab, verlängere diese durch A_2' bis J, sodass $A_2'J = \frac{1}{5}A_2'H$ wird, lege durch H und J Parallele zur Hauptachse, bis erstere die Ellipse in C, letztere die durch C zu HK gelegte Parallele in M schneidet. und schlage um M mit dem Radius MC den Kreis. Dieser trifft den Schenkel des an JM in M anzutragenden Winkels β in A und die Ellipse in einem zwischen A und C liegenden Punkte P_3, für welchen Wkl. $AMP_3 = \frac{1}{3}$ Wkl. $AMC = \frac{2\beta}{3}$ ist. Für die beiden anderen Schnittpunkte P_2 und P_1 ist Wkl. $AMP_2 = \frac{1}{3}(360^0 - 2\beta)$ und Wkl. $AMP_1 = \frac{1}{3}(360^0 + 2\beta)$.

Wilhelm Panzerbieter.

2.

Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken.

Auf 2 Geraden G, H seien vom Schnittpunkt P aus 2 Strecken a, b je 2mal in gleicher Richtung abgetragen, so dass

$$PQ = QS = a \text{ (auf } G); \quad PR = RT = b \text{ (auf } H)$$

wird. Die Verbindungsgeraden QT und RS schneiden sich in M. Dann ist M zunächst Schwerpunkt des Dreiecks PST.

Jetzt trage man ferner auf G von Q aus nach beiden Seiten hin die Strecke $QA = QC = m$ und von R aus nach beiden Seiten hin die Strecke $RB = RD = n$ ab. Dann ist M auch Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$.

Indem m und n unabhängig variiren, erhält man ein System von Vierecken mit gemeinsamem Schwerpunkt. Durch Vertauschung der Seiten des Dreiecks AST ergeben sich 3 analoge Systeme. Das Gesamtsystem ist bestimmt, wenn das Dreieck gegeben ist.

Sei jetzt M allein gegeben; dann ziehe man durch M beliebig QT, nehme die Strecke MQ beliebig und mache $MT = 2MQ$, ziehe durch Q beliebig PS und trage die beliebige Strecke $a = QP = QS$ nach beiden Seiten auf. Dann hat man das allgemeinste Dreieck PST und construirt daraus nach dem Vorigen das allgemeinste Viereck mit dem Schwerpunkt M.

Zur analytischen Darstellung sei M Anfang der xy, ferner α und β die Richtungswinkel von QT und QS gegen die x, ferner $QM = c$, $QS = a$. Dadurch ist der Richtungswinkel φ von PT schon bestimmt, und man hat, indem man von M aus den Linien der Figur folgt, unmittelbar die Coordinaten der 4 Ecken:

(für A) $x = -c\cos\alpha - m\cos\beta$; $y = -c\sin\alpha - m\sin\beta$
(für C) $x = -c\cos\alpha + m\cos\beta$: $y = -c\sin\alpha + m\sin\beta$
(für B) $x = \frac{1}{2}c\cos\alpha - \frac{1}{2}a\cos\beta - n\cos\varphi$; etc.
(für D) $x = \frac{1}{2}c\cos\alpha - \frac{1}{2}a\cos\beta + n\cos\varphi$; etc.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3c\sin\alpha + a\sin\beta}{3c\cos\alpha + a\cos\beta}$$

R. Hoppe.

XVIII.

Beiträge zur Lehre von der n-fachen Mannigfaltigkeit.

Von

H. Kühne.

Es ist in neuerer Zeit vielfach der Versuch gemacht worden, Lehrsätze der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern, und man ist hierbei zu Ergebnissen gekommen, die nicht nur für die Mannigfaltigkeitslehre selbst von Interesse sind, sondern sich auch darin als von Wichtigkeit erweisen, dass sie das Specielle erkennen lassen, welches der Ebene und dem Raum als 2- bzw. 3-facher Mannigfaltigkeit anhaftet. Einen Versuch in eben dieser Richtung stellt die nachfolgende Arbeit dar. Sie giebt im wesentlichen eine Verallgemeinerung einiger aus der Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen bekannten Sätze, denen sich zum Schluss einige Betrachtungen über die conforme Abbildung in der n-fachen Mannigfaltigkeit anreihen.

Von den mir bekannten Arbeiten handelt eine Abhandlung des Herrn Schlegel: Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions. Bull. S. M. Fr. X über denselben Gegenstand, doch geschieht die dort an gegebene Verallgemeinerung in einer etwas anderen Richtung. Inbezug auf die Betrachtungen über conforme Abbildung bemerke ich, dass ich mich eng an die Untersuchungen Liouvilles, die er in einer Anmerkung zu Monge, Applications de l'analyse à la géométrie veröffentlicht hat, angelehnt habe. Dort befindet sich das von uns bewiesene Theorem für den Raum abgeleitet.

Was die Bezeichnungsweise anbetrifft, so werde ich mich eng an die Bezeichnungen des Herrn Professor Kronecker, wie er sie in seiner Vorlesung über Determinantentheorie zu gebrauchen pflegte, anschliessen. Da ich mich ferner auf diese Vorlesung häufig zu stützen habe, so mache ich mit Vergnügen von der gütigen Erlaubniss des Herrn Professors Gebrauch, die Hauptsachen des über Mannigfaltigkeitslehre in jener Vorlesung Vorgetragenen in Kürze anzuführen: das soll in den §§ 1—3 geschehen. Zugleich verfehle ich nicht, an dieser Stelle meinen tiefgefühlten Dank gegen Herrn Prof. Kronecker für die gütige Erlaubniss im besondern, sowie für die Anregung und freundliche Förderung, die er mir bei dieser Arbeit hat zuteil werden lassen, im allgemeinen auszusprechen, und ferner meinem lebhaften Bedauern Ausdruck zu verleihen, dass es mir nicht vergönnt gewesen ist, ihm diese Arbeit veröffentlicht zu überreichen.

Es sei noch bemerkt, dass der besseren Uebersichtlichkeit wegen und um die Analogie mit Bekanntem schärfer hervortreten zu lassen, die Arbeit in Paragraphen eingeteilt ist, an deren Spitze, wenn tunlich, die Lehrsätze angegeben sind, deren Verallgemeinerung der betreffende Paragraph enthält.

§ 1.

Wie in der Ebene ein Punkt durch 2, im Raume durch 3 Abmessungen bestimmt wird, die man Coordinaten nennt, so, wollen wir sagen, bestimmen n Grössen — mit x_h ($h = 1, 2 \ldots n$) seien sie bezeichnet — einen Punkt in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, und alle Punkte dieser Mannigfaltigkeit werden erhalten, indem man den x_h, die wir auch hier Coordinaten nennen wollen, alle möglichen reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ giebt. Bestehen zwischen den x_h $n - \nu$ von einander unabhängige Gleichungen, oder sind alle x_h durch ν unabhängige Veränderliche ausgedrückt, so können nur ν der x_h beliebig gewählt werden, dadurch sind die übrigen bestimmt. Dabei werden aus sämtlichen Punkten der n-fachen Mannigfaltigkeit bestimmte ausgesondert, wir wollen sagen: alle diese Punkte liegen auf einer aus der n-fachen herausgeschnittenen ν-fachen Mannigfaltigkeit, und wir erklären die gegebenen Gleichungen als die Gleichungen dieser Mannigfaltigkeit. Sind diese Gleichungen linear, so nennen wir die Mannigfaltigkeit eben. Der Einfachheit halber, wollen wir eine ebene ν-fache Mannigfaltigkeit eine $\mathfrak{M}_\nu$, eine beliebige eine M_ν nennen.

Nach diesen Erklärungen ist die Gleichung einer $\mathfrak{M}_{n-1}$, die der Ebene im Raume, der Geraden in der Ebene entspricht,

$$\sum_r c_r x_{pr} = 0 \qquad (r = 0, 1 \ldots n)$$

wobei $x_{pr} (r = 1, 2 \ldots n)$ die laufenden Coordinaten sein sollen und $x_{p0} = 1$ ist. Diese Gleichung enthält insofern eine Unbestimmtheit, als sie noch mit einem beliebigen Factor multiplicirt werden kann. Wählen wir diesen Factor als den reciproken Wert der positiven Quadratwurzel aus $\sum_{r=1}^{n} c_r'^2$, so erhalten wir die Form:

$$c_0 + \sum_{r=1}^{n} c_r x_{pr} = 0$$

mit der Bedingung

$$\sum_{r=1}^{n} c_r^2 = 1$$

Diese Form wollen wir als die Normalform der Gleichung einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnen.

Haben wir zwei $\mathfrak{M}_{n-1}$:

$$f = \sum_r c_r x_{pr} + c_0 = 0 \qquad \left(\sum_r c_r^2 = \sum_r c_r'^2 = 1, \right.$$
$$f' = \sum_r c_r' x_{pr} + c_0' = 0 \qquad \left. r = 1, 2 \ldots n \right)$$

so sei der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} c_r c_r'$$

als der Correlationsfactor der beiden $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnet; wir schreiben:

$$\operatorname{cor}(f, f') = \sum_{r=1}^{n} c_r c_r'$$

Der Correlationsfactor entspricht dem cosinus des Neigungswinkels zweier Ebenen im Raume, zweier Geraden in der Ebene. Er liegt wie dieser zwischen -1 und $+1$, was man aus der folgenden Ungleichung sieht:

$$2(1 \mp \operatorname{cor}(f, f')) = \sum_r c_r^2 + \sum_r c_r'^2 \mp 2 \sum_r c_r c_r' = \sum_r (c_r - c_r')^2 > 0$$

Weiter erklären wir in der $\mathfrak{M}_n$ als den Abstand zweier Punkte, deren Coordinaten x_{1r} bzhw. x_{2r} seien $(r = 1, 2 \ldots)$, den Ausdruck:

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{n} (x_{1r} - x_{2r})^2}$$

Soll die Form dieses Ausdrucks erhalten bleiben, wenn wir die Coordinaten $x_h (h = 1, 2 \ldots n)$ linear durch andre $\xi_h (h = 1, 2 \ldots n)$

ausdrücken, oder mit andern Worten, um in Analogie zu Raum und Ebene zu reden, nehmen wir eine Coordinatentransformation vor, so ist notwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der Transformation:

$$x_h = a_h + \sum_k a_{hk}\,\xi_k \qquad (h,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n)$$

den Bedingungen genügen

$$\sum_h a_{hi}\,a_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n)$$

wobei $\delta_{ik} = 1$ ist für $i = k$, und $= 0$ für $i \gtrless k$. Es sei noch hierbei bemerkt, dass durch Coordinatentransformation sich die Gleichungen jeder $\mathfrak{M}_\nu$ auf die Form

$$x_s = 0 \qquad (s = \nu + 1\ .\ .\ .\ n)$$

bringen lassen, und dass Eigenschaften, die von dem Abstand von Punkten abhangen, und die sich für diese specielle Form der Gleichungen leicht erweisen lassen, ohne weiteres auch für die allgemeine Form der Gleichungen als giltig angesehen werden können.

Ferner erklären wir als den Abstand eines Punktes von einer $\mathfrak{M}_\nu$ den kürzesten unter den Abständen aller Punkte der $\mathfrak{M}_r$ von dem gegebenen Punkte. Es sei zunächst $\nu = n-1$ und der gegebene Punkt (x_{or}) $(r = 1, 2\ .\ .\ .\ n)$; die Gleichung von $\mathfrak{M}_{n-1}$ in der Normalform:

$$c_0 + \sum_r c_r x_{pr} = 0 \quad (r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Die Bedingung, dass der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} (x_{pr} - x_{or})^2$$

ein Minimum werden soll, ergiebt dann die Gleichung:

$$x_{ph} - x_{oh} = -\,c_h \sum_{r=0}^{n} c_r\,x_{or} \qquad (x_{or} = 1,\ h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Mithin ist die Entfernung des Punktes von der $\mathfrak{M}_{n-1}$

$$((x_{or}),\ \mathfrak{M}_{n-1}) = \sqrt{\Big(\sum_{r=0}^{n} c_r\,x_{or}\Big)^2 \sum_{h=1}^{n} c_h^{\,2}}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} c_r\,x_{or} = c_0 + \sum_{r=1}^{n} c_r\,x_{or}$$

Dieser Ausdruck liefert also, abgesehen vom Zeichen, den Abstand des Punktes von der $\mathfrak{M}_{n-1}$, wie in der Ebene und im Raume

Wir wollen nun in weiterer Analogie zu Ebene und Raum homogene Coordinaten von Punkt und $n-1$-facher Mannigfaltigkeit einführen. Dazu seien $n+1$ Punkte in der $\mathfrak{M}_n$ gegeben, gekennzeichnet durch die Zahlen $0, 1 \ldots n$. Die Coordinaten des Punktes g seien ξ_{gh} $(h = 1, 2 \ldots)$. Diese $n+1$ Punkte bestimmen in der $\mathfrak{M}_n$ ein Gebilde, das dem Dreieck in der Ebene, dem Tetraeder im Raume entspricht, wir wollen es Prismatoid nennen. Nun stellen wir uns zunächst die Aufgabe, die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$ zu bestimmen, welche alle Eckpunkte des Prismatoides, mit Ausnahme des Punktes k enthält. Zu diesem Zwecke betrachten wir das System

$$(\xi_{gh}) \quad (g, h = 0, 1 \ldots n; \qquad \xi_{go} = 1)$$

dessen Determinante sei Δ, ferner die zu ξ_{gh} gehörige Subdeterminante Δ_{hg}. Dann ist die Gleichung

$$\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk} = 0$$

die verlangte Gleichung der $\mathfrak{M}_{n-1}$, denn für

$$x_{ph} = \xi_{ik}$$

wird der Ausdruck linker Hand

$$= \delta_{ik} \Delta, \quad \text{also}$$

$$= 0 \quad \text{für} \quad i \gtrless k \quad \text{und} \quad = \Delta \quad \text{für} \quad i = k$$

Diese Gleichung hat aber noch nicht die Normalform, diese ist:

$$\frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk}}{\Theta_k} = 0$$

wobei

$$\Theta_k^2 = \sum_{h=1}^{n} \Delta_{hk}^2 \quad \text{ist.}$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes x_{ph} von dieser $\mathfrak{M}_{n-1}$ ist dann gemäss dem Vorhergehenden

$$= \frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{ik}}{\Theta_k}$$

Nun erklären wir als homogene Coordinaten eines Punktes die Verhältnisse der Abstände dieses Punktes und eines Eckpunktes des Prismatoides von der $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle Eckpunkte mit Ausnahme dieses einen enthält. Bezeichnen wir die homogenen Coordinaten mit u_{pk}, so ist also

$$u_{pk} = \frac{\sum_{h=0}^{r} x_{ph} \Delta_{hk}}{\Theta_k} : \frac{\sum_{h=0}^{n} \xi_{kh} \Delta_{hk}}{\Theta_k} = \frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk}}{\Delta}$$

Setzen wir abkürzungsweise noch

$$\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk} = \Delta_p{}^{(k)}$$

so kommt:

$$u_k = \frac{\Delta_p{}^{(k)}}{\Delta} \quad (k = 0, 1 \ldots n)$$

Wir schreiten nun sofort zur Einführung der homogenen Coordinaten einer $\mathfrak{M}_{n-1}$, und wir erklären sie als die Verhältnisse der Abstände jedes Grundpunktes von der gegebenen $\mathfrak{M}_{n-1}$ und derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle anderen Grundpunkte enthält. Die gegebene $\mathfrak{M}_{n-1}$ sei bestimmt durch n Punkte

$$x_{ih} \quad (i = 0, 1 \ldots f-1, f+1 \ldots n; \quad h = 1, 2 \ldots n)$$

ferner seien

$$x_{fh} \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

beliebige Grössen, D_{hg} die im System

$$(x_{gh}) \quad (g, h = 0, 1 \ldots n)$$

zum Element x_{gh} gehörige Subdeterminante, so ist die Gleichung der gegebenen $\mathfrak{M}_{n-1}$ in der Normalform:

$$\frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} D_{hf}}{S_f} = 0$$

dabei

$$S_f{}^2 = \sum_{r=1}^{n} D_{rf}{}^2$$

Mithin ergiebt sich, wenn U_{fk} $(k = 0, 1 \ldots n)$ die homogenen Coordinaten der $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnen, nach der Erklärung:

$$U_{fk} = \frac{\sum_{h} \xi_{kh} D_{hf}}{S_f} : \frac{\sum_{h} \xi_{kh} \Delta_{hk}}{\Theta_k} \quad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

oder, wenn

$$\sum_{h=0}^{n} \xi_{kh} D_{hf} = D_f{}^{(k)}$$

gesetzt wird

$$U_{fk} = \frac{D_f{}^{(k)} \Theta_k}{S_f \Delta} \quad (k = 0, 1 \ldots n)$$

Es ist bekannt, dass zwischen den im Raume und in der Ebene

angewendeten homogenen Coordinaten Gleichungen bestehen; es handelt sich darum, die entsprechenden Beziehungen auch für die n-fache Mannigfaltigkeit festzustellen. Für einen Punkt gilt zunächst:

$$\sum_k u_{pk} = \frac{1}{\Delta} \sum x_{ph} \Delta_{hk} = \frac{1}{\Delta} \sum_{h,k} x_{ph} \xi_{ko} \Delta_{hk} = \frac{1}{\Delta} \sum_h x_{ph} \delta_{oh} \Delta$$

$$(h, k = 0, 1 \ldots n)$$

$$= x_{ko} = 1, \quad \text{also}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_{pk} = 1$$

Die zwischen den homogenen Coordinaten einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ bestehende Beziehung ergiebt sich nach einiger Rechnung leicht als

$$\sum_{i,k} U_{fi} U_{fk} \cos(\varphi_i, \varphi_k) = 1 \quad (i, k = 0, 1 \ldots n)$$

wobei φ_i die durch die Grundpunkte $0, 1 \ldots i-1, i+1, \ldots n$ gelegte $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnet.

§ 2.

Es ist bekannt, dass der Inhalt eines Dreiecks bzhw. Tetraeders durch die Determinante

$$| x_{ik} | \ (i, k = 0, 1, 2 \text{ bzhw. } 0, 1, 2, 3, \quad x_{io} = 1)$$

geliefert wird, er ist nämlich gleich dieser Determinante dividirt durch 2! bzhw. 3! Wir werden nun zeigen, dass in einer $\mathfrak{M}_n$ der Inhalt eines Prismatoides

$$= \frac{1}{n!} | x_{ik} | \ (i, k = 0, 1 \ldots n; \quad x_{io} = 1)$$

ist. Ist

$$\sum_h D_{hk} x_{ph} = D_p^{(k)} \quad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

so ist, wie wir oben gesehen hatten:

$$D_p^{(k)} = 0$$

die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle Eckpunkte des Prismatoides mit Ausnahme des Punktes k enthält. (Die Eckpunkte seien (x_{hk}) $(h, k = 0, 1 \ldots n)$). Diese $\mathfrak{M}_{n-1}$ kann aber auch dargestellt werden durch die Gleichung

$$f_k = -\frac{D_p^{(k)}}{D} = 0, \quad D = | x_{ik} | \ (i, k = 0, 1 \ldots n)$$

Für den Punkt (x_{kk}) $(h = 0, 1 \ldots n)$ wird

$$f_k = -1$$

Da nun die $\mathfrak{M}_{n-1}$ sämtliche Punkte der $\mathfrak{M}_n$, für welche $f_k < 0$ ist, von denen scheidet, für welche $f_k > 0$ ist, so können wir sagen: der Punkt k liegt auf der negativen Seite der $\mathfrak{M}_{n-1}$:

$$f_k = 0$$

Nun ist

$$\sum_k f_k = -\sum_{h,k} \frac{x_{ph} D_{hk}}{D} = -\frac{1}{D} \sum_{h,k} x_{ph} D_{hk} x_{ko}$$

$$= -\frac{1}{D} \sum_h x_{ph} \delta_{ok} D = -x_{po} = -1 \quad (h,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

und das gilt für jeden beliebigen Punkt.

Daraus ergiebt sich ohne weiteres, dass es keinen Punkt giebt, für welchen alle $f_k > 0$ sind; es giebt aber sehr wol Punkte, für welche alle $f_k < 0$ sind, da aber die Summe der $f_k = -1$ sein soll, giebt es nur ein einziges Gebiet solcher Punkte, während bei allen übrigen der im ganzen 2^{n+1} möglichen Zeichencombinationen der f_k die entsprechenden Gebiete unendlich sind. Das endliche Stück der $\mathfrak{M}_n$ wird also erklärt durch die Ungleichungen

$$f_k < 0 \quad (k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

und wir wollen nun in Analogie zu Ebene und Raum das Integral

$$\int dx_{p1}\, dx_{p2}\ .\ .\ .\ dx_{pn}$$

erstreckt über alle Werte der x_{pk}, welche obigen Ungleichungen genügen, als den Inhalt des aus den Punkten (x_{ih}) $(i = 0, 1\ .\ .\ .\ n)$ gebildeten Prismatoides nennen. Zur Ermittelung dieses Integrals verfahren wir folgendermassen. Es ist:

$$-\sum_k x_{kg} f_k = \sum_k x_{kg} \frac{D_p^{(k)}}{D} = \sum_{h,k} x_{kg} x_{ph} \frac{D_{hk}}{D} = \sum_h x_{ph} \delta_{hg}$$

$$(h,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$= x_{pg}$$

Daraus folgt ohne Weiteres

$$x_{pg} - x_{og} = -\Sigma (x_{kg} - x_{og}) f_k \quad (g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$\frac{\partial x_{pg}}{\partial f_k} = -(x_{kg} - x_{og}) \qquad (g,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

und

$$\left\| \frac{\partial x_{pk}}{\partial f_i} \right\| = \| x_{ik} - x_{ok} \| = \| x_{gh} \| \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ g,\ h = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int dx_{p1} \ldots dx_{pn} = \int \left\| \frac{\partial x_{pk}}{\partial f_i} \right\| df_1 \ldots df_n$$

also kommt, wenn wir den Inhalt des Prismatoides mit J bezeichnen:

$$J = \| x_{ik} - x_{ok} \| \int df_1 \ldots df_n = \| x_{gh} \| \int df_1 \ldots df_n$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2 \ldots n \\ g,\ h = 0,\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

mit den Bedingungen

$$-1 < \sum_k f_k < 0, \quad f_k < 0$$

Hierfür bestimmt sich das Integral

$$\int df_1 \ldots df_n \quad \text{als} \quad \frac{1}{n!}$$

sodass wir erhalten

$$J = \frac{1}{n!} \| x_{ik} - x_{ok} \| = \frac{1}{n!} \| x_{gh} \| \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2 \ldots n \\ g,\ h = 0,\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Wir wenden uns nun zu Untersuchungen über die Beziehungen von Inhaltsdeterminanten zu gewissen aus den Verbindungsstrecken je zweier Punkte gebildeten Determinanten. Es seien (x_{ok}), (ξ_{ok}) $(k = 1,\ 2 \ldots n)$ zwei Punkte der $\mathfrak{M}_n$, ferner (x_{ik}), (ξ_{ik}) $(i,\ k = 1,\ 2 \ldots n)$ weitere $2n$ Punkte, welche zu den beiden ersten in den Beziehungen stehen:

$$\sum_k (x_{ik} - x_{ok})^2 = r^2$$

$$\sum_k (\xi_{ik} - \xi_{ok})^2 = \varrho^2 \qquad (i,\ k = 1,\ 2 \ldots n)$$

Diese Gleichungen können wir als die Bedingungen dafür erklären, dass die Punkte (x_{ik}), $(i = 1,\ 2 \ldots n)$ bzhw. (ξ_{ik}) auf einer sphärischen Mannigfaltigkeit liegen, deren Mittelpunkte (x_{ok}) bzhw. (ξ_{ok}) sind, unter sphärischer Mannigfaltigkeit dabei die einer Kugel im Raume entsprechende Mannigfaltigkeit verstanden. Wir setzen nun

$$\sum_h (x_{ih} - \xi_{kh}) = s_{ik}^2 \quad (h,\ i,\ k = 0,\ 1 \ldots n)$$

und erklären c_{ik} durch die Gleichung

$$\sum_h (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) = s_{io} s_{ok} c_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2 \ldots n)$$

Betrachten wir jetzt die Determinante

$$| s_{ik} - t | \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

diese ist

$$= | s_{ik}^2 | + t \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

oder

$$= | s_{ik} | + t S_n$$

wobei die Bedeutung von S_n klar ist. Wird

$$t = r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2$$

gesetzt, so geht diese Gleichung über in

$$| s_{ik}^2 - r^2 - \varrho^2 + s_{00}^2 | = | s_{ik}^2 | + t S_n \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Weiter ist aber

$$s_{ik}^2 - r^2 - \varrho^2 + s_{00}^2 = \sum_h \{(x_{kh} - \xi_{kh})^2 - (x_{ih} - x_{oh})^2 - (\xi_{kh} - \xi_{oh})^2 + (x_{oh} - \xi_{oh})^2\}$$
$$= -2 \sum_h (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) = -2 s_{io} s_{ok} c_{ik}$$

Mithin kommt:

$$| s_{ik} - r^2 - \varrho^2 + s_{00}^2 | = (-2)^n | x_{ih} - \xi_{ok} \| \xi_{ik} - x_{ok} |$$
$$= (-2)^n \Pi (s_{ko} s_{ok}) | c_{ik} |$$
$$(l, k = 1, 2 \ldots n)$$

also schliesslich

$$| s_{ik}^2 | + (r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2) S_n = (-2)^n | x_{ik} - \xi_{ok} \| \xi_{ik} - x_{ok} |$$
$$= (-2)^n \Pi (s_{ko} s_{ok}) | c_{ik} |$$

Diese Gleichung specialisiren wir nun, indem wir setzen:

$$x_{ok} = \xi_{ok} = 0; \qquad r = \varrho$$

$$x_{in} = r + \frac{a_i}{r}, \quad \xi_{in} = r + \frac{\alpha_i}{r}$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n)$$

so werden die Bedingungen, dass die Punkte (x_{ih}), (ξ_{ih}) $(i, h = 1, 2 \ldots n)$ auf einer sphärischen Mannigfaltigkeit liegen

$$\sum_g x_{ig}^2 + 2a_i + \frac{a_i^2}{r^2} = \sum_g \xi_{ig}^2 + 2\alpha_i + \frac{\alpha_i^2}{r^2} = 0$$
$$(g = 1, 2 \ldots n-1; \qquad i = 1, 2 \ldots n)$$

ferner wird:

$$s_{oo} = 0$$

$$s_{ko}^2 = \sum_{g=1}^{n} x_{kg}^2 = r^2, \quad s_{ok}^2 = \sum_{g=1}^{n} \xi_{kg}^2 = r^2$$

$$s_{ik}^2 = \sum_{g=1}^{n-1} (x_{ig} - \xi_{kg})^2 + \left(\frac{a_i - \alpha_i}{r}\right)^2$$

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} \frac{x_{ih}\,\xi_{kh}}{r^2} \qquad (i,\ k = 12\ .\ .\ .\ n)$$

Mit Benutzung hiervon folgt

$$(-2)^n \mid x_{ik} \mid \mid \xi_{ik} \mid = \mid s_{ik}^2 \mid + 2r^2 S_n$$

oder

$$(-2)^n \frac{\mid x_{ik} \mid}{r} \frac{\mid \xi_{ik} \mid}{r} = \frac{\mid s_{ik}^2 \mid}{r^2} + 2S_n \qquad (i,\ k = 12\ .\ .\ .\ n)$$

Nun ist

$$\frac{\mid x_{ik} \mid}{r} = \left| x_{i1},\ x_{i2},\ .\ .\ .\ x_{in-1},\ 1 + \frac{a_i}{r^2} \right|$$

$$= \mid x_{ih} \mid + \frac{1}{r^2} \mid x_{i1}\ .\ .\ .\ x_{in-1} a_i \mid \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n \\ h = 1, 2\ .\ .\ .\ n-1, 0 \end{pmatrix}$$

entsprechend wird $\frac{\mid \xi_{ik} \mid}{r}$. Gehen wir jetzt für $r = \infty$ zur Grenze über, so wird obige Gleichung:

$$(-2)^n \mid x_{ih} \parallel \xi_{ih} \mid = 2S_n \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ r \\ h = 0, 1\ .\ .\ .\ n-1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir hierin $n+1$ an die Stelle von n und bezeichnen die Punkte $(x_{n+1,h})$ und $(\xi_{n+1,h})$ mit x_{oh} bzw. ξ_{oh}, so wird

$$s_{ik}^2 = \sum_h (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 0, 1\ .\ .\ .\ n \\ h = 1, 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

und

$$-(-2)_n \mid x_{ik} \parallel \xi_{ik} \mid \begin{vmatrix} 0\ .\ .\ .\ 1 & .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ & \\ 1\ .\ .\ .\ s_{ik}^2 & .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ & \end{vmatrix}$$

Nun bestehen zwar zwischen den x_{ih} und ξ_{ih} noch die Bedingungen

$$\sum_h x_{ih}^2 + 2a_i = \sum_h \xi_{ih} + 2\alpha_i = 0$$

da aber a_i und α_i ganz beliebig sind, so bestehen in der Tat zwischen den x und ξ keinerlei Beziehungen. Mithin gilt die Formel

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \parallel \xi_{ik} \mid = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

ganz allgemein.

Wir wollen den Gang, den wir zur Herleitung dieser zwischen den Inhalten zweier Prismatoide (denn die Determinante $\mid x_{ik} \mid$ $(i, k = 0, 1 \dots n)$ lieferte ja den Inhalt) und den Entfernungen je zweier ihrer Eckpunkte bestehenden Relation eingeschlagen haben, in Kürze für den dreidimensionalen Raum noch einmal vorführen, um ihn so dem Verständniss näher zu bringen. Wir nehmen zunächst zwei Kugeln und auf deren Oberfläche je 3 Punkte und entwickeln eine Beziehung, die zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte und den Entfernungen je zweier besteht. Dann lassen wir die Kugeln zusammenfallen und den Radius unendlich werden, doch so, dass dabei die Entfernungen der einzelnen Punkte endlich bleiben. Die Punkte kann man nun als in einer Ebene liegend betrachten und die vorher abgeleitete Relation liefert die bekannte Beziehung zwischen den Inhalten zweier Dreiecke und den Verbindungsstrecken je zweier ihrer Eckpunkte.

Setzen wir in der Gleichung

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \parallel \xi_{ik} \mid = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

nach

$$x_{i,\nu+r} = \xi_{i,\nu+r} = 0 \qquad (r > 0)$$

betrachten wir also mit andern Worten zweimal $n+1$ Punkte einer ν-fachen Mannigfaltigkeit, so verschwinden die Inhaltsdeterminanten mithin verschwindet auch die aus den Verbindungsstrecken gebildete Determinante rechter Hand.

Identificiren wir das System der ξ mit dem der x, so geht obige Gleichung über in

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \mid^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1, 2 \dots n)$$

oder

$$-(-2)^2(n!\,J)^2 = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} \qquad (i,\ k = 0,\ 1 \ldots n)$$

wobei J wie oben den Inhalt des aus den Punkten (x_{ih}) $(i = 0,\ 1 \ldots n)$ gebildeten Prismatoides bezeichnet. Rücken die $n+1$ Punkte in eine niedere Mannigfaltigkeit als die n-fache zusammen, so verschwindet die Inhaltsdeterminante und folglich auch die rechter Hand stehende Streckendeterminante.

Setzen wir ferner in der zuerst abgeleiteten Gleichung

$$|\, s_{ik}^2 \,| + (r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2) S_n = (-2)^n \,|\, x_{ik} - \xi_{0k} \,||\, \xi_{ik} - x_{0k} \,|$$
$$(i,\ k = 1,\ 2 \ldots n)$$

$n+1$ an die Stelle von n und bezeichnen die Punkte $(x_{n+1,h})$; $(\xi_{n+1,h})$ mit (x_{0h}) bzhw. (ξ_{0h}), lassen zu gleicher Zeit die vorher mit (x_{0h}), (ξ_{0h}) bezeichneten Grössen verschwinden, setzen dann

$$x_{in+1} = \xi_{in+1} = 0 \quad (i = 0,\ 1 \ldots n), \quad r = \varrho$$

d. h. betrachten wir in einer n-fachen Mannigfaltigkeit zweimal $n+1$ Punkte, die auf einer um den Nullpunkt construirten sphärischen Mannigfaltigkeit mit dem Radius r liegen, so kommt:

$$|\, s_{ik} \,| + 2r^2 \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = 0 \quad (i,\ k = 0,\ 1 \ldots n)$$

Identificiren wir nun noch das System der ξ mit dem der x, so liefert die resultirende Formel:

$$r^2 = -\frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}}{|\, s_{ik}^2 \,|} \qquad (i,\ k = 0,\ 1 \ldots n)$$

den Radius derjenigen sphärischen Mannigfaltigkeit, die durch alle Eckpunkte eines in der $\mathfrak{M}_n$ liegenden Prismatoides geht, ausgedrückt durch die Verbindungsstrecken je zweier Ecken. Im Nenner des Ausdrucks steht diejenige Streckendeterminante, welche den Inhalt bestimmt.

Was nun die Grössen c_{ik} betrifft, die wir oben eingeführt haben, so sieht man, dass sie zur Herleitung der von uns benutzten Resultate nicht nötig gewesen wären, ihre Einführung ist aber doch geschehen, weil sie Grössen von der Art sind, wie wir sie Correlationsfactoren genannt haben und die für Raum und Ebene Richtungscosinus werden. Lassen wir die Mannigfaltigkeit, in der die Punkte liegen, auf eine niedre zusammenschrumpfen, so sieht man sofort, dass die Determinante

$$| c_{ik} | \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

verschwindet. Diese Bedingung ist die Verallgemeinerung derjenigen interessanten Beziehung die zwischen den Richtungscosinus von vier (oder mehr) von irgend einem Punkt ausgehenden Strahlen besteht.

Wir hatten gesehen, dass die Determinante

$$S_n = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

verschwindet, sobald $n > N+1$, N sei die Ordnung der Mannigfaltigkeit, dass sie durch die Inhaltsdeterminante ausgedrückt wird, sobald $n = N+1$ ist; es fragt sich nun, in welcher Weise sie sich darstellt für $n < N+1$, d. h. wenn das von den Punkten gebildete Prismatoid nicht von der Ausdehnung der Mannigfaltigkeit, sondern von andrer ist.

Um diese Frage zu entscheiden, gehen wir aus von der Gleichung

$$(-2)^n \Sigma (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) \mid = \mid s_{ik}^2 \mid + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}^2) S_n$$
$$(h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Aus der Herleitung dieser Beziehung ersieht man sofort, dass die Summation in Bezug auf h beliebig weiter z. B. bis zu N hin erstreckt werden kann ($N > n$), nur müssen dann s_{ik}, r, ϱ anders erklärt werden, nämlich

$$s_{ik}^2 = \sum_h (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots N)$$
$$r^2 = \sum_h (x_{ih} - x_{oh})^2$$
$$\varrho^2 = \sum_h (\xi_{ih} - \xi_{oh})^2$$

dann erhalten wir also die Gleichung:

$$(-2)^n \mid \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) \mid = \mid s_{ik}{}^2 \mid + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}{}^2) S_n$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Das System

$$(\sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh})) \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

dessen Determinante auf der linken Seite vorkommt, lässt sich als aus den beiden rechteckigen Systemen

$$(x_{ih} - \xi_{oh}), \quad (\xi_{ih} - x_{oh}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots N \end{pmatrix}$$

componirt betrachten. Die Determinante ergiebt sich also als eine Summe von Producten von Determinanten $n$ter Ordnung, zu bilden aus dem Schema der beiden Systeme. Setzen wir nun, entsprechend dem oben eingeschlagenen Verfahren,

$$\varrho = r, \qquad \xi_{oh} = x_{oh} = 0 \quad (h = 1, 2 \ldots N)$$
$$x_{iN} = r + \frac{a_i}{r}, \quad \xi_{iN} = r + \frac{a_i}{r} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und setzen nach Division von r^2 wieder $r = \infty$, so kommt

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} \mid x_{ih} \parallel \xi_{ih} \mid = S_n \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ h = 0, h_1 \ldots h_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$(\xi_{io} = x_{io} = 1)$$

wo die Summe über alle Combinationen der Zahlen $1, 2 \ldots N-1$ zu $n-1$ Elementen zu erstrecken ist.

Schreiben wir noch N für $N-1$, so erhalten wir:

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} \mid x_{ih} \parallel \xi_{ih} \mid = S_n \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ h = 0, h_1 \ldots h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dazu ist

$$s_{ik}{}^2 = \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{kh})^2$$

und $(h_1 \ldots h_{n-1})$ bedeuten alle Combinationen der Zahlen $1 \ldots N$ zu $n-1$ Elementen.

Identificiren wir nun das System der ξ mit dem der x, so folgt

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} \mid x_{ih} \mid^2 = S_n \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

dabei ist:

$$s_{ik} = \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Wir sehen also, dass die Determinante S_n, d ie für $n > N+1$ verschwand, für $n = N+1$ durch die Inhaltsdeterminante ausgedrückt war, für $n < N+1$ durch eine Summe von Producten von Inhaltsdeterminanten dargestellt wird, die Gebilden einer niederen Mannigfaltigkeit entsprechen. Die zuletzt abgeleitete Gleichung wollen wir nun noch auf eine etwas andre Form bringen. Wir schreiben n für N, $\nu+1$ für n und bezeichnen den Punkt $(x_{\nu+1,k})$ mit (x_{ok}) $(k = 1, 2 \ldots n)$, so wird die Gleichung zu:

$$-(-2)^{\nu} \sum_{(k)} | x_{ik} |^2 = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1 \ldots n \\ h = 0, h_1 \ldots h_\nu \end{pmatrix}$$

oder auch:

$$-(-2)^{\nu} \sum_{(k)} | x_{gh} - x_{ok} |^2 = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots n \\ h = h_1, \ldots h_\nu \end{pmatrix}$$

Nun ist die Summe, welche linker Hand steht, nichts anderes als die Determinante des Systems

$$\left(\sum_{h=1}^{n} (x_{fh} - x_{oh})(x_{gh} - x_{oh}) \right) \qquad (f, g = 1, 2 \ldots \nu)$$

welches als durch Composition des Systems

$$(x_{fh} - x_{oh}) \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

mit sic h selbst entstanden gedacht werden kann. Wir können also die Determinante d es componirten Systems als von dem rechteckigen System abhängig betrachten, und wir wollen die positive Quadratwurzel dieser Determinante als die absolute Determinante des rechteckigen Systems bezeichnen und schreiben:

$$\| x_{fh} - x_{oh} \| \qquad \begin{pmatrix} f = 1. 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Für quadratische Systeme wird die absolute Determinante gleich dem absoluten Betrage der Determinante des Systems.

Mit dieser Einführung können wir schreiben:

$$-(-2)^{\nu}\,\|\,x_{fh}-x_{oh}\,\|^2=\begin{vmatrix}0\ .\ .\ .\ 1\ \ .\ .\ .\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ 1\ .\ .\ .\ s_{ik}{}^2\ .\ .\ .\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{vmatrix}\quad\begin{pmatrix}i,\ k=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu\\ f=1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu\\ h=1,\ 2\ .\ .\ .\ n\end{pmatrix}$$

Nun liegen die $\nu+1$ Punkte $(x_{ih})\ \begin{pmatrix}i=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu\\ h=1,\ 2\ .\ .\ .\ n\end{pmatrix}$ in einer $\mathfrak{M}_\nu$ und bestimmen in dieser ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung; dessen Inhalt wird aber nach dem Obigen geliefert durch

$$-(-2)^{\nu}(\nu!\,J_\nu)^2=\begin{vmatrix}0\ .\ .\ .\ 1\ \ .\ .\ .\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ 1\ .\ .\ .\ s_{ik}{}^2\ .\ .\ .\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{vmatrix}\qquad(i,\ k=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu)$$

sodass sich im Verein mit der vorhergehenden Gleichung

$$J_\nu=\frac{1}{\nu!}\,\|\,x_{fh}-x_{oh}\,\|\quad\begin{pmatrix}f=1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu\\ h=1,\ 2\ .\ .\ .\ n\end{pmatrix}$$

ergiebt. Diese Formel gilt auch, wenn $\nu=n$ wird, sodass sie also ganz allgemein den Inhalt eines Prismatoides ν-facher Ausdehnung, das durch $\nu+1$ Punkte bestimmt wird, angiebt.

§ 3.

Die Begriffe des Senkrecht-auf-einander-stehens und der Parallelität von Ebenen und Geraden im Raume sind von grosser Bedeutung zur Erkennung der Eigenschaften räumlicher Gebilde, wir schicken uns deswegen an, diese Begriffe auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern.

Durch die Punkte $(x_{ir})\ \begin{pmatrix}i=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu\\ r=1,\ 2\ .\ .\ .\ n\end{pmatrix}$ sei eine $\mathfrak{M}_\nu$ bestimmt, ausserhalb derselben der Punkt $(x_{\nu+1,r})$ gegeben, es soll zunächst der Abstand des Punktes von der $\mathfrak{M}_\nu$ gefunden werden. Nach der von uns oben aufgestellten Erklärung muss x_{pr} so bestimmt werden, dass der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n}(x_{pr}-x_{\nu+1,r})^2$$

ein Minimum wird; dann stellt eben dieser Ausdruck den Abstand dar.

Bezeichnet $((x_{\nu+1,r}),\mathfrak{M}_\nu)$ den letzteren, so findet man

$$((x_{\nu+1,r}), \mathfrak{M}_\nu) = -\frac{\| x_{mr} - x_{or} \|}{\| x_{ir} - x_{or} \|} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2 \ldots \nu+1 \\ i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Ist J_ν der Inhalt des Prismatoides, welches die Punkte $0, 1 \ldots \nu$ bilden, und $J_{\nu+1}$ der Inhalt des durch die Punkte $0, 1 \ldots \nu+1$ bestimmten Prismatoides, so folgt hieraus ohne weiteres

$$J_{\nu+1} = \frac{J_\nu((x_{\nu+1,r}), \mathfrak{M}_\nu)}{\nu+1}$$

Der durch diese Gleichung ausgedrückte Satz ist das wichtige Analogon zu dem für Ebene und Raum giltigen Satze, der für die Ebene den doppelten Inhalt eines Dreiecks als durch das Product von Grundlinie und Höhe gegeben lehrt.

Eine $\mathfrak{M}_\nu$ lässt sich auf zwei Weisen darstellen, entweder durch das Gleichungssystem

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} v_i \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

oder durch das System

$$\sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) = \quad \begin{pmatrix} k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Zwischen den Coefficienten beider Darstellungsweisen gelten, wie man leicht sieht, die Beziehungen

$$\sum_r \gamma_{kr} c_{ir} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Die beiden Systeme

$$\begin{pmatrix} (c_{ir}) \\ i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} (\gamma_{kr}) \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

ergänzen wir nun durch beliebige Grössen zu quadratischen Systemen

$$(c_{gh}) \quad \text{und} \quad (\gamma_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2 \ldots n)$$

und wollen diese Grössen so bestimmen, dass die Composition beider Systeme das Einheitssystem liefert. Diese Forderung steht mit den Gleichungen

$$\sum_r \gamma_{kr} c_{ir} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

nicht in Widerspruch, und die Anzahl der zu bestimmenden Grössen ist auch nicht kleiner als die Anzahl der Bestimmungsgleichungen.

Wir sehen also: im allgemeinen Falle sind die Coefficientensysteme der beiden Darstellungsweisen einer $\mathfrak{M}_\nu$ reciprok; es lassen sich nun diese Systeme so umformen, dass die beiden Darstellungsweisen identisch werden.

Da das System (c_{ir}) den Rang ν haben muss, weil ja sonst die $\mathfrak{M}_r$ auf eine Mannigfaltigkeit niederer Ordnung zusammenschrumpfen würde, so muss mindestens eine der aus dem System zu bildenden Determinanten νter Ordnung von null verschieden sein, es sei dies die Determinante

$$| c_{ir} | \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = r_1, r_2 \ldots r_\nu \end{pmatrix}$$

Dann führen wir statt der w_i andre Grössen w_i' durch die Gleichungen

$$w_h' = \sum_i c_{ir_h} w_i \qquad (h, i = 1, 2 \ldots \nu)$$

ein, so geht das Gleichungssystem

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

über in ein System von der Gestalt

$$\begin{aligned} x_{pr_h} - x_{or_h} &= w_h' \\ x_{pr} - x_{or} &= \sum_i a_{ir} w_i' \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r > \text{od.} < r_h \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt sofort auch die andre Darstellungsweise:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ir} (x_{pr_i} - x_{or_i}) \qquad \begin{pmatrix} r > \text{od.} < r_h \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das (c) System hat in diesem Fall die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \ldots 0, a_{1,\nu+1} \ldots a_{1n} \\ 0, 1 \ldots 0, a_{2,\nu+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0 \ldots 1, a_{\nu,\nu+1} \ldots a_{\nu n} \end{pmatrix}$$

Wir wollen dann sagen: das Gleichungssystem der $\mathfrak{M}_\nu$ ist in der kanonischen Form.

Es sei jetzt eine $\mathfrak{M}_\nu$ vorgelegt, gegeben durch die beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x_{pr} - x_{or} &= \sum_i c_{ir} w_i \\ \sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

dann wird der Punkt x_{pr} dieser $\mathfrak{M}_r$, welcher unter allen Punkten der $\mathfrak{M}_\nu$ von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkt $x_{\nu+1r}$ den kleinsten Abstand hat, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{\nu+1,r}) &= 0 \\ \sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix} \text{ bestimmt.}$$

Es sei jetzt der Punkt (x_{pr}) fest, und wir wollen den Punkt $(x_{\nu+1r})$ sich so bewegen lassen, dass von allen Punkten der $\mathfrak{M}_\nu$ immer der Punkt (x_{pr}) ihm am nächsten ist. Dann hat $(x_{\nu+1,r})$ nur den Gleichungen

$$\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{\nu+1,r}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

zu genügen. Infolge dessen durchläuft dieser Punkt eine $\mathfrak{M}_{n-\nu}$. Lassen wir nun noch den Punkt (x_{or}) mit (x_{pr}) zusammenfallen und bezeichnen diesen Punkt mit (x_{or}), so gelten für die $\mathfrak{M}_\nu$ die Darstellungen, unter x_{pr} laufende Coordinaten verstanden:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i$$

und

$$\sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) = 0$$

und für die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$:

$$\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{or}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

und

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_k \gamma_{kr} w_k$$

Die zweite Darstellungsweise der $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ folgt unmittelbar aus dem Obengesagten.

Aus diesen beiden Gleichungssystemen erkennt man sofort, dass $\mathfrak{M}_\nu$ zu $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ in derselben Beziehung steht, wie diese zu $\mathfrak{M}_\nu$; die Beziehung ist also eine gegenseitige, und wir erklären:

Zwei Mannigfaltigkeiten sind n o r m a l zu einander, sobald unter den Abständen, die alle Punkte der einen von allen Punkten der andern haben, gerade die von dem beiden Mannigfaltigkeiten gemeinsamen Punkt die kürzesten sind.

Es sei noch bemerkt, dass die Mannigfaltigkeiten nur einen

einzigen Punkt mit einander gemein haben Für einen gemeinsamen Punkt gelten nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{rr}) = 0 \\ &x_{pr} - x_{0r} = \sum_k c_{kr} w_k \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Aus denen folgt zur Bestimmung der w_k:

$$\sum_{k,r} c_{ir} c_{kr} w_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Hieraus entweder

$$w_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

oder

$$\left| \sum_{r=1}^{n} c_{ir} c_{kr} \right| = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

Nun ist

$$\left| \sum_r c_{ir} c_{kr} \right| = \| c_{ir} \|^2 \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

also sicher nicht $= 0$, da das c-System den Rang ν haben muss, mithin kommt

$$w_k = 0 \quad (k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

womit die obige Behauptung erwiesen ist.

Die Mannigfaltigkeiten, die wir eben einer Betrachtung unterzogen haben, waren so beschaffen, dass ihre Ordnungszahlen sich zu n ergänzten, wir untersuchen jetzt zwei beliebige Mannigfaltigkeiten νter Ordnung gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}_\nu \qquad x_{pr} = c_{0r} + \sum_i c_{ir} w_i \\ &\mathfrak{M}_\nu' \qquad x_{pr}' = x_{0r}' + \sum_i c_{ir}' w_i' \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

(x_{pr}) sei ein Punkt von $\mathfrak{M}_\nu$, und es bezeichne (x_{pr}') gerade denjenigen Punkt von $\mathfrak{M}_\nu'$, der von ihm die kleinste Entfernung habe. Wir können dann (x_{pr}) als die Projection von (x_{pr}) auf $\mathfrak{M}_\nu'$ bezeichnen. Gemäss früher abgeleitetem wird (x_{pr}') bestimmt durch die Gleichungen

$$\sum_{r=I}^{n} c_{ir}'(x_{pr}' - x_{pr}) = 0 \quad (i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

Nun seien (x_{ir}) $(i = 0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu)$ $\nu + 1$ Punkte auf $\mathfrak{M}_\nu$, ihre Projectionen auf $\mathfrak{M}_\nu'$ seien (x_{ir}'), ferner werde (x_{ir}) bestimmt durch die Parameter w_{ih} $(h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$, entsprechend (x_{ir}') durch w_{ih}' $(h = 1,\ 2\ .\ .\ \nu)$, so bestehen die Gleichungen:

$$x_{ir} = c_{or} + \sum_h c_{hr} w_{ih} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots \nu \\ i = 0, 1 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$x_{ir}' = c_{or}' + \sum_h c_{hr}' w_{ih}'$$

Daraus folgt

$$x_{ir} - x_{or} = \sum_h c_{hr} (w_{ih} - w_{oh}) \qquad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$x_{ir}' - x_{or}' = \sum_h c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}')$$

Ferner ist aber auch

$$\sum_r c_{kr}' (x_{ir}' - x_{ir}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1 \ldots \nu \\ k = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Mithin erhält man

$$\sum_r c_{or}' \{x_{ro}' + \sum_h c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') - x_{or} - \sum_h c_{hr} (w_{ih} - w_{oh})\} = 0$$
$$\begin{pmatrix} r = 1, 2 \ldots n \\ h, i, k = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

oder

$$\sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') = \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr} (w_{ih} - w_{oh})$$

Aus diesem sowie aus den beiden Gleichungssystemen

$$x_{ir} - x_{or} = \sum_h c_{hr} (w_{ih} - w_{oh}) \qquad \begin{pmatrix} i, h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$x_{ir}' - x_{or}' = \sum_h c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}')$$

ergiebt der Uebergang zu den Determinanten die Beziehungen:

$$\begin{matrix} \| x_{ir} - x_{or} \| = \| c_{hr} \| \, \| w_{ih} - w_{oh} \| \\ \| x_{ir}' - x_{or}' \| = \| c_{hr}' \| \, \| w_{ih}' - w_{oh}' \| \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} r, h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$| \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') | = | \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr} (w_{ih} - w_{oh} |$$

Nach einigen Umformungen wird die letzte Gleichung zu:

$$\| c_{ir}' \|^2 | w_{ih}' - w_{oh}' | = | \sum_r c_{ir}' c_{hr} | \, | w_{ih} - w_{oh} |$$
$$(i, h = 1, 2 \ldots \nu; \quad r = 1, 2 \ldots n)$$

In Verbindung mit den beiden oberen liefert diese

$$\frac{\| x_{ir}' - x_{or}' \|}{\| x_{ir} - x_{or} \|} = \frac{\| \sum_r c_{hr} c_{ir}' \|}{\| c_{ir} \| \cdot \| c_{ir}' \|} \qquad \begin{pmatrix} i, h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung lehrt: Der Inhalt eines durch Projection auf eine ν-fache Mannigfaltigkeit von einer andern entstandenen Gebildes hat zu dem Inhalt des projicirten Gebildes ein von der Lage der Eckpunkte unabhängiges Verhältniss. Aus dieser Form der Darstellung ersieht man auch, dass es ganz gleich ist, welches die projicirte Mannigfaltigkeit ist Der Ausdruck bezeichnet eine gegenseitige Beziehung, wir nennen ihn den Correlationsfactor der beiden Mannigfaltigkeiten und schreiben:

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_\nu) = \frac{|\sum_r c_{hr}' c_{ir}|}{\| c_{ir} \| \| c_{ir}' \|} \quad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Für den Fall $\nu = n-1$ geht dieser Correlationsfactor in den von uns oben erklärten und angewendeten über.

Sind zwei Mannigfaltigkeiten verschiedener Ordnung $\mathfrak{M}_\nu$, $\mathfrak{M}_{\nu+\varrho}$ ($\varrho > 0$) vorgelegt, so projiciren wir $\mathfrak{M}_\nu$ auf $\mathfrak{M}_{\nu+\varrho}$ und erhalten dadurch $\mathfrak{M}_\nu'$, dann erklären wir:

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_{r+\varrho}) = \operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_\nu')$$

Sind $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ und $\mathfrak{M}_{n-\nu'}$ die zu $\mathfrak{M}_\nu$ bzhw. $\mathfrak{M}_\nu'$ normalen Mannigfaltigkeiten, so wird

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_{n-\nu}, \mathfrak{M}_{n-\nu'}) = \frac{|\sum_r \gamma_{kr} \gamma_{lr}'|}{\| \gamma_{kr} \| \cdot \| \gamma_{kr}' \|} \quad \begin{pmatrix} k, l = \nu+1, \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Bringt man die beiden Systeme

$$(c_{ir}) \quad \text{und} \quad (c_{ir}') \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

auf die kanonische Form, so sieht man ohne Mühe, dass

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_{n-r}, \mathfrak{M}_{n-\nu'}) = \operatorname{cor}(\mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_{\nu'}) \quad \text{ist.}$$

Der Correlationsfactor hat den Wert 0, wenn die Mannigfaltigkeiten normal sind, denn dann verschwindet jedes Element der Zählerdeterminante des Correlationsfactors. Das gilt aber nicht umgekehrt. Verschwindet nämlich der Correlationsfactor, so kann das Verschwinden von verschiedener Ordnung sein, wir bezeichnen in diesem Fall überhaupt die Mannigfaltigkeiten als orthogonal und bemessen die Stufe der Orthogonalität nach dem Range des Systems

$$\left(\sum_{r=1}^{n} c_{hr} c_{ir}'\right) \qquad (h, i = 1, 2 \ldots \nu)$$

Ist der Rang $= 0$, so tritt die höchste Stufe der Orthogonalität, die Normalität, ein.

Neben der Normalität isl von grosser Wichtigkeit die Parallelität. Parallel nennen wir zwei ν-fache Mannigfaltigkeiten, sobald die Coefficientensysteme ihrer in der kanonischen Form befindlichen Gleichungen einander gleich sind, ferner soll eine $\mathfrak{M}_\nu$ einer $\mathfrak{M}_{n+\varrho}$ ($\varrho > 0$) parallel heissen, wenn sie ihrer Projection auf dieselbe parallel ist.

Man sieht sofort, dass der Correlationsfactor zweier parallelen $\mathfrak{M}_\nu$ gleich 1 ist; umgekehrt zieht aber auch dieser Wert des Correlationsfactors die Parallelität der Mannigfaltigkeiten nach sich, wovon man sich durch Rechnung überzeugen kann.

§ 4.

Auf Grund der in den vorangehenden Paragraphen entwickelten Erklärungen und Beziehungen, gehen wir jetzt dazu über, einige geometrische Sätze, die sich mit harmonischen Punkten und Strahlen beschäftigen, auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern. Es soll in zweifacher Richtung eine Verallgemeinerung versucht werden: in Bezug auf die Lage und in Bezug auf die Grössenverhältnisse. Dieser Paragraph soll die bekannte Construction des vierten harmonischen Punktes mit alleiniger Benutzung des Lineals erweitern. Wir können den in dieser Construction enthaltenen Satz so aussprechen:

Es sind gegeben 2 Punkte x_0, x_1 und auf ihrer Verbindungsgeraden ein dritter Punkt ξ. Dann nehmen wir ausserhalb der Geraden einen beliebigen Punkt ξ', verbinden ihn mit den 3 ersten und ziehen ferner durch den auf der Geraden (ξ, ξ') beliebig gewählten Punkt ξ'' die beiden Geraden (x_0, ξ''), (x_1, ξ''), welche die Geraden (x_1, ξ'), (x_0, ξ'), bzw. treffen mögen in x_0' und x_1'. Nun ziehen wir (x_0', x_1'), welche (x_0, x_1), die ursprüglich gegebene Gerade, im Punkte Φ schneide. Dieser Punkt Φ ist unabhängig von der Lage der Punkte ξ', ξ'', vorausgesetzt allerdings, dass die Punkte ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden liegen.

Auf die Ebene verallgemeinert lautet dieser Satz:

Vier in einer Ebene gelegene Punkte x_0, x_1, x_2, ξ verbinden wir mit einem beliebigen Punkt ausserhalb der Ebene ξ' und ziehen von dem auf der Geraden (ξ, ξ') beliebig gewählten Punkte ξ'' die drei Geraden (x_0, ξ''), (x_1, ξ''), (x_2, ξ''), welche die drei Ebenen (x_1, x_2, ξ'), (x_2, x_0, ξ'), (x_0, x_1, ξ') bzw. treffen mögen in den Punkten x_0', x_1', x_2'. Die Ebene (x_0', x_1', x_2') schneidet dann die

ursprünglich angenommene Ebene (x_0, x_1, x_2) in einer Geraden Φ, die unabhängig ist von der Lage der Punkte ξ', ξ'', sofern diese beiden nur mit ξ in einer Geraden liegen.

Diese Gerade stimmt überein mit der Harmonikale [1]) des Punktes ξ in Bezug auf das Dreieck x_0, x_1, x_2.

Schliesslich liefert die Erweiterung auf die n-fache Mannigfaltigkeit den Satz:

Es seien $x_0, x_1, \ldots x_n$, ξ $n+2$ Punkte einer in einer $\mathfrak{M}_{n+1}$ befindlichen $\mathfrak{M}_n$, ξ', ξ'' zwei beliebige Punkte ausserhalb derselben jedoch mit der Massgabe, dass ξ, ξ', ξ' eine $\mathfrak{M}_1$ (Gerade) bilden; ferner seien $x_0' \ldots x_n'$ die Schnittpunkte der Geraden $(x_0, \xi''), \ldots (x_n, \xi'')$ bzw. mit den $\mathfrak{M}_n$ $(x_1, x_2 \ldots x_n, \xi'), \ldots (x_0, x_1 \ldots x_{n-1}, \xi')$. Dann schneidet die $\mathfrak{M}_n$ $(x_0', x_1' \ldots x_n')$ die ursprünglich gegebene $\mathfrak{M}_n$ in einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ Φ, die unabhängig von der Lage der Punkte ξ', ξ'' ist, wofern nur ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden liegen.

Φ nennen wir die Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid $(x_0, x_1 \ldots x_n)$.

Der Beweis dieses Satzes gestaltet sich folgendermassen:

Ein beliebiger Punkt der $\mathfrak{M}_{n+1}$ sei bestimmt durch die Coordinaten x_{pk} $(k = 1, 2 \ldots n+1)$

die Punkte x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$ durch

$x_{f1}, \ldots x_{fn}$, 0

ξ durch $\ldots \xi_h \ldots, 0$ $(h = 1, 2 \ldots n)$

ξ', ξ'' bzw. durch ξ_k', ξ_k'' $(k = 1, 2 \ldots n+1)$

ferner sei im Folgenden stets

$$x_{po} = x_{fo} = \xi_o = \xi_o' = \xi_o'' = 1$$

Die $\mathfrak{M}_n$, welche durch die Punkte $\ldots x_{f'}, \ldots, \xi'$ $(f' = 0, 1 \ldots f-1, f+1 \ldots n)$ geht, hat dann die Gleichung:

$$| x_{pk}, x_{ok}, \ldots x_{f-1,k}, \xi_k', x_{f+1,k} \ldots x_{nk} | = 0$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1, \quad x_{gn+1} = 0, \quad g = 0, 1 \ldots n)$$

die $\mathfrak{M}_1$, welche durch die Punkte x_f, ξ'' geht, wird dargestellt durch

$$x_{pk} = x_{fk} + (\xi_k'' - x_{fk})\, t_f \quad (k = 1, 2 \ldots n+1)$$

---

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Leipzig 1887. I. S. 105.

Da der Punkt x_f' auf dieser liegt, so giebt es einen Wert τ_f von t_f, welcher die Gleichungen

$$x_{fk}' = x_{fk} + (\xi_k'' - x_{fk})\tau_f$$

befriedigt; dieser Wert bestimmt sich dadurch, dass in der vorher angegebenen Gleichung der $\mathfrak{M}_n$ x_{pk} durch x_{fk}' ersetzt wird, denn x_{fk}' liegt ja auf dieser $\mathfrak{M}_n$. Darnach wird:

$$| x_{fk}(1-\tau_f) + \xi_k''\tau_f,\ x_{ok}, \ldots x_{f-1,k},\ \xi_k',\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} | = 0$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{| \xi_k'\ x_{ok} \ldots x_{f-1,k},\ x_{fk},\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}{| \xi_k',\ x_{ok} \ldots x_{f-1,k},\ \xi_k'',\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Nun liegen aber die Punkte ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden, also giebt es einen Wert τ, der den Gleichungen

$$\xi_k'' = \xi_k + (\xi_k' - \xi_k)\tau$$

genügt. Mit Hilfe hiervon ergiebt sich:

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{| \xi_k',\ x_{ok} \ldots x_{nk} |}{| \xi_k',\ x_{ok} \ldots x_{f-1,k},\ \xi_k(1-\tau)+\xi_k'\tau,\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\xi_{n+1} = x_{gn+1} = 0 \quad (g = 0, 1 \ldots n)$$

so kommt:

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{| x_{gh} |}{| x_{oh} \ldots x_{f-1,h},\ \xi_h,\ x_{f+1,h} \ldots x_{nh} |}$$
$$(g, h = 0, 1 \ldots n)$$

Mit Hilfe hiervon ist es leicht, die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_n$ aufzustellen, welche durch die Punkte x_f' $(f = 0, 1 \ldots n)$ geht. Diese ist nämlich:

$$| x_{pk},\ x_{ok}',\ \ldots x_{nk}' | = 0 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots n+1)$$

oder:

$$| x_{pk}, \ldots, x_{fk}(1-\tau_f) + \xi_k''\tau_f \ldots | = 0 \quad (k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Da es nun aber nur auf die Schnitt-$\mathfrak{M}_{n-1}$ dieser $\mathfrak{M}_n$ mit der Grund-$\mathfrak{M}_n$ $x_{pn+1} = 0$ ankommt, so können wir $x_{pn+1} = 0$ setzen und erhalten als Gleichung der $\mathfrak{M}_{n-1}$ Φ

$$\begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots x_{fh}(1-\tau_f)+\xi_h''\tau_f \ldots \\ 0, \ldots \quad \xi_{n+1}''\tau_f \quad \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

oder

$$\xi_{n+1}'' \prod_f (1-\tau_f) \begin{vmatrix} x_{ph} \ldots x_{fh} \quad \ldots \\ 0 \ldots \frac{\tau_f}{1-\tau_f} \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

also mit Benutzung des oben für $\frac{\tau_f}{1-\tau_f}$ gefundenen Wertes:

$$\frac{|x_{gh}|\xi_{n+1}''}{1-\tau} \prod_f (1-\tau_f) \begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots, x_{fh}, \ldots \\ 0, \ldots, \frac{1}{\Delta_f} \ldots \end{vmatrix} = 0$$

$$(g, f, h = 0, 1 \ldots n)$$

wobei

$$\Delta_f = |x_{oh}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh}| \text{ ist.}$$

Da $\tau \gtrless 1$, weil sonst ξ', ξ'' zusammenfallen würden, $\xi_{n+1} \gtrless 0$, weil sonst ξ'' nicht ausserhalb der ursprünglich angenommenen $\mathfrak{M}_n$ liegen würde und schliesslich $|x_{gh}| \gtrless 0$ $(g, h = 0, 1 \ldots n)$ ist, weil sonst die Punkte x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$ in einer niederen als n-fachen Mannigfaltigkeit liegen würden, erhalten wir endlich als die Gleichung der Harmonikale des Punktes ξ_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ in Bezug auf das Prismatoid (x_{fh}) $\begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$

$$\Phi = \begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots x_{fh} \ldots \\ 0, \ldots \frac{1}{\Delta_f} \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

Diese Gleichung nimmt eine sehr einfache Gestalt an, sobald man statt der orthogonalen Coordinaten x_{ph} $(h = 1, 2 \ldots n)$ eines Punktes die homogenen Coordinaten (vergl. § 1.)

$$u_{pk} = \sum_h x_{ph} \frac{D_{hk}}{D} \qquad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

einführt. Dabei ist D die Determinante des Systems

$$(x_{gh}) \qquad (g, h = 0, 1 \ldots n)$$

und D_{hg} die zum Element x_{gh} gehörige Subdeterminante.

Es gelten dann die Gleichungen:

$$x_{pg} = \sum_k x_{kg} u_{pk} \qquad (g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

die für $g = 0$ die Relation

$$\sum_{k=o}^{n} u_{pk} = 1$$

enthalten. Nun seien

$$\varphi_k \qquad (k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

die homogenen Coordinaten des Punktes ξ, dann ist

$$\xi_g = \sum_k x_{kg} \varphi_k \qquad (g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

Mit Hilfe dieser Einführung ergiebt sich:

$$\Delta_f = |\ x_{0k},\ .\ .\ .\ x_{f-1,k},\ \sum_g x_{gk} \varphi_g,\ x_{f+1,k},\ .\ .\ .\ x_{nk}\ |$$

$$(f,\ g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$= \varphi_f\ |\ x_{gk}\ |$$

Ferner

$$\Phi = \begin{vmatrix} \sum_k x_{kh} u_{pk},\ .\ .\ .\ x_{fh} & \ldots \\ 0, \quad \ldots \frac{1}{\varphi_f\ |\ x_{gk}\ |} & \ldots \end{vmatrix} \qquad (f, g, h, k = 0, 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$= \begin{vmatrix} 0, & \ldots & x_{fh} & \ldots \\ -\sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k\ |\ x_{gh}\ |}, & \ldots & \frac{1}{\varphi_f\ |\ x_{gh}\ |} & \ldots \end{vmatrix} = -\sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k}$$

Mithin ist

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{pk}}{\varphi_k} = 0$$

die Gleichung der Harmonikale des durch die homogenen Coordinaten φ_k ausgedrückten Punktes in Bezug auf das Prismatoid, auf welches sich die homogenen Coordinaten beziehen. u_{pk} sind die homogenen Coordinaten irgend eines Punktes der Harmonikale [1]).

Diese Form der Gleichung ist besonders geeignet zur Herleitung einiger Eigenschaften der Harmonikale. Um diese zu entwickeln stellen wir zuerst den verallgemeinerten Begriff der centralen Projection auf. Wir erklären:

Eine in einer $\mathfrak{M}_r$ befindliche $\mathfrak{M}_\mu'$ $(\mu < \nu)$ heisst die Projection einer $\mathfrak{M}_\mu$ auf die $\mathfrak{M}_r$ von einer $\mathfrak{M}_{n-r-1}$ aus, sobald $\mathfrak{M}_\mu'$ als Schnitt der

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Leipzig 1887. I S. 115.

$\mathfrak{M}_\nu$ mit einer durch $\mathfrak{M}_\mu$ und $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ gelegten $\mathfrak{M}_{n-\nu-\mu}$ betrachtet werden kann; die $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ soll das Projectionscentrum heissen.

Auf diese Erklärung gestützt, beweisen wir folgenden Satz:

Die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$, in welcher die Harmonikale Φ die Grenz-$\mathfrak{M}_\nu$ des Prismatoides, die die Punkte $x_0 \ldots x_\nu$ bilden, schneidet, ist in Bezug auf das Prismatoid dieser Punkte die Harmonikale desjenigen Punktes η der $\mathfrak{M}_\nu$, welcher durch Projection von ξ von der $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, die die Punkte $x_{\nu+1} \ldots x_n$ bestimmen, aus entsteht.

Wir tun der Allgemeinheit keinen Abbruch, wenn wir annehmen, die $\mathfrak{M}_\nu$ sei zugleich die Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1, \ldots n)$$

Dann ist also

$$x_{fi} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ i = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

und

$$\eta_i = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

sobald η_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ die Coordinaten des Punktes η sind.

Es seien ferner v_{pf} $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes (x_{pg}') $(g = 1, 2 \ldots \nu)$ bezogen auf das Prismatoid der Punkte $x_0, \ldots x_\nu$; η habe die homogenen Coordinaten ψ_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$.

Wir wollen dann v_{pf} ausdrücken durch u_{ph} $(h = 0, 1 \ldots n)$, wenn v_{pf} die Projection des durch die Grössen u_{ph} bestimmten Punktes darstellt. Da x_p', x_p, x_i $(i = \nu+1 \ldots n)$ auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen sollen, was ja aus der Erklärung der Projection folgt, so giebt es ein Wertsystem t_k $(k = \nu+1 \ldots n)$, welches die Gleichungen

$$x_{ph}' - x_{ph} = \sum_k (x_{kh} - x_{ph}) t_k \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots n \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} x_{pf}' - x_{pf} \ldots x_{kf} - x_{pf} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} - x_{pi} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} (i, k = \nu+1 \ldots n) \\ (f = 1, 2 \ldots \nu) \end{matrix}$$

also

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} 1 \ldots 1 \\ \ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{pf} \ldots x_{kf} \\ \ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i, k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

oder

$$x_{pf'}\begin{vmatrix} \sum_g u_{pg}, & \ldots 1 \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \sum_g x_{gi}\, u_{pg}, & \ldots x_{ki} \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_g x_{gf}\, u_{pg}, & \ldots 1 \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \sum_g x_{gi}\, u_{pg}, & \ldots x_{ki} \ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1,\ 2 \ldots \nu \\ g = 0,\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Mit Rücksicht auf

$$x_{fi} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0,\ 1 \ldots \nu \\ i = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

werden diese Gleichungen zu

$$x_{pf'} \sum_g u_{pg} \mid x_{ki} \mid = \sum_g x_{gf}\, u_{pg} \mid x_{ki} \mid$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1,\ 2 \ldots \nu \\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

und schliesslich zu

$$x_{pf'} = \frac{\sum_g x_{gf} u_{pg}}{\sum_g u_{pg}} \qquad \begin{pmatrix} f = 1,\ 2 \ldots \nu \\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

hierin kann f auch den Wert 0 annehmen. Nun ist aber auch

$$x_{pf'} = \sum_g x_{gf} v_{pg} \qquad (g,\ f = 0, \ldots \nu)$$

sodass sich ergiebt:

$$v_{pg} = \frac{u_{pg}}{\sum_f u_{pf}} \qquad (f,\ g = 0,\ 1 \ldots \nu)$$

also ist im besonderen

$$\psi_g = \frac{\varphi_g}{\sum_f \varphi_f} \qquad (f,\ g = 0,\ 1 \ldots \nu)$$

Die $\mathfrak{M}_{n-1}$, die durch den Schnitt von Φ mit der $\mathfrak{M}_\nu$ entsteht, wird darnach bestimmt durch das Gleichungssystem

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\Phi = \sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k} = 0 \qquad (k = 0,\ 1 \ \ldots n)$$

das durch

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\sum_g \frac{u_{pg}}{\varphi_g} = 0 \qquad (g = 0, 1 \ldots \nu)$$

ersetzt werden kann. Führen wir hierin

$$u_{pg} = v_{pg} \sum_f u_{pf}, \quad \varphi_g = \psi_g \sum_f \varphi_f \qquad (f, g = 0, 1 \ldots n)$$

so wird die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ innerhalb der $\mathfrak{M}_\nu$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\psi = \sum_f \frac{v_{pf}}{\psi_f} = 0 \qquad (f = 0, 1 \ldots \nu)$$

d. h aber die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ ψ ist die Harmonikale des Punktes η in Bezug auf das durch die Punkte $x_0, \ldots x_\nu$ gebildete Prismatoid.

Wir beweisen ferner diesen Satz:

Ist in einer $\mathfrak{M}_\nu$ eine $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ ψ Harmonikale eines Punktes η in Bezug auf ein Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$, so bleibt diese Beziehung erhalten, sobald man $\mathfrak{M}_\nu$ von einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ aus auf $\mathfrak{M}_\nu'$ projicirt.

Das Projectionscentrum, die $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, sei gegeben durch die Punkte x_k $(k = \nu+1 \ldots n)$, ferner mögen ψ', η', x_f' $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ die Projectionen von bzhw. ψ, η, x_f sein. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir $\mathfrak{M}_\nu$ als Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk} = 0 \qquad (k = \nu+1 \ldots n)$$

wählen, ferner können wir, was aus dem Vorhergehenden einleuchtet, η auffassen als Projection eines Punktes ξ der $\mathfrak{M}_n$, dessen Harmonikale Φ in Bezug auf das Prismatoid $\ldots, x_f \ldots (f = 0, 1 \ldots n)$ die $\mathfrak{M}_\nu$ in ψ schneidet, dann ist also η' die Projection von ξ auf $\mathfrak{M}_\nu'$. Es sei nun x_{ph} $(h = 1, 2 \ldots n)$ irgend ein Punkt der $\mathfrak{M}_n$, x_{pf}' $(f = 1, 2 \ldots \nu)$ seine Projection auf $\mathfrak{M}_\nu'$, dann ergiebt sich:

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{pi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{pf} & \ldots & x_{kf} \\ x_{pi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} k, \ i = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

Mithin folgt durch Specialisation des beliebigen Punktes:

$$x_{gf}' \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{gf} & \ldots & x_{kf} \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} i, k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{bmatrix}$$

Bezeichnet jetzt u_{ph} $(h = 0, 1 \ldots n)$ die homogenen Coordinaten des Punktes x_p bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f, \ldots (f = 0, 1 \ldots n)$, v_{pg}' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ dieselben Coordinaten des Punktes x_p' bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f' \ldots (f = 0, 1 \ldots \nu)$, so folgt aus der obigen Gleichung:

$$x_{pf'}\begin{vmatrix} \sum\limits_h u_{ph} \ldots ; & 1 \\ \sum\limits_h x_{hi} u_{ph} \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_h x_{hf} u_{ph}, \ldots & x_{kf} \\ \sum\limits_h x_{hi} u_{ph}, \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ h = 0,\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

$$x_{pf'}\begin{vmatrix} \sum\limits_g u_{pg}, \ldots & 1 \\ \sum\limits_g x_{gi} u_{pg} \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_g x_{gf} u_{pg}, \ldots & x_{pf} \\ \sum\limits_g x_{gi} u_{pg}, \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

$$x_{pf'} \sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} x_{gf} & \ldots & x_{kf} \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

$$= \sum_g u_{pg} x_{gf'} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}$$

und hieraus in Verbindung mit

$$x_{pf'} = \sum_g x_{gf'} v_{pg'}$$

kommt:

$$v_{pf'} = \frac{u_{pf} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{fi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}}{\sum\limits_g u_{pg} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} f,\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \\ i,\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

also auch

$$\psi_{f'} = \frac{\varphi_f \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{fi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}}{\sum\limits_g \varphi_g \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} f,\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \\ i,\ k = \nu+1 \ldots a \end{pmatrix}$$

wenn φ_f bzhw. $\psi_{f'}$ die homogenen Coordinaten der Punkte ξ, η' sind.

Es seien ferner u_f $(f = 0,\ 1 \ldots \nu)$ die homogenen Coordinaten irgend eines Punktes der $\mathfrak{M}_\nu$ bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f \ldots (f = 0,\ 1 \ldots \nu)$, ψ_f die speciellen des Punktes η, dann wird ψ bestimmt durch die Gleichung:

$$\sum_{f=0}^{\nu} \frac{u_{pf}}{\psi_f} = 0$$

wie in der Voraussetzung enthalten ist. Da wir nun ψ als Schnitt von Φ und $\mathfrak{M}_\nu$ auffassen wollen, so können wir diese Gleichung ersetzen durch

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\sum_f \frac{u_{pf}}{\varphi_f} = 0 \qquad (f = 0, 1 \ldots \nu)$$

daraus ergiebt sich aber, dass ψ' bestimmt ist durch

$$\sum_f \frac{v_{pf}'}{\psi' p f'} \cdot \frac{\sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{gi} & x_{ki} \end{vmatrix}}{\sum_g \psi_{ig} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{gi} & x_i \end{vmatrix}} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\psi' = \sum_{f=0}^{\nu} \frac{v_{pf}'}{\psi_{f'}} = 0$$

d. h. aber ψ' ist Harmonikale des Punktes η' in Bezug auf das Prismatoid $\ldots x_f' \ldots (f = 0, 1 \ldots \nu)$. Das war zu beweisen.

Die Harmonikale Φ des Punktes ξ (es gelten die alten Bezeichnungen) schneidet die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$, welche durch die Punkte $\eta, x_{\nu+1} \ldots x_n$ bestimmt ist, in einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$. Man könnte nun vermuten — und diese Vermutung ist besonders leicht möglich nach Kenntniss einiger Ergebnisse, deren Ableitung der nächste Paragraph gewidmet sein soll —, dass diese $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, die wir abkürzungsweise X nennen wollen, Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das von den Punkten $\eta, x_{\nu+1} \ldots x_n$ gebildete Prismatoid ist. Das ist aber keineswegs der Fall; weil aber die Bestimmungsgleichung von X grosse Aehnlichkeit mit der Gleichung der erwähnten Harmonikale besitzt, soll sie hier abgeleitet werden.

Wir wählen wieder, der Einfachheit wegen, die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ zur Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pf} = 0 \qquad (f = 1 \ldots \nu)$$

Darnach ist

$$x_{kf} = \xi_f = \eta_f = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 1 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

zu setzen. Ferner muss berücksichtigt werden, dass die Punkte η, $x_{\alpha_1} \ldots x_\nu$ in einer $\mathfrak{M}_\nu$ liegen, demnach giebt es ein Wertsystem τ_f, welches die Gleichungen:

$$x_{\alpha h} - \eta_h = \sum_f (x^{fh} - \eta_h)\,\tau_f \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Es seien weiter $\chi_\nu, \chi_{\nu+1} \ldots \chi_n$ die homogenen Coordinaten des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid: $\eta, x_{\nu+1} \ldots x_n$, sodass also

$$\chi_\nu = \frac{|\, \xi_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,|}{|\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,|}$$

$$\chi_k = \frac{|\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{k-1,i},\ \xi_i,\ x_{k+1,i} \ldots x_{ni}\,|}{|\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,|}$$

$$(i = 0,\ \nu+1 \ldots n,\quad k = \nu+1 \ldots n$$

ist.

Mit Benutzung alles des eben angeführten ergeben sich die in der Gleichung von Φ vorkommenden Grössen Δ folgendermassen:

$$\Delta_o = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1, & 1 & \ldots 1 \\ 0 & x_{1g} \ldots x_{\nu g} & 0 & \ldots 0 \\ \xi_k, & x_{1k} \ldots x_{\nu k}, & x_{\nu+1k} \ldots & k_{nk} \end{vmatrix}$$

$$= |\, x_{fg}\,| \begin{vmatrix} 1, & 1 & \ldots 1 \\ \xi_k, & x_{\nu+1k} \ldots & x_{nk} \end{vmatrix} = |\, x_{fg}\,|\, |\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,|\ \chi_\nu = \Delta\chi_\nu$$

$$(f, g = 1, 2 \ldots \nu;\quad k = \nu+1 \ldots n;\quad i = 0, \nu+1 \ldots n)$$

wobei die Bedeutung von Δ klar ist.

$$\Delta_f = \begin{vmatrix} 1 \ldots 1, & 1, & 1 & \ldots 1, & 1 & \ldots 1 \\ x_{og} \ldots x_{f-1,g}, & 0, & x_{f+1,g} \ldots & x_{\nu g}, & 0 & \ldots 0 \\ x_{ok} \ldots x_{f-1,k}, & \xi_k, & x_{\nu+1,k} \ldots & x_{\nu k}, & x_{\nu+1,k} \ldots & x_{nk} \end{vmatrix}$$

$$f < \nu+1$$

$$\begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Setzt man für x_{rk} den in der Vorbemerkung angegebenen Ausdruck und formt die Determinante etwas um, so erhält man:

$$\Delta_f = -\tau_f\, |\, x_{fg}\,|\ |\, \xi_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,| = -\tau_f \Delta\chi_\nu$$

$$(f = 1, 2 \ldots \nu)$$

Weiter

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 \ldots 1, & 1 & \ldots 1, & 1, & 1 & \ldots 1 \\ x_{og} \ldots x_{\nu g}, & 0 & \ldots 0, & 0, & 0 & \ldots 0 \\ x_{ok} \ldots x_{rk}, & x_{r+1,k} \ldots & x_{r-1,k}, & \xi_k, & x_{r+1,k} \ldots & x_{nk} \end{vmatrix}$$

$$(r > \nu)$$

$$\begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Wird hierin wieder x_{ok} fortgeschafft, so kommt nach einigen Umformungen:

$$\Delta_r = (1 - \sum_f \tau_f)\, |\, x_{fg}\,|\ |\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{r-1,i},\ \xi_i,\ x_{r+1,i} \ldots x_{ni}\,|$$

$$= (1 - \sum_f \tau_f)\, \Delta\chi_r \qquad \begin{pmatrix} r = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

Nun hatte Φ die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_{ph}, & x_{0h} & \dots & x_{nh} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_0} & \dots & \frac{1}{\Delta_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (h = 0, 1 \dots n)$$

setzen wir hierin

$$x_{pf} = 0 \qquad (f = 1, 2 \dots \nu)$$

und entfernen zugleich x_{0h}, so geht die Gleichung über in die Bestimmungsgleichung von χ:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1-\sum_f \tau_f, & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots \\ 0, & 0, & \dots & x_{fg} & \dots & 0 & \dots \\ x_{ph}, & (1-\sum_f \tau_f)\eta_k & \dots & x_{fk} & \dots & x_{rk} & \dots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_0} - \sum_f \frac{\tau_f}{\Delta_f} & \dots & \frac{1}{\Delta_f} & \dots & \frac{1}{\Delta_r} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$(f, g = 1, 2 \dots \nu; \quad k, r = \nu+1 \dots n)$$

oder:

$$|x_{fg}| \begin{vmatrix} 1. & 1-\sum_f \tau_f & \dots & 1 & \dots \\ x_{ph}, & (1-\sum_f \tau_f)\eta_k & \dots & x_{rk} & \dots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_0} - \sum_f \frac{\tau_f}{\Delta_f} & \dots & \frac{1}{\Delta_r} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benutzung der für die Δ gefundenen Werte:

$$\frac{|x_{fg}|}{\Delta} \begin{vmatrix} 1, & 1 & \dots & 1 & \dots \\ x_{ph}, & \eta_k & \dots & x_{rk} & \dots \\ 0, & \frac{\nu+1}{\chi_\nu} & \dots & \frac{1}{\chi_\nu} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir die homogenen Coordinaten des Punktes x_{ph} mit $w_\nu \dots w_n$, — für den Punkt ξ heissen sie $\chi_\nu \dots \chi_n$, — dann ist

$$x_{ph} = \eta_k w_k + \sum_r x_{rk} w_r \qquad (r, k = \nu+1 \dots n)$$

zu setzen, und wird obige Gleichung zu

$$\chi = (\nu+1)\frac{w_\nu}{\chi_\nu} + \sum_k \frac{w_k}{\chi_k} = 0 \quad (k = \nu+1 \dots n)$$

Das ist die gesuchte Gleichung von χ, man sieht sofort ihre Aehnlichkeit mit der Gleichung der Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid $\eta, \ldots x_r \ldots$, denn deren Gleichung ist ja, gemäss dem Früheren:

$$\frac{vv}{\chi v} + \sum_k \frac{vk}{\chi k} = 0 \qquad (k = v+1 \ldots n)$$

Die Sätze, die den Gegenstand dieses Paragraphen gebildet haben, lassen sich nun auch ohne Schwierigkeit auf die sphärische Mannigfaltigkeit (vgl. § 2.) ausdehnen. An die Stelle einer ebenen v-fachen Mannigfaltigkeit ($\mathfrak{M}_v$) ist dann nur diejenige krumme (M_v) zu setzen, welche sich als Schnitt der sphärischen und einer ebenen $v+1$-fachen Mannigfaltigkeit ergiebt. Da die Betrachtung sachlich sich an das Obige eng anlehnt, so übergehen wir sie hier.

Ehe wir uns nun im andern Paragraphen zu der zweiten Verallgemeinerung harmonischer Punkte in einer Geraden wenden, wollen wir über die oben erklärte und angewandte Art der Projection, von der wir auch fernerhin Gebrauch machen werden, noch einige Worte sagen. Für die Ebene liefert unsre Erklärung als alleinige Möglichkeit die Projection von einem Punkt aus durch Gerade auf eine Gerade; für den Raum erweisen sich aber zwei Fälle als möglich, nämlich die Projection von einem Punkt aus durch Gerade auf eine Ebene und die Projection von einer Geraden aus durch Ebenen auf eine Gerade.

§ 5.

Wir schreiten jetzt zu der andern Verallgemeinerung der harmonischen Punkte einer Geraden.

Sind in einer Geraden drei Punkte x_0, x_1, ξ gegeben, so bezeichnet man die Strecken $x_0\xi_1$ und ξx_1 als Teile der Strecke x_0x_1. Entsprechend erklären wir in der Ebene als Teile eines Dreiecks $x_0x_1x_2$ die 3 Dreiecke, welche ein fernerer Punkt ξ mit je zweien der drei Punkte x_0, x_1, x_2 bildet, und in der n-fachen Mannigfaltigkeit sollen die Prismatoide, deren Eckpunkte

$$x_0, \ldots x_{f-1}, \xi, x_{f+1}, \ldots x_n \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

sind, als Teile des Prismatoids $x_r, \ldots x_n$ bezeichnet werden.

Die Berechtigung dieser Bezeichnung liegt, wie bei der Geraden, darin, dass die Summe der Inhalte der Teilprismatoide, jeder allerdings mit einem bestimmten Vorzeichen versehen, dem Inhalt des Grundprismatoids gleich ist.

Sind nämlich die Coordinaten

$$\begin{array}{rll} \text{von} & x_f & x_{fh} \quad (h = 1, 2 \ldots n) \\ \text{und von} & \xi & \xi_h \quad (h = 1, 2 \ldots n) \end{array}$$

so ist der $n!$-fache Inhalt des Prismatoides $x_0, \ldots x_{f-1}, \xi, x_{f+1}, \ldots x_n$:

$$V_f = \| x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} \| \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

setzen wir

$$\operatorname{sgn} | x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} | = \varepsilon_f$$

so kommt:

$$| x_{0h} \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h}, \ldots x_{nh} | = \varepsilon_f V_f \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

oder

$$\sum_h \xi_h D_{hf} = \varepsilon_f V_f$$

Daraus folgt

$$\sum_f \varepsilon_f V_f = \sum_{f,h} \xi_h D_{hf} = \sum_{f,h} \xi_h D_{hf} x_{f0} = \sum_h \xi_h \delta_{h0} D = D$$

$$(f, h = 0, 1 \ldots n)$$

Nun ist

$$D \operatorname{sgn} D = V$$

dem $n!$-fachen Inhalt des Prismatoides $x_0 \ldots x_n$, also kommt,

$$\operatorname{sgn} D = \varepsilon \quad \text{gesetzt}$$

$$\Sigma \varepsilon_f V_f = \varepsilon V \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

woraus die Berechtigung der Bezeichnung „Teilprismatoid" erhellt.

Man sagt: Eine Strecke $x_0 x_1$ wird von zwei Punkten ξ, ξ' harmonisch geteilt, sobald die Strecken $x_0 \xi$ und ξx_1 dasselbe Verhältniss haben, wie die Strecken $x_0 \xi'$ und $\xi' x_1$. Entsprechend erklären wir in der n-fachen Mannigfaltigkeit:

Die Punkte ξ, ξ', ξ'' . . . teilen das Prismatoid $x_0 \ldots x_n$ harmonisch, sobald

$$V_0 : V_1 : \ldots : V_n = V_0' : V_1' ; \ldots : V_n' = V_0'' : V_1'' : \ldots : V_n'' = \ldots$$

ist; dabei haben V_f', V_f'' dieselbe Bedeutung für ξ', ξ'' bezüglich, wie V_f für ξ. Wir wollen die Punkte ξ, ξ', ξ'' . . . harmonisch in Bezug auf das Prismatoid nennen.

Wir stellen uns nun zuvörderst die Aufgabe:

Es sollen sämtliche Punkte bestimmt werden, welche ein gegebenes Prismatoid nach dem Verhältniss $m_0 : m_1 \ldots : m_n$ teilen.

Einer von diesen Teilpunkten sei ξ, so muss also bei Beibehaltung obiger Bezeichnung sein,

$$V_0 : V_1 : \ldots : V_n = m_0 : \ldots : m_n$$

Diese Proportion lässt sich durch das Gleichungssystem

$$V_f = D\lambda m_f \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

wobei λ ein Proportionalitätsfactor ist, ersetzen.

Daraus folgt

$$\left| x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1}, \ldots, x_{nh} \right| = \lambda \varepsilon_f m_f \left| x_{gh} \right|$$
$$(f, g, h = 0, 1 \ldots n)$$

oder

$$\sum_h \xi_h D_{hf} = \varepsilon_f m_f D\lambda$$

daraus

$$\sum_{h,f} \xi_h D_{hf} x_{fk} = \sum_f \varepsilon_f m_f D\lambda x_f \qquad (f, h, k = 0, 1 \ldots n)$$

$$\sum_h \xi_h \delta_{hk} D = D\lambda \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk}$$

$$\xi_k = \lambda \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \qquad (f, k = 0, 1 \ldots n)$$

also kommt, da

$$\xi_0 = \lambda \sum_f \varepsilon_f m_f = 1 \quad \text{ist,}$$

$$\xi_h = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Auf diese Art sind die Coordinaten jedes Punktes bestimmt, welcher das Prismatoid in dem gegebenen Verhältniss teilt.

Da die Grössen $\varepsilon_f (f = 0, 1 \ldots n)$ den Wert ± 1 annehmen können, und es im ganzen 2^{n+1} solcher Zeichencombinationen giebt, so erhält man ebensoviel Werte von ξ_h, die aber nicht alle von einander verschieden sind. Es fragt sich nun, wieviel Punkte ξ sich aus obiger Gleichung ergeben. Es werde ξ bestimmt durch $\varepsilon_f (f = 0, 1 \ldots n)$, ξ' durch $\varepsilon_f' (f = 0, 1 \ldots n)$, so erfordert die Uebereinstimmung von ξ mit ξ' das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} = \frac{\sum_f \varepsilon_f' m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f' m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Hierin kann h auch den Wert 0 annehmen. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\sum_f x_{fh}\left\{\frac{\varepsilon_f}{\sum_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_f'}{\sum_f \varepsilon_f' m_f}\right\} m_f = 0 \quad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

$$\sum_{f,h} m_f x_{fh} D_{hk}\left\{\frac{\varepsilon_f}{\sum_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_f'}{\sum_f \varepsilon_f' m_f}\right\} = 0 \qquad (f, h, k = 0, 1 \ldots n)$$

daraus

$$m_k\left\{\frac{\varepsilon_k}{\sum_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_k'}{\sum_f \varepsilon_f' m_f}\right\} = 0 \qquad (k, f = 0, 1 \ldots n)$$

also kommt

$$\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_h'}{\varepsilon_0'} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Nun können aber ε_0 und ε_0' stets gleich 1 angenommen werden, wie man aus dem Wert von ξ_k ohneweiters sieht, sodass folgt

$$\varepsilon_h = \varepsilon_h' \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

d. h. es giebt soviel Punkte ξ als es Zeichencombinationen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ giebt, nämlich 2^n. Wir haben also den Satz:

Es giebt im ganzen 2^n Punkte, welche ein gegebenes Prismatoid in n Teile von gegebenem Verhältniss teilen. Ihre Coordinaten sind dargestellt durch

$$\xi_k = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Man überzeugt sich auch sofort von der Richtigkeit der Umkehrung, dass ein Punkt, welcher derartige Coordinaten hat, das Prismatoid nach dem Verhältniss $m_0 : m_1 : \ldots : m_n$ teilt.

In der $\mathfrak{M}_n$ sei nun ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung gegeben durch die Punkte x_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ mit den Coordinaten x_{fh} $\begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$. Welches sind die Coordinaten ξ_h eines Punktes ξ, welcher das Prismatoid im Verhältniss $m_0 : m_1 : \ldots : m_\nu$ teilt?

Wir verlegen das Axensystem so, dass die $\mathfrak{M}_\nu$, der das Prismatoid angehört, zur Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk'} = 0 \qquad (k = \nu + 1, \ldots n)$$

wird, benutzen die eben abgeleitete Formel und kehren zu dem alten Coordinatensystem zurück, so ergiebt eine leichte Rechnung:

$$\xi_k = \frac{\sum \varepsilon_f m_f x_{fk}}{\sum \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ k = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das sind also die Coordinaten eines Punktes Ξ, der das Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$ im gegebenen Verhältniss teilt und es ist diese Art der Darstellung notwendig und hinreichend für einen solchen Punkt, wie man leicht sieht.

Wir projiciren jetzt den Punkt Ξ, der in der $\mathfrak{M}_n$ das Prismatoid $x_0, \ldots x_n$ nach dem Verhältniss $m_0 : \ldots ; m_n$ teilt und durch das Vorzeichensystem $\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_n$ bestimmt ist, von der durch die Punkte x_k $(k = \nu+1 \ldots n)$ gebildeten $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ aus auf die durch x_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ bestimmte $\mathfrak{M}_\nu$. Dadurch entstehe der Punkt η; dessen Coordinaten sollen nun ermittelt werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die $\mathfrak{M}_\nu$ sei die Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk} = 0 \qquad (k = \nu+1, \ldots n)$$

dann ist also

$$\eta_{ik} = x_{fk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ k = \nu+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

zu setzen. Die projicirende $\mathfrak{M}_{n-\nu}$, welche durch x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$ und ξ geht, hat das Gleichungssystem:

$$x_{ph} - \xi_h = \sum_k (x_{kh} - \xi_h) t_k \qquad \begin{pmatrix} k = \nu+1, \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

und da η auf dieser Mannigfaltigkeit liegt, so giebt es ein Wertsystem τ_k, welches die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta_g - \xi_g &= \sum_r (x_{rg} - \xi_g) \tau_r \\ -\xi_k &= \sum (x_{rk} - \xi_k) \tau_r \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k,\ r = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Hieraus folgt

$$\eta_g \begin{vmatrix} 1 \ldots \xi_k \ldots \\ \ldots \ldots \\ 1 \ldots x_{rk} \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_g \ldots \xi_k \ldots \\ \ldots \ldots \\ x_{rg} \ldots x_{rk} \ldots \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k,\ r = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

oder

$$\eta_g \begin{vmatrix} \sum_f \varepsilon_f m_f, & \ldots, & \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \\ 1, & & x_{rk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fg}, & \ldots, & \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \\ x_{rg}, & \ldots, & x_{rk} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots \nu \\ k, r = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

daraus nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung von

$$x_{fk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ k = \nu+1, \ldots n \end{pmatrix}:$$

$$\eta_g \sum_f \varepsilon_f m_f \mid x_{rk} \mid = \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fg} \mid x_{rk} \mid \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots \nu \\ k, r = \nu+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

also schliesslich:

$$\eta_g = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fg}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

d. h. aber: der Punkt η teilt das Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$ im Verhältniss $m_0 : m_1 : \ldots m_r$.

Nehmen wir das Coordinatensystem wieder ganz allgemein an, so erhält η die Coordinaten:

$$\eta_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

An diesem Ausdruck sieht man, dass jeder Punkt ξ, welcher sich von dem, der uns als Ausgang diente, nur durch eine Verschiedenheit in den ε_k ($k > \nu$) auszeichnet, dieselbe Projection liefert, daraus folgt aber, dass alle Punkte ξ, die in den Zeichen $\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_\nu$ übereinstimmen und deren es im Ganzen $2^{n-\nu}$ giebt, auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen, welche die Grenz-$\mathfrak{M}_{n-r-1}$ des Prismatoides $x_0, \ldots x_n$, die die Punkte x_k ($k = \nu+1 \ldots n$) bestimmen, enthält.

Bei Aenderung der Bezeichnung, haben wir demnach folgenden Satz:

2^r von den harmonischen Punkten, die in den Vorzeichen ε_{i_t} ($t = \nu+1, \ldots n$) übereinstimmen, liegen auf einer $\mathfrak{M}_r$, die die durch die Punkte x_{i_s} ($s = 0, 1 \ldots \nu-1$) dargestellte $\mathfrak{M}_{r-1}$ enthält. Dabei bedeutet $(\ldots i_h \ldots)_{(h=0,1\ldots n)}$ irgend eine Permutation der Zahlen $0, 1 \ldots n$.

Es sei jetzt ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung gegeben, bestimmt durch die Punkte x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ mit den Coordinaten x_{gh} $(h = 1, 2 \ldots n)$; dasselbe sei im Verhältniss $m_0 : \ldots : m_\nu$ harmonisch geteilt, dann sind die Teilpunkte dargestellt durch die Coordinaten

$$\xi_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Alle Punkte dieser $\mathfrak{M}_r$ projiciren wir jetzt von einer $\mathfrak{M}_{n-r-1}$, gegeben durch die Punkte x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$, aus auf $\mathfrak{M}_{\nu'}$. x_g' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$, ξ' seien die Projectionen von x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ bzhw. ξ. Dann teilen die Punkte ξ' das Prismatoid x_g' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ harmonisch. Das giebt den Satz:

Teilen Punkte ein Prismatoid harmonisch, so bleibt diese Eigenschaft durch Projection ungeändert.

Da dieser Satz nach denselben Principien bewiesen wird, wie der entsprechende des vorg. §, so übergehen wir den Beweis. Setzen wir

$$m_g \mid x_{ki} - x_{gi} \mid = m_g' \qquad \begin{pmatrix} i, k = \nu+1, \ldots n \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

so ergiebt sich:

$$\xi_f' = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g' x_{gf}'}{\sum_g \varepsilon_g m_g'} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ f = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das neue Teilungsverhältniss stimmt allerdings mit dem ursprünglichen nicht überein.

Wir betrachten nun wieder in der $\mathfrak{M}_n$ das Prismatoid x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$, das durch die Punkte ξ harmonisch geteilt ist. Halten wir die Zeichen $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_r$ fest und lassen $\varepsilon_{r+1} \ldots \varepsilon_n$ sich verändern, so werden dadurch 2^{n-r} Punkte ξ bestimmt, welche, wie wir gesehen haben, mit den Punkten x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$ auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen. Letztere schneidet die durch die Punkte x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ gebildete $\mathfrak{M}_\nu$ in einem Punkte η, dessen Coordinaten wir als

$$\eta_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

gefunden haben. In der $\mathfrak{M}_{n-r}$ bilden die Punkte $\eta, x_{r+1}, \ldots x_n$ ein Prismatoid. Wir wollen beweisen, dass dieses durch die oben ausgewählten Punkte ξ harmonisch geteilt wird.

Es war

$$\xi_h \sum_f \varepsilon_f m_f = \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\xi_h \sum_{f=0}^{n} \varepsilon_f m_f = \eta_h \sum_{g=0}^{r} \varepsilon_g m_g + \sum_{k=r+1}^{n} \varepsilon_k m_k x_{kh} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Setzen wir

$$\operatorname{sgn} \sum_{g=0}^{n} \varepsilon_g m_g = \bar{\varepsilon}$$

$$\sum_{g=0}^{r} \varepsilon_g m_g = \bar{\varepsilon}\,\bar{m}$$

so kommt:

$$\xi_h = \frac{\bar{\varepsilon}\, m\, \eta_h + \sum_k \varepsilon_k m_k x_{kh}}{\bar{\varepsilon}\, m + \sum_k \varepsilon_k m_k} \qquad \begin{pmatrix} k = r+1, \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

damit ist die Behauptung erwiesen; das Teilungsverhältniss ist $\bar{m} : m_{r+1} : \ldots m_n$, wenn das Prismatoid in der Reihenfolge η, $x_{r+1}, \ldots x_n$ genannt wird.

§ 6.

Die im vorigen § entwickelten Sätze führen durch die Annahme besonderer Werte für das Teilungsverhältniss des Prismatoides zu den Verallgemeinerungen einiger bekannter Sätze der Elementargeometrie.

Z. B. liefert die Annahme

$$m_0 = m_1 = \ldots = m_n$$

einen als Schwerpunkt des Prismatoides zu bezeichnenden Punkt, die Annahme

$$m_f = J_f \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

wenn J_f den Inhalt des durch die Punkte $x_{f'}$ $(f' = 0, 1 \ldots (f) \ldots n)$gebildeten Prismatoides $n-1$-facher Ausdehnung bezeichnet, die Mittelpunkte derjenigen sphärischen Mannigfaltigkeiten,

welche sämtliche $n+1$ Grenz-$\mathfrak{M}_{n-1}$ berühren. Unschwer ergeben sich ferner die Verallgemeinerungen des für das Dreieck geltenden Cevaschen Satzes von den Wechselabschnitten und des Satzes, dass die Halbirungslinie eines Winkels im Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der beiden andern Seiten teilt.

Hierauf besonders einzugehen, unterlassen wir aber, um nicht den Rahmen dieser Arbeit zu sehr zu erweitern.

Ebenso wollen wir auch nur ganz kurz bemerken, dass der Satz: Eine zu einem von vier harmonischen Strahlen parallele Strecke, welche die beiden andern zugeordneten Strahlen begrenzen, wird durch den dem ersten zugeordneten Strahl halbirt, — eine ganz interessante Erweiterung zulässt. An die Stelle der Strecke und deren Halbirungspunktes tritt ein Gebilde und dessen Mittelpunkt, das als die Verallgemeinerung eines Parallelepipedons im Raume bezeichnet werden muss. Da wir die Absicht haben an einer andern Stelle hierauf genauer einzugehen, begnügen wir uns mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 7.

Zum Schlusse der vorliegenden Arbeit soll nun noch die Frage nach der conformen Abbildung einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit auf eine andre ihre Erledigung finden. Die Ergebnisse dieses Paragraphen sind im wesentlichen Verallgemeinerungen des von Liouville in den Anmerkungen zu Monge's Applications . . . bewiesenen Satzes, dass für den dreidimensionalen Raum es nur eine conforme Abbildung giebt und dass diese, abgesehen von Verschiebungen und Drehungen, durch Transformation vermittest reciproker Radien entstanden gedacht werden kann.

Zunächst erklären wir zwei $\mathfrak{M}_n$ als ähnlich, sobald die Entfernungen je zweier entsprechenden Punkte dasselbe Verhältniss zeigen; eine $\mathfrak{M}_n$ soll dann ein conformes Abbild einer andern heissen, wenn die Umgebungen entsprechender Punkte ähnlich sind. Die Punkte der einen Mannigfaltigkeit mögen durch die Coordinaten x_h $(h = 1, 2 \ldots n)$, die der andern durch ξ_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ dargestellt sein, $x_h + dx_h$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ bezüglich $x_h + \delta x_h$ sollen zwei benachbarte Punkte von (x_h) bezeichen, ihre entsprechenden seien $(\xi_h + d\xi_h)$ und $(\xi_h + \delta\xi_h)$ $(h = 1. 2 \ldots n)$. Dann erfordert die Definition der conformen Abbildung, dass

$$(1 \qquad \sum_h (d\xi_h - \delta\xi_h)^2 = m^2 \sum_h (dx_h - \delta x_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

für jedes beliebige dx_h und δx_h ist. Nun ist

$$d\xi_h = \sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \xi_{h\,i} dx_i \quad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

wobei

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} = \xi_{h\,i}$$

gesetzt ist; ebenso

$$\delta\xi_h = \sum_i \xi_{h\,i} \delta x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Mit Benutzung hiervon nimmt Gleichung 1) die Gestalt an:

$$\sum_{h,i,k} \xi_{h\,i}\xi_{h\,k}(dx_i - \delta x_i)(dx_k - \delta x_k) = m^2 \sum_h (dx_h - \delta x_h)^2$$
$$(h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Diese Gleichung kann, weil dx_h und δx_h vollständig willkürlich sind, nur bestehen, wenn

2) $$\sum_i \xi_{h\,i}\xi_{h\,k} = m^2 \delta_{i\,k} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

ist. Das sind also die Bedingungsgleichungen, die die Functionen ξ_h der Grössen x_h $(h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$ zu erfüllen haben, damit die Abbildung eine conforme sei. Den Gleichungen 2) können wir noch eine andre Form geben; multipliciren wir nämlich mit ξ_{fi} und summiren, so kommt:

$$\sum_{h,i} \xi_{f\,i}\xi_{h\,i}\xi_{h\,k} = \sum_i m^2 \delta_{i\,k}\xi_{f\,i} = m^2 \xi_{f\,k} = m^2 \sum_h \delta_{f\,h}\xi_{h\,k}$$

oder

$$\sum_h \xi_{h\,k}(\sum_i \xi_{f\,i}\xi_{h\,i} - \delta_{f\,h} m^2) = 0 \quad (f,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Da nun die Determinante $|\ \xi_{h\,k}\ |$ $(h,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$ nicht verschwindet, wie man durch Bilden von

$$|\ \xi_{h\,k}\ |^2 = |\ \xi_{h\,i}\ |\ |\ \xi_{h\,k}\ | = |\ \sum_h \xi_{h\,i}\xi_{h\,k}\ | = |\ \delta_{i\,k} m^2\ | = m^{2n}$$
$$(h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

sieht, so folgt

$$\sum_i \xi_{f\,i}\xi_{h\,i} - \delta_{f\,h} m^2 = 0$$

oder mit Buchstabenänderung:

2a) $$\sum_h \xi_{i\,h}\xi_{k\,h} = \delta_{i\,k} m^2 \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den Gleichungen 2).

Nun ist:

$$d\xi_h = \sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,k} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

daraus folgt, da die $d\xi_h$ ($h = 1, 2 \ldots n$) von einander unabhängig sind,

$$\sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \delta_{hk} \quad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

oder, wenn wir

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

setzen,

$$\sum_i \xi_{hi} x_{ik} = \delta_{hk}$$

Hieraus findet man wieder:

$$\sum_{h,i} \xi_{hf} \xi_{hi} x_{ik} = \sum_h \xi_{hf} \delta_{hk}$$

oder in Verbindung mit 2)

$$\sum_i x_{ik} \delta_{if} m^2 = \sum_h \xi_{hf} \delta_{hk}$$

also schliesslich:

3) $$x_{fk} m^2 = \xi_{kf} \qquad (f, k = 1, 2 \ldots n)$$

Aus 2a) ergiebt sich durch Differentiation nach x_f:

$$\sum_h \left(\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x_f} \xi_{kh} + \frac{\partial \xi_{kh}}{\partial x_f} \xi_{ih} \right) = 0 \qquad (i \gtrless k)$$

oder mit Hilfe von 3)

$$\sum_h \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_f \partial x_h} x_{hk} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_f \partial x_h} x_{hi} \right) = 0$$

$$\sum_h \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial x_h} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \right) = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial \xi_{if}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial \xi_i} = 0$$

oder

4) $$\frac{\partial \xi_{if}}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial \xi_{kf}}{\partial \xi_i} \qquad (f, i, k = 1, 2 \ldots n; \; i \gtrless k)$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_h} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_h} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right)$$

daraus folgt

$$\frac{\partial x_{ih}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_{ik}}{\partial \xi_h} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

also

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\xi_{hi}}{m^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_h} \left(\frac{\xi_{ki}}{m^2} \right)$$

$$\frac{1}{m^2}\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} - \frac{2}{m^3}\xi_{hi}\frac{\partial m}{\partial \xi_k} = \frac{1}{m^2}\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h} - \frac{2}{m^3}\xi_{ki}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$$

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h} = 2\left(\xi \frac{\partial \log m}{\partial \xi_k} - \xi_{ki}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_h}\right)$$

daraus in Rücksicht auf 4)

$$5) \quad \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \xi_{hi}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_k} - \xi_{ki}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_h} \qquad \left(\begin{matrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ h \gtrless k \end{matrix}\right)$$

oder auch, wenn $\log m = M$ gesetzt und die Differentiation durch Zeiger ausgedrückt wird:

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \xi_{hi} M_k - \xi_{ki} M_h$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_h} = \sum_k \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_k} x_{kh} = \frac{1}{m^2}\sum_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_k}\xi_{hk} = \frac{1}{m^2}\sum_k \xi_{hk}\frac{\partial \xi_{hk}}{\partial x_i}$$
$$= -\frac{1}{2m^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \xi_{hk}^2\right) = \frac{1}{2m^2}\frac{\partial (m^2)}{\partial x_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial M}{\partial \xi_k}\xi_{ki}$$
$$(h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

also haben wir:

$$6) \quad \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_h} = \sum_k M_k \xi_{ki} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Aus der Gleichung 5), in der wir g statt k schreiben wollen, folgt durch Differentiation nach ξ_f (f nicht $= g$)

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_f \partial \xi_g} = \xi_{hi} M_{fg} - \xi_{gi} M_{fh} + M_g \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_f} - M_h \frac{\partial \xi_{gi}}{\partial \xi_f} \quad \text{oder infolge 5)}$$
$$= \xi_{hi}(M_{fg} + M_f M_g) - \xi_{gi}(M_{fh} + M_f M_h)$$
$$\left(\begin{matrix} f,\ g,\ h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f\ .\ g,\ h \text{ ungleich} \end{matrix}\right)$$

Eine Vertauschung von f und g lässt die linke Seite ungeändert, verwandelt dagegen die rechte in

$$\xi_{hi}(M_{fg} + M_f M_g) - \xi_{fi}(M_{gh} + M_h M_g)$$

demnach muss

$$\xi_{fi}(M_{gh} + M_g M_h) = \xi_{gi}(M_{fh} + M_f M_h) \qquad \left(\begin{matrix} f,\ g.\ h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f,\ g,\ h \text{ ungleich} \end{matrix}\right)$$

sein. Hieraus folgt:

$$\sum_i \xi_{ki}\,\xi_{fi}(M_{gh}+M_g M_h) = \sum_i \xi_{ki}\,\xi_{gi}(M_{fh}+M_f M_h)$$

oder in Rücksicht auf 2a)

$$\delta_{fk}(M_{gh}+M_g M_h) = \delta_{gk}(M_{fh}+M_f M_h) \qquad \begin{pmatrix} f,\ g,\ h,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f,\ g,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

d. h. es ist überhaupt

7) $\qquad M_{gk}+M_g M_h = 0 \qquad (g,\ h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n;\ \ g,\ h$ ungleich)

Weiter ist

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\{\xi_{hi} M_k - \xi_{ki} M_h\} \quad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n;\ h, k \text{ ungleich})$$

$$= \xi_{hi} M_{hk} - \xi_{ki} M_{hh} + M_k \sum_f M_f \xi_{fi} - M_h(\xi_{ki} M_h - \xi_{hi} M_k)$$

$$= \xi_{hi}(M_{hk}+2M_h M_k) - \xi_{ki}(M_{hh} - M_k{}^2 + M_h{}^2) + \sum_\mu \xi_{\mu i} M_\mu M_k$$

$(h,\ i,\ k,\ f = 1.\ 2\ .\ .\ .\ n;\ h, k$ ungleich $\mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h)\ (k)\ .\ .\ .\ n)$

Ebenso ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\sum_f M_f \xi_{fi}\right) = \sum_\lambda \left(M_{\lambda k}\xi_{\lambda i} + M_\lambda \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial \xi_k}\right)$$

$$+ M_{kk}\xi_{ki} + M_k \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_k}$$

$$= \sum_\lambda \{M_{\lambda k}\xi_{\lambda i} + M_\lambda M_k \xi_{\lambda i} - M_\lambda{}^2 \xi_{ki}\} + M_{kk}\xi_{ki} + M_k \sum_f M_f \xi_{fi}$$

$(f.\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n,\quad \lambda = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (k)\ .\ .\ .\ n;\quad h,\quad$ ungleich)

oder

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \xi_{hi}(M_{hk}+2M_h M_k) + \xi_{ki}(M_{kk}+M_k{}^2 - \sum_\lambda M_\lambda{}^2)$$

$$+ \sum_\mu \xi_{\mu i}(M_{\mu k}+2M_\mu M_k)$$

$$\begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ \lambda = 1,\ 2 \ldots (k)\ldots n;\ h, k \text{ ungleich} \\ \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h)\ (k)\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Die Vergleichung der beiden Werte von $\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k}$ liefert:

$$\xi_{ki}(M_{kk}+M_{hh} - \sum_\mu M_\mu{}^2) + \sum_\mu \xi_{\mu i}(M_{\mu k}+M_\mu M_k) = 0$$

In Verbindung mit 7) folgt hieraus schliesslich

8) $\qquad M_{hh}+M_{kk} = \sum_\mu M_\mu{}^2 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h,k)\ .\ .\ .\ n \\ h, k = 1, 2 \ldots n;\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$

Berücksichtigt man noch, dass

$$M_h = \frac{\partial \log m}{\partial \xi_h} = \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$$

$$M_{hk} = \frac{\partial^2 \log m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} - \frac{1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}\frac{\partial m}{\partial \xi_k} \quad (h, k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, so gehen die Gleichungen 7) und 8) über in:

9) $$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = 0$$

10) $$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_k^2} = \sum_i \frac{1}{m}\left(\frac{\partial m}{\partial \xi_i}\right)^2 \quad \begin{pmatrix} h, i, k = 1, 2 \ldots n \\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Aus 9) folgt, dass $\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$ unabhängig von ξ_k $(k = 1, 2 \ldots (h) \ldots n)$ d. h. es ist eine Function von ξ_h allein. Wir können also setzen

$$\frac{\partial m}{\partial \xi_h} = f_h'(\xi_h)$$

mithin:

$$m = f_h(\xi_h) + \Phi(\xi_1 \ldots \xi_{h-1}, \xi_{h+1} \ldots \xi_n)$$

Diese Ueberlegung gilt aber für jedes h, mithin muss m die Form haben

11) $$m = \sum_h f_h(\xi_h) \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Mit Hilfe hiervon folgt aus 10) dann weiter:

$$f_h''(\xi_h) + f_k''(\xi_k) = \frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i (f_i(\xi_i)} \quad \begin{pmatrix} h, i, k = 1, 2 \ldots n) \\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck rechter Hand ist eine symmetrische Function aller ξ_h, er ist aber infolge der linken Seite unabhängig von allen ξ mit Ausschluss von ξ_h und ξ_k, mithin ist er überhaupt constant, also

$$f_h''(\xi_h) + f_k''(\xi_k) = C \qquad (h, k = 1, 2 \ldots n; \quad h, k \text{ ungleich})$$

$$f_g''(\xi_h) + f_i''(\xi_i) = C$$

daraus folgt

$$f_i'(\xi_i) + f_k''(\xi_k) = C \qquad (h, i, k \text{ ungleich})$$

Diese Gleichungen liefern

$$f_h''(\xi_h) = \frac{C}{2} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass C nicht verschwindet, und setzen

$$C = \frac{4}{\varrho}$$

dann kommt:

$$f_h''(\xi_h) = \frac{2}{\varrho} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

woraus

$$f_h(\xi_h) = \frac{(\xi_h - \alpha_h)^2}{\varrho} + \beta_h \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

bei geeigneter Wahl der willkürlichen Constanten sich ergiebt.

Mit dieser Bestimmung wird:

$$\frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i f_i(\xi_i)} = \frac{\left(\frac{2}{\varrho}\right)^2 \sum_i (\xi_i - \alpha_i)^2}{\frac{1}{\varrho}\sum_i (\xi_i - \alpha_i)^2 + \sum_i \beta_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

damit dieser Ausdruck constant werde, ist notwendig und hinreichend, dass $\sum_i \beta_i$ verschwinde. Darnach wird also

$$m = \frac{1}{\varrho}\sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\sum_h x_{hi} x_{hk} = \delta_{ik} \frac{1}{m^2} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

das aus 2a) mit Hilfe von 3) folgt, ergiebt sich in Rücksicht auf die gewonnenen Ergebnisse ohneweiteres

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{r}\sum_h (x_h - a_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Bemerken wir noch, dass in den vorstehenden Betrachtungen davon Gebrauch gemacht wurde, dass n mindestens $= 3$, so können wir das Resultat, das wir soeben erlangt haben, so aussprechen:

Abgesehen von dem noch zu erledigenden Fall $C = 0$ ist eine conforme Abbildung zweier ebenen n-fachen Mannigfaltigkeiten ($n > 2$) nur dann möglich, wenn die Function m den Bedingungen genügt

12) $\quad m = \frac{1}{\varrho}\sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2; \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{r}\sum_h (x_h - a_h)^2 \quad (h = 1, 2 \ldots n)$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$13) \qquad \sum_h (x_h - a_h)^2 \cdot \sum_h (\xi_h - a_h)^2 = r\varrho$$

woraus man schon erkennen kann, dass, abgesehen von Verschiebung und Drehung, die conforme Abbildung identisch ist mit der Transformation nach reciproken Radien. Um dies noch genauer einzusehen und formelmässig darzustellen, verfahren wir folgendermassen: Es seien ξ_h und $\bar{\xi}_h$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ zwei Lösungen der Differentialgleichungen 2), zu demselben m, dessen Form wir ja für alle Fälle festgestellt haben, gehörig, dann folgt aus

$$\sum \xi_{hf}\, \bar{\xi}_{hg} = \delta_{fg} m^2 \qquad (h, f, g = 1, 2 \ldots n)$$

mit Hilfe von

$$\bar{\xi}_{hf} = \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial x_f} = \sum_i \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_i} \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial x_f} = \sum_i \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_i} \xi_{if} \qquad (h, i, f = 1, 2 \ldots n)$$

das Gleichungssystem:

$$\sum_{h,i,j} \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_i} \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_j} \xi_{if}\, \xi_{jg} = \delta_{fg} m^2 \quad (f, g, h, i, j = 1, 2 \ldots n)$$

Multiplicirt man mit ξ_{kg} und summirt, so kommt:

$$\sum_{h,i,j} \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_i} \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_j} \xi_{if} \sum_g \xi_{jg}\, \xi_{kg} = \sum_g \delta_{fg} m^2 \xi_{kg}$$

oder in Rücksicht auf 2a):

$$\sum_i \xi_{if} \left(\sum_h \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_i} \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_k} - \delta_{ik} \right) = 0 \qquad (f, h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

also, da

$$|\, \xi_{if} \,| \text{ nicht} = 0 \qquad (i, f = 1, 2 \ldots n)$$

$$14) \qquad \sum_h \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_i} \frac{\partial \bar{\xi}_h}{\partial \bar{\xi}_k} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Dieses Differentialgleichungssystem stimmt überein mit dem System 2), wenn in diesem

$$m = 1, \quad \xi_h = \bar{\xi}_h, \quad x_h = \xi_h$$

gesetzt werden; mit der Auflösung der Gleichungen

$$15) \qquad \Sigma \xi_{hi} \xi_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

haben wir also zugleich die des Systems 14). Die Gleichungen 5) und 6) werden für den speciellen Fall $m = 1$ zu

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = 0 \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \sum_f \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_f}\,\frac{\partial x_f}{\partial \xi_k} = \frac{1}{m^2}\sum_f \xi_{kf}\,\frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f\,\partial x_i}$$

also kommt:

$$\sum_f \xi_{kf}\,\frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = 0 \qquad (f,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

daraus

$$\sum_{k,f} \xi_{kg}\,\xi_{kf}\,\frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = \sum_f \delta_{fg}\,\frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f\,\partial x_i} = \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_g\,\partial x_i} = 0$$

$$(f,\ g,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

d. h. aber, es ist

16) $$\xi_h = c_h + \sum_i a_{hi}\,x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

und da

$$\xi_{hi} = a_{hi}$$

ist, so müssen die Constanten a_{hi} den Bedingungen

$$\sum_h a_{hi}\,a_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

genügen. Demnach folgt aus dem Gleichungssystem 14):

$$\xi_h = c_h + \sum_k a_{hk}\,\xi_k$$

mit der Massgabe:

$$\sum a_{hi}\,a_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Jede zu demselben m gehörige Lösung der Differentialgleichungen 2) lässt sich mithin aus einer einzigen auf diese Weise herleiten. Um nun eine solche aufzustellen, beweisen wir zunächst, dass die Constanten r und ϱ einander gleich sind; das geschieht so:

$$\frac{\partial^2 \binom{1}{m}}{\partial x_h^2} = \frac{\partial}{\partial x_h}\sum_i \left(\frac{\partial \binom{1}{m}}{\partial \xi_i}\,\xi_{ih}\right) = \frac{\partial}{\partial x_h}\left(-\sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i}\,x_{hi}\right)$$

$$(i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

$$= -\sum_k \xi_{kh}\,\frac{\partial}{\partial \xi_k}\sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i}\,x_{hi} \qquad (i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

$$= -m^2 \sum_{i,k} x_{hk}\left(\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i\,\partial \xi_k}\,x_{hi} + \frac{\partial m}{\partial \xi_i}\,\frac{\partial x_{hi}}{\partial \xi_k}\right)$$

$$= -m^2 \sum_{i,k} x_{hi}\, x_{kr} \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k} - \frac{m^2}{2} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_k x_{hk}^2\right)$$

$$= -\frac{1}{m^2} \sum_{i,k} \xi_{ih}\, \xi_{kk} \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k} - \frac{m^2}{2} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Mit Benutzung von 2) und 12) folgt hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{\varrho}$$

d. h.

17) $$r = \varrho$$

Setzt man nun

$$\xi_h = \frac{r(x_h - a_h)}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

so werden — man überzeugt sich davon leicht — die Gleichungen 2) befriedigt für den allgemeinsten Wert, den m haben kann,

$$m = \frac{r}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Daraus folgt in Verbindung mit 15), dass die allgemeinste Lösung di eses Gleichungssystems überhaupt enthalten ist in der Form

18) $$\xi_h = c_h + r \sum_i \alpha_{hi} \frac{x_i - a_i}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

mit der Massgabe:

$$\sum_h \alpha_{hi}\, \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Nun ist noch der Fall zu erledigen, dass die Constante C verschwindet; hierfür wird:

$$f_h''(\xi_h) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i f_i(\xi_i)} = 0$$

$$(h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

d. h.

$$f_h''(\xi_h) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_h'(\xi_h) = 0 \quad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

mithin kommt

$$f_h(\xi_h) = \text{const}$$

also ist m selbst constant. Für diesen Fall können die Differentialgleichungen 2) in der Form geschrieben werden:

$$\sum_h \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\xi_h}{m}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\xi_h}{m}\right) = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Dieses Gleichungssystem stimmt überein mit dem System 15), mithin folgt hieraus:

$$\frac{\xi_h}{m} = c_h' + \sum_i a_{hi} x_i$$

oder auch

$$\xi_h = c_h + m \sum_i a_{hi} x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

die a_{hi} müssen dabei den Bedingungen genügen:

$$\sum_h a_{hi}\, a_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Die hierdurch bestimmte Abbildung drückt die Aehnlichkeit und für den Fall $m = 1$ die Congruenz der beiden Mannigfaltigkeiten aus.

Demnach haben wir das Endergebniss:

„Eine ebene n-fache Mannigfaltigkeit ($n > 2$) lässt sich auf „eine andre ebene n-fache Mannigfaltigkeit nur auf zwei Arten con„form abbilden, entweder so, dass beide ähnlich sind — diese Ab„bildung wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$\xi_h = c_h + m \sum_i a_{hi} x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

„oder so, dass die eine n-fache Mannigfaltigkeit sich aus der andern „mit Hilfe der Transformation durch reciproke Radien und eine „Coordinatentransformation herleiten lässt — diese Abbildung wird „durch die Gleichungen

$$\xi_h = c_h + r \sum_i a_{hi} \frac{x_h - a_h}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

„vermittelt; in beiden Fällen genügen die α_{hi} den Bedingungen

$$\sum_h \alpha_{hi}\,\alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Zum Schluss dieser Betrachtungen wollen wir noch auf einen merkwürdigen Unterschied zwischen der conformen Abbildung zweier n-fachen ebenen Mannigfaltigkeiten ($n > 2$) und der zweier Ebenen aufmerksam machen und eine Gleichung herleiten, die diesen Unterschied recht erkennen lässt. Es ist

$$\sum_i \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_i} = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} \xi_{ki} + \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h} \xi_{hi} \right)$$

$$\begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ k,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \left(\sum_k \xi_{ki} (\xi_{hi} M_k - \xi_{ki} M_k) + \xi_{hi} \sum_f M_f \xi_{fi} \right)$$

$$\begin{pmatrix} f,\ h,\ i.\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ a \\ k,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_k \left(M_k \sum_i \xi_{hi}\,\xi_{hi} - M_h \sum_i \xi_{ki}^2 \right) + \sum_f M_f \sum_i \xi_{fi}\,\xi_{hi}$$

$$= \sum_k (M_k \delta_{hk} m^2 - M_h m^2) + \sum_f M_f \delta_{fh} m^2$$

$$= -(n-1) M_h m^2 + M_h m^2 = -(n-2) M_h m^2$$

Für $n = 2$ folgt hieraus die bekannte Beziehung

$$\Delta \xi_h = \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (h = 1,\ 2)$$

die also nur für diesen speciellen Fall gilt.

XIX.

Dreiteilung jedes Winkels mittelst fester Kegelschnitte.

(Vierter Artikel.)

Von

Wilhelm Panzerbieter.

Während in den früheren Mitteilungen diejenigen Kegelschnitte angegeben worden sind, welche sich in dem Scheitel C des rechten Winkels ACB und den Trisectionspunkten P_1, P_2 und P_3 der zu den Centriwinkeln $BMC(2\alpha)$, $AMC(180^0 - 2\alpha$ oder $2\beta)$, $360^0 \mp 2\alpha$ und $360^0 \mp 2\beta$ gehörigen Bogen schneiden, soll nunmehr die Lage der Schnittpunkte derjenigen Kegelschnitte bestimmt werden, welche den vorigen congruent sind und von denen die eine Gruppe (I) durch B und die Trisectionspunkte P_1', P_2' und P_3', die andere Gruppe (II) durch A und die Trisectionspunkte P_1'', P_2'' und P_3'' derselben Bogen gelegt sind.

Verlängert man den Radius CM durch M, bis der Kreis in D geschnitten wird, teilt MD in zwölf gleiche Teile und bezeichnet den (von M aus zu zählenden) zweiten Teilpunkt mit T, den dritten mit U, den vierten mit V und den sechsten mit W, so ist der Schnittpunkt der durch T zur Sehne BC (a) und der durch W zur Sehne AC (b) gelegten Parallelen der Mittelpunkt O'' der Trisectionsellipse (II); ihre halbe kleine Achse b_1'' ist gleich $\sqrt{\frac{25\,b^2}{144} + \frac{3\,a^2}{16}}$, ihre halbe grosse Achse a_1'' gleich $b_1'' \cdot \sqrt{3}$ und ihre Mittelpunktsgleichung lautet:

$$x^2 + 3y^2 = \frac{25\,b^2}{48} + \frac{9\,a^2}{16}$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von O'' nach U, so erhält diese Gleichung, da $x - \frac{a}{8}$ für x und $y - \frac{b}{24}$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$x^2 - \frac{a}{4}x + 3y^2 - \frac{b}{4}y = \frac{33b^2 + 35a^2}{64} \qquad (1)$$

Der Schnittpunkt der durch T zu AC und der durch W zu BC gelegten Parallelen ist der Mittelpunkt O' der Trisectionsellipse (I); ihre halbe kleine Achse b_1' ist gleich $\sqrt{\frac{25a^2}{144} + \frac{3b^2}{16}}$; ihre halbe grosse Achse a_1' gleich $b_1' \cdot \sqrt{3}$ und ihre auf dasselbe durch U gelegte Achsensystem bezogene Gleichung lautet:

$$y^2 + \frac{b}{4}y + 3x^2 + \frac{a}{4}x = \frac{33a^2 + 35b^2}{64} \qquad (2)$$

Durch Addition der Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich:

$$x^2 + y^2 = \frac{17(a^2 + b^2)}{64}$$

und da $a^2 + b^2 = 4r^2$ ist:

$$x^2 + y^2 = r^2 + \left(\frac{r}{4}\right)^2 \qquad (3)$$

durch Subtraction derselben Gleichungen:

$$\left(y^2 - \frac{b}{4}y + \frac{b^2}{64}\right) - \left(x^2 + \frac{a}{4}x + \frac{a^2}{64}\right) = 0$$

oder:

$$\left(y - \frac{b}{8}\right)^2 - \left(x + \frac{a}{8}\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

Ist daher $C'D'$ der auf CD senkrechte Durchmesser, so stellt die Gleichung (3) den Kreis um U mit dem Radius UC' und die Gleichung (4) zwei in M sich schneidende gerade Linien dar, welche mit den Halbirungslinien der Winkel 2α und $180^0 - 2\alpha$ Winkel von 45^0 bilden. Da nun die Coordinaten der Schnittpunkte der Trisectionsellipsen (I) und (II) auch den Gleichungen (3) und (4) genügen müssen, so fallen diese Schnittpunkte mit denen des Kreises (3) und der durch (4) dargestellten Geraden zusammen. —

Die durch U zu BC parallel gelegte Gerade ist die Achse der Trisectionsparabel (II) [1]). Ihr Parameter ist gleich $\frac{a}{4}$; ihr Scheitel J'' ist um $\frac{(\frac{3}{4}b)^2}{a}$ von AC (nach links) entfernt und ihre Scheitelgleichung lautet:

$$y^2 = \frac{a}{4}x$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von J'' nach W, so erhält

1) cf. meine Abhandlung zum Programm des Falkrealgymn. zu Berlin. Ostern 1892.

diese Gleichung, da $x+\frac{(\frac{3}{4}b)^2}{a}+\frac{3a}{4}$ für x und $y-\frac{b}{8}$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$y^2-\frac{b}{4}y+\frac{b^2}{64}=\frac{a}{4}x+\frac{9b^2}{64}+\frac{3a^2}{16}$$

oder:

$$y^2-\frac{b}{4}y-\frac{a}{4}x=\frac{b^2}{8}+\frac{3a^2}{16} \qquad (5)$$

Die durch U zu AC parallel gelegte Gerade ist die Achse der Trisectionsparabel (I). Ihr Parameter ist gleich $\frac{b}{4}$; ihr Scheitel J' ist um $\frac{(\frac{3}{4}a)^2}{b}$ von BC (nach oben) entfernt und ihre auf dasselbe durch W gelegte Achsensystem bezogene Gleichung lautet:

$$x^2+\frac{a}{4}x+\frac{b}{4}y=\frac{a^2}{8}+\frac{3b^2}{16} \qquad (6)$$

Durch Addition der Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich:

$$x^2+y^2=\frac{5(a^2+b^2)}{16}$$

oder:

$$x^2+y^2=r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2 \qquad (7)$$

durch Subtraction derselben Gleichungen:

$$y^2-\frac{b}{2}y+\frac{b^2}{16}-\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{16}\right)=0$$

oder:

$$\left(y-\frac{b}{4}\right)^2-\left(x+\frac{a}{4}\right)^2=0 \qquad (8)$$

Die Schnittpunkte der Trisectionsparabeln (I) und (II) fallen daher mit denen des Kreises um W mit dem Radius WC' und der durch (4) dargestellten Geraden zusammen. —

Der Schnittpunkt der durch V zu AC parallel gelegten Geraden mit der Sehne BC ist der Mittelpunkt N' der Trisectionshyperbel (I) ($\varepsilon=2$); ihre halbe Hauptachse ist gleich $\frac{a}{3}$, ihre halbe Nebenachse ist gleich $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ und ihre Mittelpunktsgleichung lautet:

$$x^2-\tfrac{1}{3}y^2=\frac{a^2}{9}$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen von N' nach D, so erhält diese Gleichung, da $x+\frac{a}{3}$ für x und $y-b$ für y zu substituiren ist, die Form:

$$x^2 + \frac{2a}{3}x - \tfrac{1}{3}y^2 + \frac{2b}{3}y = \frac{b^2}{3} \tag{9}$$

Der Schnittpunkt der durch V zu BC parallel gelegten Geraden mit der Sehne AC ist der Mittelpunkt N'' der Trisectionshyperbel (II); ihre halbe Hauptachse ist gleich $\frac{b}{3}$; ihre halbe Nebenachse gleich $\frac{b}{3}\sqrt{3}$ und ihre auf dasselbe durch D gelegte Achsensystem bezogene Gleichung lautet:

$$y^2 - \frac{2b}{3}y - \tfrac{1}{3}x^2 - \frac{2a}{3}x = \frac{a^2}{3} \tag{10}$$

Durch Addition der Gleichungen (9) und (10) ergiebt sich:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

oder:

$$x^2 + y^2 = 2r^2 \tag{11}$$

durch Subtraction derselben Gleichungen:

$$y^2 - bx + \frac{b^2}{4} - \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) = 0$$

oder:

$$\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 0 \tag{22}$$

Die Schnittpunkte der Trisectionshyperbeln (I) und (II) fallen daher mit denen des Kreises um D mit dem Radius DC' und der durch (4) dargestellten Geraden zusammen. —

Die gewonnenen Resultate ergeben daher folgenden Lehrsatz:

Sind CD und $C'D'$ zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser eines Kreises M; $MU = \frac{1}{4}MD$ und $MW = \frac{1}{2}MD$; schlägt man um U, W und D die Kreise mit den entsprechenden Radien UC', WC' und DC' und legt man durch M einen beliebigen dritten Durchmesser AB, welcher mit CD die Winkel 2α und $180^0 - 2\alpha$ bilde, so schneiden die Halbirungslinien der Winkel $BMD'(90^0 - 2\alpha)$ und $BMC'(90^0 + 2\alpha)$ und ihre Verlängerungen durch M

1) den Kreis um U in den vier Punkten e_1, e_2, e_3 und e_4, durch welche zwei Trisectionsellipsen ($\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{4}}$),

2) den Kreis um W in den vier Punkten p_1, p_2, p_3 und p_4, durch welche zwei Trisectionsparabeln,

3) den Kreis um D in den vier Punkten h_1, h_2, h_3 und h_4, durche welche zwei Trisectionshyperbeln ($\varepsilon = 2$)

der Winkel 2α und $180^0 - 2\alpha$ bestimmt sind. Die eine Gruppe (I) der genannten Kegelschnitte geht durch B und die Trisectionspunkte P_1', P_2' und P_3'; die andere (II) durch A und die Trisectionspunkte P_1'', P_2'' und P_3''.

XX.

Ueber die Reihe der reciproken Binomial-Coefficienten.

Von

Franz Rogel.

Werden zu Coefficienten einer Potenzreihe die reciproken Coefficienten der Entwicklung

$$(1-x)^{-m}$$

genommen, so entsteht die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{m+n}{n}} \tag{1}$$

deren Summe gesucht werden soll.

Sie lässt sich auch schreiben

$$\frac{1}{n!} f(x)\, x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+n)!}\, x^{m+n} \tag{2}$$

dann ist

$$\left\{ D^{m+n} \frac{1}{n!} f(x)\, x^n \right\}_0 = m! \tag{3}$$

da ferner

$$m! = \left\{ D^m \frac{1}{1-x} \right\}_0$$

so folgt für jedes ganze m

$$\left\{ D^{m+n} \frac{1}{n!} f(x)\, x_n \right\}_0 = \left\{ D^m \frac{1}{1-x} \right\}_0$$

was nur möglich ist, wenn

$$D^{m+n}\frac{1}{n!}f(x)x^n = D^m\frac{1}{1-x}$$

woraus sich ergiebt

$$f(x) = \frac{n!}{x^n}\int_0^{n\,x}\frac{\partial x^n}{1-x} \tag{4}$$

Dass die oberen Grenzen dieser n Integrationen $= x$ sein müssen, ist an und für sich einleuchtend. Das Verschwinden der sämtlichen unteren Grenzen hat seinen Grund in dem Umstande, dass die $n-1$ ersten Ableitungen von $\frac{1}{n!}f(x)x^n$ zufolge der Gleichung (2) mit x zugleich null werden, während der $n$te Differentialquotient für $x=0$ der Einheit gleich wird.

Bei successiven Integrationen zwischen 0 und x findet sich

$$\int_0^x\frac{dx}{1-x} = -\lg(1-x)$$

$$\int_0^{2\,x}\frac{\partial x^2}{1-x} = \frac{1}{1!}(1-x)[\lg(1-x)-s_1]+1$$

$$\int_0^{3\,x}\frac{dx^3}{1-x} = -\frac{1}{2!}[\lg(1-x)-s_2]-\frac{s_2}{1!}+\frac{1}{1!}s_1x$$

. . . . . .

$$\int_0^{r\,x}\frac{dx^r}{1-x} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}(1-x)^{r-1}[\lg(1-x)-s_{r-1}]$$

$$+\sum_{p=1}^{p=r-1}(-1)^{p+1}\frac{s_p\,x^{r-p-1}}{p!\,(r-p-1)!}$$

worin

$$s_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n},\quad s_0 = 0 \tag{5}$$

ein Ergebniss, das sich durch den Schluss von r auf $r+1$ beweisen lässt.

Die gleich hohen, nicht in den $\lg(1-x)$ multiplicirten Potenzen von x vereinigt und geordnet entsteht

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1}-s_r}{x^{r+1}} + \frac{(-1)^n}{x^n}(1-x)^{n-1}\lg(1-x)\right] \quad (6)$$

Für $x = 0$ geht aus dem linksseitigen Ausdrucke die Einheit hervor, während jener rechter Hand die Form

$$\infty - \infty + \infty \ldots \text{ annimmt.}$$

Die Auswertung dieser unbestimmten Form löst den scheinbaren Widerspruch, es findet sich

$$\left\{(-1)^n \frac{1}{x^n}(1-x)^{n-1}\lg(1-x) + \sum_{r=0}^{r=n-2}(-1)^r \binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\frac{1}{x^{r+1}}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n} \quad (7)$$

In der Formel (6) $-x$ statt $+x$ geschrieben giebt

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^m}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\frac{1}{x^n}(1+x)^{n-1}\lg(1+x) - \sum_{r=r}^{n-2}\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\frac{1}{x^{r+1}}\right] \quad (8)$$

woraus für $x = 1$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{\binom{m+n}{m}} = n\left[2^{n-1}\lg 2 - \sum_{r=0}^{n-2}\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\right] \quad (9)$$

und für $n = 2$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{\binom{m+2}{m}} = 4\lg 2 - 1 \quad (10)$$

hervorgeht.

Der Formel (6) kann übrigens noch die folgende Form gegeben werden:

$$(-1)^n \frac{1}{x^n}(1-x)^{n-1}\lg(1-x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{\binom{m+n}{m}} - \sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\frac{1}{x^{r+1}} \quad (11)$$

Die Ersetzung des Logarithmus durch die gleichwertige Potenzreihe muss notwendig zu einer Identität führen, woraus noch folgt, dass die vorgelegte Reihe (1), indem sie aus der Logarithmus-Reihe entstanden gedacht werden kann, mit ihrer Summe denselben Giltigkeitsbereich besitzt, wobei der Grenzwert $x = 1$ inbegriffen ist, da hiefür auch die Formel

$$-\lg(1-x) = \Sigma \frac{x^n}{n}$$

widerspruchsfrei bleibt.

Die Betrachtung des alternirenden Summen-Ausdruckes in (6) regt die Frage nach jenen Werten von x an, für welche der algebraische Teil verschwindet. Die hiebei zu lösende Gleichung hat nicht für jedes n reelle Wurzeln, so z B. bei $n = 4$.

Der Fall $n = 3$ erfordert die Lösung der Gleichung

$$\binom{2}{0} s_2 x - \binom{2}{1} \tfrac{1}{2} = 0$$

daher

$$x = \tfrac{2}{3}$$

folglich

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{3^m \binom{m+3}{m}} = \frac{3^2}{2^3} \lg 3 \tag{12}$$

Bei $n = 5$ existirt ebenfalls ein echter positiver Bruch, für welchen der algebraische Teil verschwindet.

Von der Reihe (1) lassen sich noch weitere summirbare ableiten.

1. In (6)

$$x = k e^v$$

gesetzt, p mal bezüglich v differentiirt und $v = 0$ genommen führt zur Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m m^p}{\binom{m+n}{m}}$$

convergent für

$$|k| \leqq 1$$

deren Summirung vor allem die Kenntniss eines independenten Ausdruckes für den Nullwert der $p$ten Ableitung von

$$z = \frac{1}{k e^v} (1 - k e^v)^{n-1} \lg(1 - k e^v)$$

erfordert.

Setzt man

$$1-ke^v = (1-k)\left[1-\frac{k}{1-k}(e^v-1)\right]$$

so ist

$$\lg(1-ke^v) = \lg(1-k) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{k}{1-k}\right)^r (e^v-1)^r$$

ferner

$$\left\{D^h \lg(1-ke^v)\right\}_0 = -\sum_{r=1}^{h}\frac{1}{r}\left(\frac{k}{1-k}\right)^r E_h{}^r = L_h \tag{13}$$

wo

$$L_0 = \lg(1-k)$$

und

$$E_h{}^r = \{D^h(e^v-1)^r\}_0 =$$

$$r^h - \binom{r}{1}(r-1)^h + \binom{r}{2}(r-2)^h \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}1^h$$

Ferner ist

$$\left\{D^q \frac{1}{k^n e^{nv}}(1-ke^v)^{n-1}\right\}_0 =$$

$$\frac{1}{k^n}\left\{D^q \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}k^s e^{-(n-s)v}\right\}_0$$

$$= \frac{(-1)^q}{k^n}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}k^s(n-s)^q \tag{14}$$

$$\equiv \frac{A_q}{k^n}, \quad A_0 = (1-k)^{n-1}$$

Es ist daher

$$\left\{D^p z\right\}_0 = \frac{1}{k^n}\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}A_r L_{p-r}$$

somit

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^m m_p}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\frac{(-1)^n}{k^n}\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}A_r L_{p-r}\right.$$

$$\left. + (-1)^p \sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{n-1}{r}(s_{n-1}-s_r)\frac{(r+1)^p}{k^r+1}\right] \tag{15}$$

giltig für positive ganze m, n und p und für der Bedingung

$$-1 \leqq k < 1$$

genügende k.

Für $k = -1$ wird

$$A_q = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} (n-s)^q, \quad A_0 = 2^{n-1}$$

$$L_h = -\sum_{r=1}^{h} \frac{(-1)^r}{r \cdot 2^r} E_h^r, \quad L_0 = \lg 2$$

daher

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m^p}{\binom{m+n}{m}} = n \left[\sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} A_r L_{p-r} + (-1)^{p+1} \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r)(r+1)^p \right] \qquad (16)$$

woraus für $n = 2$ folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m^p}{\binom{m+2}{m}} = 2 \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} A_r L_{p-r} + (-1)^{p+1} 2$$

2. Die Snbstitution

$$x = \varrho e^{i\varphi}$$

in (6) ergiebt wegen

$$\lg(1-x) = \tfrac{1}{2} \lg \Delta - i\Theta$$

$$(1-x)^{n-1} = \Delta^{\frac{n-1}{2}} e^{-in\Theta}$$

$$\frac{1}{x^n}(1-x)^{n-1} \lg(1-x) = A + iB \quad \text{wo}$$

$$A = \varrho^{-n} \Delta^{\frac{n-1}{2}} [\tfrac{1}{2} \cos n(\varphi+\Theta) \cdot \lg \Delta - \Theta \sin n(\varphi+\Theta)]$$

$$B = \varrho^{-n} \Delta^{\frac{n-1}{2}} [-\tfrac{1}{2} \sin n(\varphi+\Theta) \cdot \lg \Delta - \Theta \cos n(\varphi+\Theta)]$$

und

$$\Delta = 1 - 2\varrho \cos\varphi + \varrho^2$$

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\varrho \sin\varphi}{1 - \varrho\cos\varphi}$$

die Relation

$$f(\varrho e^{i\varphi}) = n \left[\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \varrho^{-r-1} e^{-i(r-1)\varphi} + (-1)^n (A + iB) \right] \cdot \cdot \cdot (\Theta)$$

woraus durch Trennung des Imaginären vom Reellen die neuen Summenformeln entstehen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho^m \cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1}-s_r}{\varrho^{r+1}} \cos(r+1)\varphi + (-1)^n A\right] \qquad (17)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^m \sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{r+1} \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1}-s_r}{\varrho^{r+1}} \sin(r+1)\varphi + (-1)^n B\right] \qquad (18)$$

$$|\varrho| \leqq 1$$

Für $\varrho = 2\cos\varphi$

ist $\qquad A = 1, \quad \lg A = 0, \quad \Theta = -2\varphi$

daher

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m \cos^m\varphi \cdot \cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n \sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1}-s_r}{2^{r+1}} \cdot \frac{\cos(r+1)\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} + (-1)^n \frac{\varphi}{2^{n-1}} \frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi}\Big] \qquad (19)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m \cos^m\varphi \cdot \sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}} = n\left[\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{r+1} \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1}-s_r}{2^{r+1}} \cdot \frac{\sin(r+1)\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi}{2^{n-1}} \frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}\right] \qquad (20)$$

Die Differentiation der Gleichungen (19) und (20) ergiebt, da

$$D\cos^m\varphi \cdot \cos m\varphi = -m\cos^{m+1}\varphi \cdot \sin(m+1)\varphi \cdot \sec^2\varphi$$

$$D\cos^m\varphi \cdot \sin m\varphi = m\cos^{m+1}\varphi \cdot \cos(m+1)\varphi \cdot \sec^2\varphi$$

ferner

$$D\frac{\cos(r+1)\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} = -(r+1)\frac{\sin r\varphi}{\cos^r\varphi}\sec^2\varphi$$

$$D\frac{\sin(r+1)\varphi}{\cos^{r+1}\varphi} = (r+1)\frac{\cos r\varphi}{\cos^r\varphi}\sec^2\varphi$$

nach Division durch $\sec^2\varphi$ und n noch

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} \frac{m-1}{m} \frac{\cos^m\varphi \,.\, \cos m\varphi}{\binom{m+n-1}{m}} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\varphi \frac{\cos n-1\varphi}{\cos^{n-1}\varphi} + \frac{1}{n} \frac{\sin n\varphi}{\cos^{n-2}\varphi} \right)$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \frac{r+1}{2^{r+1}} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \frac{\sin r\varphi}{\cos^r\varphi} \tag{19'}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} 2^{m-1} \frac{m-1}{m} \frac{\cos^m\varphi \,.\, \sin m\varphi}{\binom{m+n-1}{m}} =$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \left(\varphi \frac{\sin n-1\varphi}{\cos^{n-1}\varphi} - \frac{1}{n} \frac{\cos n\varphi}{\cos^{n-2}\varphi} \right)$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \frac{r+1}{2^{r+1}} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \frac{\cos r\varphi}{\cos^r\varphi} \tag{20'}$$

Weitere Differentiationen führen zu Formeln, welche von (19) und (20) nicht wesentlich verschieden sind.

Aus

$$|\varrho| = |2\cos\varphi| \leqq 1$$

folgt

$$|\cos\varphi| \leqq \tfrac{1}{2}$$

als Convergenzbedingung.

Die Annahme

$$\varphi + \Theta = \frac{k\pi}{n}$$

wo k eine durch n nicht teilbare Zahl vorstellt, hat das Verschwinden des zweiten Teiles von A zur Folge; es ist hiefür

$$\varrho = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}}$$

und

$$\Delta = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}$$

mithin

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}} \right]^m =$$

$$= n \left\{ \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \left[\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)} \right]^{r+1} \cos(r+1)\varphi \right.$$

$$\left. + (-1)^{k+n} \sin \frac{k\pi}{n} \frac{\sin^{n-1}\varphi}{\sin^n\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)} \lg \frac{\sin\varphi}{\sin \frac{k\pi}{n}} \right\} \qquad (21)$$

Hieraus ergiebt sich die neue Entwicklung

$$\lg \frac{\sin\varphi}{\sin \frac{k\pi}{n}} = (-1)^{k+n} \frac{\sin^n\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin \frac{k\pi}{n} \sin^{n-1}\varphi} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{0}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{\binom{m+n}{m}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin \frac{k\pi}{n}} \right]^m \right.$$

$$\left. - \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \left[\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)} \right]^{r+1} \cos(r+1)\varphi \right\} \qquad (22)$$

convergent für

$$\left| \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right) \right| < \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$$

wobei die ganzen Zalen k und n so zu wählen sind, dass $\sin \frac{k\pi}{n}$ das gleiche Zeichen wie $\sin\varphi$ erhält.

In gleicher Weise kann durch die Annahme

$$\varphi + \Theta = \frac{k\pi}{2n}$$

wo k relativ prim zu $2n$ ist, der vom Logarithmus freie Teil von (B) in (16) zum Verschwinden gebracht werden.

Hiefür ist

$$\varrho = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right)}{\sin \frac{k\pi}{2n}}$$

und

$$\Delta = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}}$$

somit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{2n}} \right]^m =$$

$$n \left\{ \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^{r+1} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \left[\frac{\sin\frac{k\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right)} \right]^{r+1} \sin(r+1)\varphi \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+\frac{k+1}{2}} \sin\frac{k\pi}{2n} \cdot \frac{\sin^{n-1}\varphi}{\sin^n\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right)} \lg \frac{\sin\varphi}{\sin\frac{k\pi}{2n}} \right\} \qquad (23)$$

woraus wieder folgt

$$\lg \frac{\sin\varphi}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = (-1)^{n+\frac{k+1}{2}} \frac{\sin^n\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{2n} \cdot \sin^{n-1}\varphi} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{\binom{m+n}{m}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{2n}} \right]^m \right.$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r) \left[\frac{\sin\frac{k\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right)} \right]^{r+1} \sin(r+1)\varphi \right\} \qquad (24)$$

$$\left| \sin\left(\frac{k\pi}{2n} - \varphi\right) \right| < \left| \sin\frac{k\pi}{2n} \right|$$

$\sin\frac{k\pi}{2n}$ mit $\sin\varphi$ gleich bezeichnet.

Diese neuen Entwicklungen (23) und (24) werden um so rascher convergiren, je weniger φ von $\frac{k\pi}{n}$ resp. $\frac{k\pi}{2n}$ verschieden ist, und je grösser n gewählt wird.

Für $n = 2$ reducirt sich die rechtsstehende endliche Reihe in (22) auf ein einziges Glied; wird noch $k = 1$ genommen, so ist

$$\log\operatorname{cosec}\varphi = \tfrac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\left[3 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\binom{m+2}{m}} \cos m\varphi \cdot \cos^m\varphi\right] \qquad (25)$$

Für dieselben Werte ergiebt sich aus (24)

$$\lg \operatorname{cosec} \varphi = \tfrac{1}{2}\lg 2 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$$

$$+ \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\sqrt{2}\sin\varphi} - \sum_{0}^{\infty} \frac{2^{\frac{m}{2}}}{\binom{m+2}{m}} \sin m\varphi \,.\, \sin^m\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \tag{26}$$

3. Wenn

$$\alpha^h = e^{i\frac{2h\pi}{p}}$$

also eine Einheitswurzel ist, so hat man

$$\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p} f(x\alpha^h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{mp}}{\binom{mp+n}{mp}}$$

Zur Auswertung ersterer Summe dient die Formel (Θ) und zwar ist

$$\varrho = x, \quad \varphi = \frac{2h\pi}{p}$$

zu setzen; das Ergebniss ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mp}}{\binom{mp+n}{mp}} = \frac{n}{p}\left[(-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{s_{n-1} - s_p}{x^p + 1}\right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{2p} \frac{s_{n-1} - s_{2p}}{x^{2p}+1} \,.\, .\, .\, + (-1)^n \sum_{h=1}^{p} A\right] \tag{27}$$

In dem Falle als $p > n-2$ ist, bleibt rechter Hand nur die Summe ΣA stehen, es ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mp+n}}{\binom{mp+n}{mp}} = (-1)^n \frac{n}{p} \sum_{h=1}^{p} \Delta^{\frac{n-1}{2}} \left[\tfrac{1}{2}\cos n(\varphi+\Theta) \,.\, \lg \Delta \right.$$

$$\left. - \Theta \sin n(\varphi+\Theta)\right] \tag{28}$$

$$\varphi = \frac{2h\pi}{p}$$

Für $p = n$ ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\binom{mn}{(m-1)n}} = (-1)^n \sum_{h=1}^{n} \Delta^{\frac{n-1}{2}} \left[\tfrac{1}{2}\cos\Theta \,.\, \lg\Delta - \Theta \,.\, \sin\Theta\right]$$

ferner

$$\cos\Theta = \cos \operatorname{arctg} \frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi} = \frac{1 - x\cos\varphi}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\sin\Theta = \sin \operatorname{arctg} \frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi} = \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{\Delta}}$$

daher

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\binom{mn}{(m-1)n}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left[\tfrac{1}{2}(1-x\cos\varphi)\lg\Delta - x\Theta\sin\varphi\right]$$

nun ist

$$\cos 2\frac{n-h}{n}\pi = \cos\frac{2h\pi}{n}$$

$$\sin 2\frac{n-h}{n}\pi = -\sin\frac{2h\pi}{n}$$

somit bei geradem n

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\binom{mn}{(m-1)n}} = (-1)^n \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left[\left(1-x\cos\frac{2h\pi}{n}\right)\log\Delta \right.\right.$$

$$\left.\left. -2x\Theta\sin\frac{2h\pi}{n}\right] + (1-x)^{n-1}\lg(1-x) + (1+x)^{n-1}\lg(1+x)\right\} \qquad (29)$$

und bei ungeradem n

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{\binom{(m-1)n}{mn}} = (-1)^n \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left[\left(1-x\cos\frac{2h\pi}{n}\right)\lg\Delta \right.\right.$$

$$\left.\left. -2x\Theta\sin\frac{2h\pi}{n}\right] + (1-x^{n-1}\log(1-x)\right\} \qquad (29')$$

$$-1 \leqq x < 1$$

Bezeichnet $f(x, n)$ die Function $f(x)$ mit der Constanten n, so lassen sich Beziehungen zwischen den Functionen, welche $n = 1, 2, \ldots n$ entsprechen, ableiten.

Eine Relation ergiebt sich sofort mit Benutzung einer Eigenschaft höherer Integrale.

Bekanntlich lässt sich das n-fache Integral

$$\iint \ldots (f(x)\,dx \text{ abkürzungsweise } \int^{n} f(x)\,dx$$

geschrieben, mit Hilfe wiederholter Anwendung der „teilweisen Integration" durch einfache Integrale von der Form

$$\int x^m f(x)\,dx, \quad m = 0,\ 1,\ 2\ .\ .\ .\ n-1$$

ausdrücken, und zwar ist

$$n!\overset{n}{\int} = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} x^{n-m-1} \int x^m f(x)\,dx \qquad (30)$$

was sich leicht mittelst Specialisirung von $f(x)$ prüfen lässt.

Umgekehrt lässt sich jedes einfache Integral der Form

$$\int x^n f(x)\,dx$$

durch höhere Integrale darstellen; man findet

$$\int x f\,dx = x\int - \overset{2}{\int}$$

$$\int x^2 f\,dx = x^2\int - 2x\overset{2}{\int} + 2!\overset{3}{\int}$$

. . . . . .

$$\int x^n f\,dx = x^n\int + a_1 x^{n-1}\overset{2}{\int} + a_2 x^{n-2}\overset{3}{\int} + \ .\ . + a^n\overset{n+1}{\int}$$

Beiderseits differentiirt ergiebt

$$x^n f = x^n f + (a_1 + n)x^{n-1}\int + (\overline{n-1}.a_1 + a_2)x^{n-2}\overset{2}{\int} + \ .\ .\ .$$

$$\ .\ .\ + (a_{n-1} + n_n)\overset{n}{\int}$$

was nur möglich ist, wenn jedes Glied verschwindet, welcher Umstand zur Kenntniss der Coefficienten führt: es ist

$$a_1 = -n$$

$$a_2 = -\overline{n-1}\,a_1 = n\,\overline{n-1}$$

$$a_3 = -\overline{n-2}\,a_2 = -n\,\overline{n-1}\,\overline{n-2}$$

. . . . . .

$$a_r = (-1)^r n\,\overline{n-1}\ .\ .\ .\ \overline{n-r+1}$$

. . . . . .

$$a_n = -a_{n-1} = (-1)^n n!$$

folglich

$$\int x^n f\,dx = \sum_{r=0} (-1)^r r! \binom{n}{r} x^{n-r} \int^{r+1} \tag{31}$$

eine Formel, welche sich mittelst des bekannten Ausdruckes für

$$\int x^n e^x\,dx$$

leicht prüfen lässt.

Nun ist nach (4)

$$\int_0^n \frac{\partial x^n}{1-x} = \frac{x^n}{n!} f(x, n)$$

daher das allgemeine Glied obiger Summe

$$= (-1)^r \frac{1}{r+1} \binom{n}{r} x^{n+1} f(x, r+1)$$

Für das linksseitige Integral in (31) erhält man, w n 0 und x als Grenzen gewählt und

$$f = \frac{1}{1-x}$$

gesetzt wird:

$$\lg \frac{1}{1-x} - \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)$$

Die verlangte Beziehung ist daher

$$x^{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} f(x, r) = \lg \frac{1}{1-x} - \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right) \tag{32}$$

welcher man auch die Form geben kann

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} f(x, r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{n+s+1} \tag{32'}$$

$$-1 \leqq x < 1$$

Für $x = -1$ ist

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} f(-1, r) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - \lg 2 \tag{33}$$

Bildet man die Gleichung (22) für $n-1$, zieht sie von (22) ab und dividirt durch x^n, so kommt

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\left[\binom{n}{r-1}x-\binom{n-1}{r-1}\right]f(x,\ r)$$
$$+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}xf(x,\ n+1)=-\frac{1}{n}$$

oder

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\left(x+\frac{r-1}{n}-1\right)f(x,\ r)$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{x}{n+1}f(x,\ n+1)=\frac{1}{n} \qquad (34)$$

Bringt man in der Gl. (32) x^{n+1} auf die rechte Seite, ersetzt x wieder durch $\varrho e^{i\varphi}$, so geht hervor:

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varrho^m\cos m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$\frac{1}{\varrho^{n+1}}(\Theta\sin\overline{n+1}\,\varphi-\lg\Delta\,.\,\cos\overline{n+1}\,\varphi)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\cos r\varphi}{(n-r+1)\varrho^r} \qquad (35)$$

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varrho^m\sin m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$\frac{1}{\varrho^{n+1}}(\Theta\cos\overline{n+1}\,\varphi+\lg\Delta\,.\,\sin\overline{n+1}\,\varphi)+\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin r\varphi}{(n-r+1)\varrho^r} \qquad (36)$$

$$|\varrho|<1$$

Die Substitution

$$\varrho=2\cos\varphi$$

ergiebt wegen $\Delta=1,\ \Theta=-2\varphi$

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{0}^{\infty}\frac{2^m\cos^m\varphi\,.\,\cos m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$-\frac{\varphi\sin(n+1)\varphi}{2^n\cos^{n+1}\varphi}-\sum_{r=1}^{n}\frac{\cos r\varphi}{(n-r+1)\,2^r\cos^r\varphi} \qquad (37)$$

$$\sum_{=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{0}^{\infty}\frac{2^m\cos^m\varphi\,.\,\sin m\varphi}{\binom{m+r}{m}}=$$
$$-\frac{\varphi\cos(n+1)\varphi}{2^n\cos^{n+1}\varphi}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin r\varphi}{(n-r+1)\,2^r\cos r\varphi} \qquad (38)$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergiebt noch

$$\sum_{r=1}^{n+1} \frac{(-1)^r}{r}\binom{n}{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} m\,2^m \frac{\cos^{m+1}\varphi \cdot \sin\overline{m+1}\,\varphi}{\binom{m+r}{m}} =$$

$$-\frac{n+1}{2^\mu}\varphi\frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi} - \frac{\sin\overline{n+1}\,\varphi}{2^n\cos^{r-1}\varphi} + \sum_{r=0}^{n-1}\frac{r+1}{n-r}\frac{\sin r\varphi}{\cos^r\varphi} \qquad (37')$$

$$\sum_{r=1}^{n+1} \frac{(-1)^{r-1}}{r}\binom{n}{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} m\,2^m \frac{\cos^{m+1}\varphi \cdot \cos\overline{m+1}\,\varphi}{\binom{m+r}{m}} =$$

$$\frac{n+1}{2^n}\varphi\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi} - \frac{\cos\overline{n+1}\,\varphi}{2^n\cos^{n-1}\varphi} + \sum_{r=0}^{n-1}\frac{r+1}{n-r}\frac{\cos r\varphi}{\cos^r\varphi} \qquad (38')$$

Eine nochmalige Differentiation führt zu Formeln, welche von (37) und (38) nur formell verschieden sind.

Die Annahme

$$\varrho\sin\varphi = 1-\varrho\cos\varphi$$

ergiebt

$$\varrho = \frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}$$

$$\Theta = \frac{\pi}{4}, \quad \Delta = \left[\frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}\right]^2$$

Aus (35) und (36) entsteht demzufolge

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos m\varphi}{2^{\frac{m}{2}}\binom{m+r}{m}\sin^m\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)} =$$

$$2^{\frac{n+1}{2}}\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\left[\frac{\pi}{4}\sin(n+1)\varphi - 2\lg\frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos(n+1)\varphi\right] - \sum_{r=1}^{n}\frac{2^{\frac{r}{2}}\sin^r\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{n-r+1}\cos r\varphi \qquad (39)$$

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\varphi}{m\,2^{2}\binom{m+r}{m}\sin^{m}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}=$$

$$=2^{\frac{n+1}{2}}\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\left[\frac{\pi}{4}\sin(n+1)\varphi+2\lg\frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin(n+1)\varphi\right]+\sum_{r=1}^{n}\frac{2^{\frac{r}{2}}\sin^{r}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{(n-r+1)}\sin^{r}q \qquad (40)$$

Aus obiger Annahme fliesst die Convergenzbedingung

$$|\sin\varphi+\cos\varphi|>|\quad\text{oder}\quad\sin\frac{\pi}{4}<\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$$

die für

$$0<\varphi<\tfrac{3}{8}\pi,$$

allgemein für

$$2k\pi<q<(2k+\tfrac{3}{8})\pi$$

erfüllt wird.

Der Logarithmus kann hier daher nicht zum Verschwinden gebracht werden, weil die Werte

$$\varphi=(2k+\tfrac{3}{8})\pi$$

unzulässig sind.

Setzt man in derselben Gleichung (32)

$$x=ke^{v}$$

differentiirt p mal und lässt v verschwinden, so entsteht wegen

$$D_v^{\,p}\frac{1}{x^{n+1}}\lg\frac{1}{1-x}=-D_v^{\,p}\left[\frac{1}{k^{n+1}}\lg(1-k)e^{-(n+1)v}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k^{n+1}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}}{r}\left(\frac{k}{1-k}\right)^{r}(1-e^{v})^{r}e^{-(n+1)v}\right]v=0$$

$$=(-1)^{p+1}\frac{(n+1)^{p}}{k^{n+1}}\log(1-k)+\frac{1}{k^{n+1}}\sum_{r=1}^{p}\frac{(-1)^{r}}{r}\left(\frac{k}{1-k}\right)^{r}M_p^{\,r}$$

wo

$$M_p{}^r = D_v{}^p(1-e^v)^r e^{-(n+1)v} = (-1)^p \sum_{s=1}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} (n-s+1)^p$$

ist, die Relation

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m m^p}{\binom{m+r}{m}} =$$

$$(-1)^{p+1} \left[\frac{(n+1)^p}{k^{n+1}} \lg(1-k) + \sum_{s=1}^{n} \frac{s^p}{(n-s+1)k^s} \right]$$

$$+ \frac{1}{k^{n+1}} \sum_{r=1}^{p} \frac{(-1)^r}{r} \left(\frac{k}{1-k} \right)^r M_p{}^r \qquad (41)$$

Geht man von der Gleichung (32′) aus, so führt dasselbe Verfahren zu

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m m^p}{\binom{m+r}{m}} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k^s s^p}{n+s+1} \qquad (41)$$

$$-1 \leqq k < 1$$

Bezüglich der in (19), (20), (37), (38) und den davon abgeleiteten Formeln summirten unendlichen Reihen muss schliesslich noch bemerkt werden, dass derartige Entwickelungen von Herrn Dr. O. Schlömilch in dem Aufsatze „Ueber eine besondere Gattung von Reihen“ (Zeitschrift f. Math. u. Phys. I. Jahrg.) untersucht und die Bedingungen angegeben wurden, unter welchen eine gegebene Function auf diese Weise entwickelt werden, nicht aber ob, fälls dies wirklich möglich ist, es nur auf eine einzige oder auf mehrere Arten geschehen kann.

Diese Frage wird durch die Erbringung des Nachweises der Existenz resp. Nicht-Existenz linearer Relationen zwischen den Functionen, nach welchen entwickelt werden soll, gelöst.

Für die Functionen

$$\cos^n\varphi \,.\, \cos n\varphi \quad \text{bzhw.} \quad \cos^n\varphi \,.\, \sin n\varphi$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ in inf.

lassen sich nun Systeme unendlich vieler linearer Verknüpfungen angeben.

Es ist

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} x^r, \quad x^2 < 1$$

woraus für $x = \varrho e^{i\varphi}$

$$\left(\frac{\varrho e^{i\varphi}}{1-\varrho e^{i\varphi}}\right)^n = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} \varrho^r \cos r\varphi + i \sum_{r=r}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} \varrho^r \sin r\varphi$$

aber auch

$$= \left(\varrho \frac{\cos\varphi - \varrho}{\Delta} + i \frac{\varrho \sin\varphi}{\Delta}\right)^n, \qquad \Delta = 1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2$$

Nach Ausführung dieser Operation zeigt es sich, dass bei geradem n im reellen, und bei ungeradem n im imaginären Teile kein von $\cos\varphi - \varrho$ freies Glied vorkommt.

Wird nun $\varrho = \cos(\varphi > m\pi)(m = 0, 1, 2 \ldots)$ genommen, so ergiebt sich:

$$\sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} \cos^r\varphi \,.\, \sin r\varphi = 0 \qquad n = 0, 2, 4, 6 \ldots \qquad (42)$$

$$\sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} \cos^r\varphi \,.\, \cos r\varphi = 0 \qquad n = 1, 3, 5 \ldots \qquad (43)$$

Ein zweites System findet sich aus

$$[\lg(1-\varrho e^{i\varphi})]^n = (-1)^n n! \left[\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r!}\, {}^{r}C_{r-n}\, \varrho^r \cos r\varphi \right.$$

$$\left. + i \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r!}\, {}^{r}C_{r-n}\, \varrho^r \sin r\varphi \right] = (\tfrac{1}{2}\lg\Delta - i\Theta)^n; \quad \Theta = \frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}$$

Nach der Entwicklung stellt es sich heraus, dass bei geradem n im reellen, und bei ungeradem im imaginären Teile kein von $\lg\Delta$ freies Glied auftritt;

$$\varrho = 2\cos\varphi$$

gesetzt ergiebt

$$\lg\Delta = 0$$

daher gilt

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{2^{r-n}\,r}{r!} C_{r-n} \cos^r\varphi \,.\, \sin r\varphi = 0, \qquad n = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots \qquad (44)$$

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{2^{r-n}\,r}{r!} C_{r-n} \cos^r\varphi \,.\, \cos r\varphi = 0, \qquad n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \qquad (45)$$

$$(\varphi > m\pi)$$

Beliebig viele weitere Systeme entstehen noch in analoger Weise aus den höheren Integralen von $(1-x)^{-1}$; dieselben sind jedoch nicht unabhängig von einander, lassen sich vielmehr alle aus dem erst gefundenen Systeme ableiten.

Jede der unendlich vielen Gleichungen desselben kann mit einer ganz willkürlichen Zal multiplicirt und zu den gefundenen Entwicklungen addirt werden.

Es lässt sich daher der Satz aussprechen:

„Wenn eine Entwicklung einer gegebenen Function nach

$$\cos^r\varphi \,.\, \cos r\varphi$$

„oder nach

$$\cos^r\varphi \,.\, \sin r\varphi (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

„besteht, so giebt es unendlich viele derartige von einander ver-„schiedene aber gleichwertige Entwicklungen."

Eine Anwendung des „Satzes der unbestimmten Coefficienten" ist hiemit ausgeschlossen.

Während zwischen diesen Functionen in endlicher Anzal keinerlei lineare Beziehungen bestehen, gelten für die in den rechtsstehenden Ausdrücken in (19), (20) etc. vorkommenden Functionen

$$P_n = \frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi}, \qquad Q_n = \frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}$$

die Relationen

$$P_n - \binom{n}{1} P_{n-1} + \binom{n}{2} P_{n-2} \ldots - \binom{n}{n-1} P_1 = 0, \ n \text{ gerade} \qquad (46)$$

$$Q_n - \binom{n}{1} Q_{n-1} + \binom{n}{2} Q_{n-2} \ldots - 1 = 0, \ n \text{ ungerade} \qquad (47)$$

welche, wenn sie für n, $n-2$, $n \cdots 1 \ldots$ gebildet werden, zu zwei Systemen von $\frac{n}{2}$, resp. $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen führen. Hieraus folgt, dass $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n+1}{2}$ Coeff. der P resp. Q in obgenannten Ausdrücken jedmöglicher Wert beigelegt werden kann. Diese Wandelbarkeit entfällt, wenn der die Grössen $s_{n-1} - s_r$ enthaltende Teil der Ausdrücke mit Hilfe der Systeme so transformirt wird, dass in denselben entweder nur gerade oder nur ungerade P resp. Q erscheinen. Wegen der sehr complicirten Beschaffenheit der sich hiebei ergebenden Coefficienten dürften jedoch die ursprünglichen Formen in (19), (20) etc. bei numerischen Berechnungen vorzuziehen sein.

XXI.

Miscellen.

1.

Zur Durchdringung der Kugel mit dem geraden Kreiskegel, Satz über das Kegelschnittbüschel und die Parabel.

Herr Wiener führt in seinem grossen Werke: „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" Leipzig 1887, 2. Band. Seite 256 den Satz an, dass wenn zwei Flächen zweiter Ordnung eine Hauptebene gemeinschaftlich haben, die orthogonale Projection ihrer Schnittcurve auf diese ein Kegelschnitt ist. Auf die Natur des Kegelschnittes, insbesondere in für das technische Zeichnen wichtigen Fällen, wird weiter nicht eingegangen, und so soll im Folgenden dieser Kegelschnitt für die Kugel und den geraden Kreiskegel betrachtet und daraus einige Folgerungen gezogen werden.

Die diesen beiden Flächen gemeinschaftliche Hauptebene ist offenbar jene Ebene, welche man durch den Mittelpunkt M der Kugel Fig. 1. und die Achse SN des Kegels legen kann. Diese Ebene schneidet den Kegel in den Erzeugenden SA und SB, deren Winkel ASB durch SN halbirt wird, und die Kugel in dem Kreise K. Sollen sich die beiden Flächen in einer reellen Curve schneiden, so muss wenigstens eine dieser Erzeugenden von dem Kreise K geschnitten werden, und die orthogonale Projection dieser Curve auf die Hauptebene ist eine Parabel, deren Scheiteltangente die Chordale des grössten Kugelkreises K mit jenem Kreise ist, der die beiden Erzeugenden berührt und dessen Mittelpunkt der Fusspunkt O des vom Kugelmittelpunkte auf die Achse des Kegels gefällten Perpendikels ist.

Beweis. Um irgend einen Punkt P' der Projection der obigen Curve zu erhalten, lege man eine Ebene senkrecht zu SN, welche

in der Figur 1. als die Gerade CD erscheint. Diese schneidet die Kugel nach einem Kreise K', welcher in der Figur umgelegt als Halbkreis gezeichnet wurde. Ebenso wurde der Kreis k, nach welchem die Ebene den Kegel schneidet, behandelt. Die beiden Halbkreise K' und k schneiden sich in P, und zieht man durch P eine Senkrechte auf MO, so schneidet diese CD in P'.

Wählt man nun OS zur Ordinaten-, OE zur Abscissenachse, bezeichnet man OQ mit x, QP' mit y, den Kugelhalbmesser mit R, MO mit a, den des Kegelkreises vom Mittelpunkt O mit r, OS mit h, verbindet man ferner O' mit P, so ist im rechtwinkeligen Dreieck $O'PP'$

$$x^2 + \overline{PP'}^2 = \overline{O'P}^2 \qquad 1)$$

Weil aber $O'C \parallel OE$ und $O'C = O'P$, so findet die Projection statt

$$(h - y) : h = O'P : r$$

und daraus

$$O'P = \frac{r(h-y)}{h}$$

und endlich mittelst 1)

$$x^2 + \overline{PP_1}^2 = \frac{r^2(h-y)^2}{h^2} \qquad 2)$$

Verbindet man M' mit P, so ist im rechtwinkeligen Dreieck $M'PP'$

$$\overline{PP'}^2 = \overline{M'P}^2 - (x+a)^2$$

daher mittelst 2)

$$\overline{M'P}^2 - 2ax - a^2 = \frac{r^2(h-y)^2}{h^2} \qquad 3)$$

Endlich ist im $\triangle DMM'$

$$\overline{M'D}^2 = \overline{M'P}^2 = R^2 - y^2$$

daher mittelst 3)

$$R^2 - y^2 - 2ax - a^2 = \frac{r^2(h-y)^2}{h^2}$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, in ihr x^2 und xy fehlen, so ist die durch dieselbe dargestellte Curve eine Parabel, deren Achse parallel zur Abscissenachse liegt. Will man aus der Gleichung die Abscisse m, die Ordinate n des Scheitels und den Parameter $2p$ erkennen, so muss man sie auf die Form bringen:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$

worauf sie lautet

$$\left(y - \frac{hr^2}{h^2+r^2}\right)^2 = -\frac{2ah^2}{h^2+r^2}\left[x - \frac{R^2(h^2+r^2) - a^2(h^2+r^2) - h^2r^2}{2a(h^2+r^2)}\right]$$

Die Abscisse des Scheitels kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{R^2 - a^2 - \frac{h^2r^2}{h^2+r^2}}{2a} \qquad 4)$$

Zieht man von O auf SB die Senkrechte OF, so ist $\triangle OFS \sim OSC$ daher

$$OF : r = h : \sqrt{h^2+r^2}$$

$$OF = \frac{rh}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

weshalb 4) auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{R^2 - a^2 - \overline{OF}^2}{2a}$$

woraus zu ersehen ist, dass die Scheiteltangente die Chordale zweier Kreise von der Centrallinie a und den Halbmessern R und OF ist, w. z. b. w.

Sind 1, 2, 3 und 4 die Schnittpunkte der Kegelerzeugenden mit dem grössten Kugelkreise K, und schneiden sich die Verbindungslinien 12 und 34 in S', so kann man auch S_1' und S_4' als Erzeugende eines zweiten Kegels betrachten, und es tritt demnach noch eine zweite Parabel auf, die durch die nämlichen vier Punkte hindurchgeht, und deren Scheiteltangente wieder die Chordale von K und jenem Kreise ist, der die Geraden S_1' und S_4' berührt, und dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des von M auf die Halbirungslinie des Winkels $1S_4'$ gefällten Perpendikels ist. Da ferner bekanntlich im Sehnenvierecke die Halbirungslinien der Winkel der Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, so ergibt sich der Satz:

„Lässt sich durch die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels ein Kreis (Basiskreis) legen, so stehen die Scheiteltangenten der beiden Parabeln des Büschels auf einander senkrecht und sind die Chordalen des Basiskreises mit jenen zwei Kreisen, die die Gegenseiten des Kreisviereckes berühren, und deren Mittelpunkte in den durch den Mittelpunkt des Basiskreises zu den Halbirungslinien der Winkel der Gegenseiten gezogenen Parallelen gelegen sind."

Besonders einfach gestaltet sich das Gezeigte für den geraden Kreiscylinder, welcher entsteht, wenn h unendlich gross wird. Dann ist

$$n = \frac{hr^2}{h^2+r^2} = \frac{r^2}{h+\frac{r^2}{h}} = 0$$

d. h. die vom Mittelpunkt der Kugel auf die Achse des Cylinders gefällte Senkrechte ist die Achse der Parabel.

$$m = \frac{R^2 - a^2 - \frac{r^2}{r^2}}{2a\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{R^2-a^2-r^2}{2a}$$

d. h die Scheiteltangente der Parabel ist die Chordale jener zwei Kreise, nach welchen beide Flächen durch eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende zur Achse des Cylinders senkrechte Ebene geschnitten werden, wenn hierauf diese Ebene in die Hauptebene umgelegt wird.

Ferner ist

$$2p = -\frac{2a\,h^2}{h^2+r^2} = -\frac{2a}{1+\frac{r^2}{h^2}} = -2a$$

d. h. der Brennpunkt der Parabel ist von der Leitlinie ebenso weit entfernt, als der Mittelpunkt der Kugel von der Cylinderachse.

Da die Halbirungslinie der Sehne 12 durch den Mittelpunkt M der Kugel gehen muss, so folgt sofort der Parabelsatz:

„Die Halbirungslinie einer Parabelsehne und die vom Mittelpunkt der letzteren auf die Achse gefällte Senkrechte bestimmen auf der Achse eine Strecke, welche gleich ist der Entfernung (p) des Brennpunktes von der Leitlinie".

Anmerkung 1). Dieser Satz lässt sich leicht analytisch beweisen Die Gerade $y = ax+b$ schneidet die Parabel $y^2 = 2px$ in den Punkten

$$\frac{p-ab-\sqrt{p(p-2ab)}}{a^2}, \quad \frac{p-\sqrt{p(p-2ab)}}{a}$$

$$\frac{p-ab+\sqrt{p(p-2ab)}}{a^2}, \quad \frac{p+\sqrt{p(p-2ab)}}{a}$$

Der Mittelpunkt der durch die Schnittpunkte bestimmten Sehne hat daher die Abscisse $\frac{p-ab}{a^2}$ und die Ordinate $\frac{p}{a}$. Die Gleichung der Halbirungslinie der Sehne lautet demnach:

$$y - \frac{p}{a} = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{p - ab}{a^2}\right)$$

und ihr Abschnitt auf der Abscissenachse beträgt

$$\frac{p - ab}{a^2} + p$$

daher die Strecke zwischen ihrem Schnittpunkt und dem Fusspunkt der Ordinate des Mittelpunktes p, w. z. b. w.

Anmerkung 2). Der Satz von der constanten Subnormale der Parabel ist nur ein besonderer Fall dieses Satzes.

Nun ergibt sich eine sehr einfache Construction der Parabel, wenn die Achse und zwei Punkte derselben gegeben sind.

Man halbire die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 bestimmte Parabelsehne, fälle vom Mittelpunkte M derselben eine Senkrechte auf die Parabelachse, deren Fusspunkt N sei. Errichtet man ferner in M eine Senkrechte auf die Sehne, so schneidet diese die Achse in O, und es ist hierauf $ON = p$ und der Parameter der Parabel $2ON$.

Hierauf fälle man von P_1 eine Senkrechte auf die Achse, deren Fusspunkt Q_1 sei, und trage von Q_1 auf der Achse in der Richtung NO letztere Strecke zweimal auf, wodurch man den Punkt R erhält. Verbindet man R mit P_1 und errichtet auf diesen Verbindungslinie in P_1 eine Senkrechte, so schneidet diese die Achse im Scheitel A der Parabel, denn die Ordinate ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Abscisse AQ und dem Parameter QR. Trägt man hierauf die Hälfte von NO beiderseits von A auf der Achse auf, so erhält man den Brennpunkt und die Leitlinie der Parabel.

Auch ergibt sich eine einfache directe Construction der Achse der Parabel, wenn die Richtung R der Achse derselben (Fig. 2) und drei Punkte P_1, P_2 und P_3 gegeben sind.

Man bestimme die Mitten M_1 und M_2 der Parabelsehnen P_1P_2 und P_2P_3. Von diesen Punkten aus fälle man die Senkrechten 1 und 2 auf R. Ferner errichte man in denselben die Senkrechten 3 und 4 auf die Parabelsehnen.

Die Achse der Parabel x muss hierauf so gefunden werden, dass wenn dieselbe 1 in g, 3 in f, 2 in e und 4 in d schneidet, $gf = ed$ ist. Um dies zu erreichen ziehe man durch M_1 die Parallele 5 zu 4, ferner eine Senkrechte zu R, die 3 in a und 5 in b schneidet, ferner durch a eine Parallele zu R und durch b eine Parallele zu

$M_1 M_2$. Die zuletzt gezogenen Geraden schneiden sich im Punkte c, dessen Verbindungslinie mit M_1 die Gerade 4 in d trifft, durch welchen Punkt die Achse der Parabel hindurchgehen muss, was man bewiesen haben wird, wenn man zeigt, dass $gf = cd$.

Zieht man durch f eine Senkrechte auf R, so schneidet diese 5 in h, und es ist $hd \parallel bc$, denn hfd und bac sind zwei perspectivische Dreiecke mit zwei Paar parallelen Seiten (hf und ab, fd und ac) daher muss auch das dritte Paar Seiten (hd und bc) parallel sein. Dann ist aber auch hd parallel $M_1 M_2$, demnach Viereck $M_1 M_2 dh$ ein Parallelogramm, daher

$$M_1 h = M_2 d \quad \text{und} \quad \triangle M_1 kh \cong M_2 ed$$

Daraus folgt, dass $ed = hk$, wenn k der Fusspunkt des von h auf 1 gefällten Perpendikels ist. Im Rechtecke $khfg$ ist aber

$$kh = gf, \quad \text{daher auch} \quad gf = cd \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wien, im Januar 1892.

Wilhelm Rulf.

2.

Geometrische Bestimmung der Tangente der Cassinischen Linie.

Die Cassinische Linie, die mitunter auch Cassinische Ellipse genannt wird, zeigt auch in Bezug auf die Tangentenconstruction eine gewisse Aehnlichkeit mit der Ellipse. Errichtet man nämlich in dem einen Brennpunkte der Ellipse auf dem zugehörigen Leitstrahl eine Senkrechte, verlängert man ferner den anderen Leitstrahl um den ersten und errichtet man in dem Endpunkte der Verlängerung auf diese eine Senkrechte, so schneiden sich beide Senkrechten in einem neuen Punkte der Tangente, deren Berührungspunkte die beiden Leitstrahlen angehören. Dieselbe Construction gilt auch, wie im folgenden recht einfach gezeigt werden soll, für die Cassinische Linie, nur darf der zweite Leitstrahl nicht um den ersten, sondern muss um sich selbst verlängert werden.

Beweis. Es sei Fig. 1. P ein Punkt der Cassinischen Linie, F_1 und F_2 die Brennpunkte derselben. Die Leitstrahlen dieses Punktes mögen mit r_1 und r_2 bezeichnet werden. Ist P' ein unendlich nahe an P gelegener Punkt der Curve, so ist die durch PP' gelegte Gerade die Tangente T in P. Denkt man sich von F_1 aus mit r_1 den Kreisbogen PA beschrieben, so ist $AP' = m$ die unendlich kleine

Zunahme des Leitstrahles r_1 beim Uebergang von P nach P'. Denkt man sich ferner von F_2 aus mit r_2 den Kreisbogen PB beschrieben, so ist $BP' = n$ die unendlich kleine Abnahme von r_2 beim Uebergang von P nach P'. Da aber P, P' Punkte derselben Cassinischen Linie sind, so muss

$$r_1 r_2 = (r_1 + m)(r_2 - n)$$

sein, woraus folgt

$$0 = m r_2 - n r_1 - mn$$

und wenn man mn als unendlich klein höherer Ordnung vernachlässigt,

$$n r_1 = m r_2$$

und endlich

$$r_1 : r_2 = m : n \qquad 1)$$

Die unendlich kleinen Kreisbögen PA und PB kann man aber als gerad und als senkrechtstehend auf den Leitstrahlen des Berührungspunktes P betrachten. Aber auch die Winkel PAP' und PBP' kann man als Rechte ansehen. Der unendlich nahe Punkt P' der Tangente hat also von den Senkrechten im Berührungspunkte P auf die Leitstrahlen Entfernungen, die sich nach 1) wie die Leitstrahlen verhalten. Was aber bezüglich des Verhältnisses der Entfernungen des unendlich nahen Tangentenpunktes gilt, gilt von einem jedem Punkte derselben, man wird daher einen Punkt D der Tangente gefunden haben, wenn man $F_1 P$ um $PC = r_1$ verlängert, und die Senkrechte in C auf $F_1 C$ zum Schnitt mit jener Senkrechten bringt, die man in F_2 auf $F_2 P$ errichtet, denn der Punkt D hat dann von PA die Entfernung r_1, von PB jene r_2.

Wien, im April 1892.

Wilhelm Rulf.

3.

Zur Zahlentheorie.

Die natürliche Zahlenreihe lässt sich in 2, 3, ... n arithmetische Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz n besteht, zerlegen. Diese Zerlegung ist dadurch leicht zu bewerkstelligen, dass man zunächst eine Verticalreihe mit den Zahlen 1 bis n bildet und dann eine zweite, dritte u. s. w Verticalreihe mit den Zahlen $n+1$ bis $2n$, $2n+1$ bis $3n$ u s. w. daneben stellt. Zwischen den Gliedern der Horizontalreihen besteht dann die Differenz n. — Beispielsweise gestaltet sich die Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe in 6 Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz 6 besteht, wie folgt:

1,	7,	13,	19,	25	
2,	8,	14,	20,	26	
3,	9,	15,	21,	27	u. s. w.
4,	10,	16,	22,	28	
5,	11,	17,	23,	29	
6,	12,	18,	24,	30	

Von diesen 6 Reihen enthält die 2., 4. und 6. nur gerade Zahlen, weil das Anfangsglied diesen Reihen ebenso wie die beständige Differenz eine gerade Zahl ist. Die 3. Reihe enthält nur Zahlen, die die durch 3 teilbar sind, weil das Anfangsglied dieser Reihe $= 3$ ist und weil die beständige Differenz 6 eine durch 3 teilbare Zahl ist. — In diesen 4 Reihen kann also keine einzige Primzahl vorkommen und es müssen deshalb notwendig alle Primzahlen in der 1. und 5. Reihe mit enthalten sein. Es muss aber auch notwendig jede Primzahl $> 3 \equiv \mp 1 \pmod 6$ sein, weil die beiden Reihen 1 und 5 nach Streichung der Zahl 1 nur Zahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten.

Will man nun alle Primzahlen > 3 in ununterbrochener Reihenfolge ermitteln, so braucht man nur die oben angegebenen Reihen 1 und 5, d. i. die Doppelreihe $6n \mp 1$ zu bilden und von den entstehenden Zahlen die durch die Primzahlen 7, 11 u. s. w und deren Potenzen teilbaren Zahlen zu streichen. Die dann zurückbleibenden Zahlen sind die Primzahlen > 3. Hierbei ist daran zu erinnern, dass man, um zu untersuchen, ob eine Zahl n eine Primzahl ist oder nicht, dieselbe nur mit den Primzahlen $< \sqrt{n}$ zu dividiren braucht. — Um festzustellen, welche Zahlen zu streichen sind, kann man also jede Zahl n der Doppelreihe $6n \mp 1$ auf die Teilbarkeit durch die Primzahlen $< \sqrt{n}$ prüfen. Man hat es aber leichter, wenn man die zu streichenden Zahlen durch Multiplication der schon bekannten und successive bekannt werdenden Primzahlen feststellt. Es kommen dabei dann immer nur diejenigen Vielfachen von $p = 7$, 11 u. s. w. und deren Potenzen in Betracht, deren Primzahlmultiplicatoren $\overset{=}{>} p$ sind, da die niedriger liegenden Vielfachen des jeweiligen p immer schon als Vielfache der niedrigeren Primzahlen gestrichen sind. Die Berechnung der Vielfachen von $p = 7$, 11 u. s. w. und p^n wird nun sehr bequem, wenn man das Resultat einer vorhergehenden Rechnung stets bei der nachfolgenden mitbenutzt. So ist z. B. für

$p = 7$:	$p = 11$:
$7 \cdot 7 = 49$	$11 \cdot 11 = 121$
$7 \cdot 11 = 49+28 = 77$	$11 \cdot 13 = 121+22 = 143$
$7 \cdot 13 = 77+14 = 91$	$11 \cdot 17 = 143+44 = 187$
u. s. w.	u. s. w.

u. s. w.

Die Primzahlen 2, 3 und 5 kommen deshalb als Teiler nicht in Betracht, weil

1) die Zahl 2 eine gerade Zahl ist, und in der Reihe $6n \mp 1$ nur ungerade Zahlen vorkommen,

2) die Reihe $6n \mp 1$ keine durch 3 teilbaren Zahlen enthält,

3) die mit dem Teiler 5 behafteten Zahlen als mit 5 endigend bei der Bildung der Reihe $6n \mp 1$ gleich übersprungen werden können.

Für das Gebiet der Zahlen 1 bis 100 mag die Reihe $6n \mp 1$ hier folgen.

$$6n \mp 1 = \begin{matrix} 5, 11, 17, 23, 29, \ldots, 41, 47, 53, 59, \ldots, 71, 77, 83, 89, \ldots \\ 7, 13, 19, \ldots, 31, 37, 43, 49, \ldots, 61, 67, 73, 79, \ldots, 91, 97 \end{matrix}$$

Wo ein Punkt steht, ist eine mit 5 endigende Zahl ausgefallen, Zu streichen sind nur die mit dem Teiler 7 behafteten Zahlen 49, 77 und 91.

Oldenburg i. G.

G. Speckmann.

4.

Zur Cassinischen Linie.

Von einem Punkte der Cassinischen Linie ziehen wir zwei Fokallinien nach den Brennpunkten $\pm c$ und bezeichnen die Winkel, welche sie mit dem Radiusvector vom Mittelpunkt aus bilden, mit $\gamma_1\ \gamma_2$.

Man findet leicht folgende Beziehung zwischen den genannten Grössen und dem Polarwinkel φ:

$$\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{R^2 - c^2 \cos 2\varphi}{\sqrt{R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4}}$$

Da aber die Gleichung der Curve

$$R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 = q^4$$

ist, so gewinnt man einfacher

$$q^2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = R^2 = c^2 \cos 2\varphi$$

und ferner

$$\sin(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{c^2}{q^2} \sin 2\varphi$$

Es ist aber, wenn β den Winkel zwischen der Normale und R bezeichnet,

$$\sin\beta = \frac{c^2}{q^2} \sin 2\varphi$$

demnach

$$\beta = \gamma_1 - \gamma_2$$

Um also die Normale in einem Punkte der Curve zu construiren, trage man etwa γ_2 auf γ_1 ab, und man erhält damit in dem entsprechenden Schenkel des Winkels die gesuchte Normale. Damit ist die Tangentenconstruction ebenfalls gelöst.

Ferner: Legt man ein rechtwinkeliges Achsenkreuz durch den Mittelpunkt einer geschlossenen Cassinischen Curve, und durch deren Schnittpunkt Tangenten, so sind die Winkel derselben mit den Achsenteilen einander gleich.

Für Ovale existirt ein analoger Satz.

Dass die algebraische Summe der 4 Peripheriewinkel eines Bogens der Cassinischen Linie nach den Schnittpunkten des genannten Achsenkreuzes gleich null ist, haben wir schon früher bewiesen.

Emil Oekinghaus.

5.

Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien.

Die Tangente, Hauptnormale und Binormale der Raumcurven bilden ein bewegtes, den erzeugenden Punkt begleitendes orthogonales Axensystem, welches von französischen Mathematikern ganz passend das fundamentale genannt wird. Die Erweiterung seines Begriffs und seiner Darstellung auf mehrfach gekrümmte Linien in mehr als dreifacher Mannigfaltigkeit wird man schwerlich umgehen können, wenn man überhaupt solche Curven analytisch untersuchen will; sie sei unsere gegenwärtige Aufgabe.

Den Weg der Erweiterung des Begriffs zeigt die Hauptnormale, aufgefasst als das in der Schwingungsebene errichtete Lot auf der Tangente, während die Analogie der Binormale durch die Specialität verhüllt ist, dass der Schmiegungsraum mit der festen alles umfassenden Mannigfaltigkeit zusammenfällt. Analog der Tangente und Schmiegungsebene als in 1. und 2. Ordnung osculirende Gerade und Ebene definiren wir zuerst die osculirende $m$dehnung als finale lineare m dehnung der durch $m+1$ einander unendlich nahe Curvenpunkte bestimmten linearen m dehnung.

„Die $m$te Fundamentalaxe der Curve ist dann das innerhalb der osculirenden m dehnung im laufenden Curvenpunkte errichtete Lot auf der osculirenden $(m-1)$ dehnung. Die erste ist die Tangente."

Da hiernach das Lot auf allen in letzterer enthaltenen Geraden, somit auf allen vorhergehenden Fundamentalaxen senkrecht steht, so folgt, dass überhaupt alle Fundamentalaxen zu einander rechtwinklig sind.

Der laufende Curvenpunkt T sei nun Anfang der Coordinaten x_k $(k = 1, 2, \ldots n)$, wofür wir gewöhnlich kurz x schreiben, bezüglich auf ein Axensystem von fester Stellung. Ferner seien a_{kh} $(h = 1, 2, \ldots n)$ (oder kurz a_h) die Richtungscosinus der Fundamentalaxen gegen die x. Um sie auf Invarianten der Curve zurückzuführen, setzen wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_g a_h' = P_{gh} \quad (g = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

wo der Strich die Differentiation nach dem Bogen der Curve s bezeichnet. Dann folgt aus der Orthogonalität der beiden Axensysteme.

$$a_m' = \sum_{g=1}^{n} a_g P_{gm} \tag{2}$$

Es soll nun bewiesen werden, dass unter den n Grössen P nur zwei von 0 verschieden sind.

Seien x_h $(h = 1, 2, \ldots m)$ die Coordinaten von m Curvenpunkten $T_1, T_2, \ldots T_m$ in unendlich kleinen Bogenabständen u_h von T: Die Punkte $T, T_1, \ldots T_m$ liegen auf einer durch sie bestimmten linearen m dehnung erzeugt vom Punkte

$$z_m = \sum_{h=1}^{m} x_h (v_h) \tag{3}$$

bei unabhängiger Variation der Parameter (v_h). Nach taylor'scher Reihenentwickelung wird

$$x_h = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{u_h^{\lambda}}{\lambda!} x^{(\lambda)}$$

Führt man diesen Ausdruck ein und ersetzt die m Unabhängigen (v_h) durch ebensoviel neue Unabhängige v_h gemäss der Substitution

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{u_h^{\lambda}(v_h)}{\lambda!} = v_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

so wird

$$z_m = \sum_{\lambda=1}^{m} x^{(\lambda)} v_\lambda + R$$

wo der Rest

$$R = \sum_{h=1}^{m} (v_h) \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} \frac{u_h^{\lambda}}{\lambda!} x^{(\lambda)}$$

wenn sämtliche u_h in 1. Ordnung gleichzeitig verschwinden, für endliche v_λ, wo auch $(v_h) u_h^m$ endlich bleibt, unendlich klein ist. Daher ist die genaue Gleichung der osculirenden m dehnung:

$$z_m = \sum_{\lambda=1}^{m} x^{(\lambda)} v_\lambda \tag{4}$$

Diese zunächst muss ein Punkt V_m der $m$ten Fundamentalaxe mit der Coordinate z_m erfüllen. Ausserdem muss die Gerade $T V_m$ auf der osculirenden $(m-1)$ dehnung, d. i. auf

$$z_{m-1} = \sum_{\mu=1}^{m-1} x^{(\mu)} v_\mu$$

senkrecht stehen, d. h. es muss für jedes v_μ

$$\sum_{k=1}^{n} z_m z_{m-1} = 0$$

also auch einzeln

$$\sum_{k=1}^{n} z_m x^{(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots m-1) \quad \text{oder}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{m} v_\lambda \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots m-1) \tag{5}$$

sein. Durch diese $m-1$ homogenen Gleichungen sind die m Grössen v_λ bis auf einen gemeinsamen Factor Q bestimmt. Setzt man zur Abkürzung

$$A_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu)} \tag{6}$$

so wird

$$v_\nu = Q b_{\nu m} \quad \text{wo} \tag{7}$$

$$b_{\nu m} = (-1)^{m-\nu} \mid A_{\lambda\mu} \mid \begin{Bmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots m \\ \mu = 1, 2, \ldots m-1 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Ist nun

$$Q r_m = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_m^2} \tag{9}$$

der Radiusvector von V_m, also

$$\frac{z_m}{Q r_m} = a_m$$

so erhält man nach Einführung des Wertes (7) in Gl. (4):

$$r_m a_m = \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu m} x^{(\nu)} \tag{10}$$

und nach Auflösung dieser Gleichung angewandt auf $m = 1, 2, \ldots m, m+1$:

$$x^{(\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} c_{\varkappa\nu} a_\varkappa \tag{11}$$

Gl. (10) differentiirt gibt:

$$r_m a_m' + r_m' a_m = \sum_{\nu=1}^{m} \{b_{\nu m} x^{(\nu+1)} + b_{\nu m}' x^{(\nu)}\}$$

nach Gl (11)

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \{b_{\nu m} \sum_{\varkappa=1}^{\nu+1} c_{\varkappa,\nu+1} a_\varkappa + b_{\nu m}' \sum_{\varkappa=1}^{\nu} c_{\varkappa\nu} a_\varkappa\} \tag{12}$$

Multiplicirt man mit a_g und summirt von $k = 1$ bis $k = n$, so verschwinden zur Rechten alle Terme für $k \gtrless g$, folglich überhaupt alle für $g > m+1$, und man hat:

$$P_{gm} = 0 \quad \text{für} \quad g > m+1$$

Da aber

$$P_{gm} + P_{mg} = \sum_{k=1}^{n} (a_g a_m)' = 0$$

so ist auch

$$P_{gm} = 0 \quad \text{für} \quad m > g+1 \quad \text{oder} \quad g < m-1$$

Endlich ist auch für $g = m$

$$P_{gm} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_m^2)' = 0$$

folglich sind in Gl. (2) zur Rechten nur die 2 Terme $g = h-1$ und $g = h+1$ nicht null. Setzt man

$$P_{h+1,h} = -P_{h\,h+1} = p_h$$

so lautet sie:

$$a_h' = a_{h+1}p_h - a_{h-1}p_{h-1} \tag{13}$$

$$p_h = \sum_{k=1}^{n} a_{h+1}\,a_h' \tag{14}$$

Diese für $h = 1, 2, \ldots n$ gültigen Gleichungen, in denen natürlich für $h = 1$ das zweite, für $h = n$ das erste Glied der Rechten als null zu betrachten ist, sind zunächst als Differentialformeln die Verallgemeinerung derjenigen, welche von französischen Mathematikern die Fundamentalformeln der Curventheorie genannt werden. Die allgemeinere Aufstellung zeigt nun deutlich, dass die jetzt in Frankreich ausschliesslich angewandten, Herrn A. Serret als Autor zugeschriebenen Differentialformeln mit Unrecht von Monge's Vorzeichenbestimmung des zweiten Gliedes abweichen. Man sieht, dass zwar sämtliche p_h nach Definition ein willkürliches gemeinsames Doppelzeichen haben, dass aber, sofern p_h und a_h überhaupt Functionen von h sind, die zwei Glieder nicht beide positiv sein können. Die Unregelmässigkeit der Serret'schen Formeln erklärt sich aus dem Wunsche die Vertauschbarkeit von Tangente und Binormale nicht durch Vorzeichenwechsel complicirt zu machen. Dabei wird aber nicht beachtet, dass die Orthogonalcoefficientendeterminante $= 1$ durch jene Vertauschung in -1 übergeht.

Die Gl. (13) kann ferner in der Form

$$a_{h+1} = \frac{a_h' + a_{h-1}\,p_{h-1}}{p_h}$$

zur recurrenten Bestimmung von a_h dienen, wenn zuvor die p_h bekannt sind. Multiplicirt man, um ihre Werte zu finden, Gl. (12) mit a_{m+1} und summirt über alle Werte von k, so bleibt zur Rechten nur ein Term nicht null, und man findet:

$$r_m\,p_m = b_{mm}\,c_{m+1,\,m+1} \tag{15}$$

Nach Gl. (10) und (11) ist aber

$$r_m a_m = b_{mm}\,a^{(m)} + \sum_{\nu=1}^{m-1} b_{\nu m}\,a^{(\nu)}$$

$$= b_{mm}\,(c_{mm}\,a_m + \sum_{\varkappa=1}^{m-1} c_{\varkappa m}\,a_\varkappa) + \sum_{\nu=1}^{m-1} b_{\nu m} \sum_{\varkappa=1}^{\nu} c_{\varkappa\nu}\,a_\varkappa$$

Da alle $\varkappa < m$ sind, so muss der Coefficient jedes $a_\varkappa$ null sein, und es bleibt nur:

$$r_m = b_{mm}\, c_{mm}$$

Gl. (15) wird also

$$p_m = \frac{r_{m+1}}{r_m}\,\frac{b_{mm}}{b_{m+1,\,m+1}} \tag{16}$$

Nach Gl. (8) ist

$$b_{mm} = |\,A_{\lambda\mu}\,| \;(\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ m-1)$$

wofür wir abkürzend schreiben b_m. Dann lautet Gl. (13):

$$a_m' = a_{m+1}\,\frac{r_{m+1}}{r_m}\,\frac{b_m}{b_{m+1}} - a_{m-1}\,\frac{r_m}{r_{m-1}}\,\frac{b_{m-1}}{b_m} \tag{17}$$

Es bleiben noch die Grössen r_m in den $x^{(\mu)}$ darzustellen. Der Punkt V_m war anfangs ein willkürlicher auf der $m$ten Fundamentalaxe Er wird ein bestimmter, wenn wir in Gl. (7) $Q = 1$ setzen; denn dann wird nach Gl. (4) (9)

$$z_m = \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)}\, b_{\nu m}; \quad r_m = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)}\, b_{\nu m} \Big\}^2}$$

Führt man in Gl. (17) $z_m = r_m\, a_m$ ein, so lautet sie:

$$z_m' - \frac{r_m\, r_m'}{r_m^{\,2}}\, z_m = z_{m+1}\,\frac{b_m}{b_{m+1}} - z_{m-1}\,\frac{r_m^{\,2}}{r_{m-1}^{\,2}}\,\frac{b_{m-1}}{b_m} \tag{18}$$

Alle Terme dieser Gleichung sind rational. Wir sehen ihre Zähler und Nenner als ganze Functionen der Differentialquotienten von x an und beobachten nur diejenigen $A_{\lambda\mu}$, in denen $\lambda + \mu$ seinen grössten Wert hat. In den beiden Nennern $r_m^{\,2}$ und b_{m+1} ist dies A_{mm}, und zwar findet man:

$$r_m^{\,2} = \sum_{k=1}^{n} x^{(m)}\, x^{(m)}\, b_{mm}^{\,2} + .\ .\ .\ = A_{mm}\, b_m^{\,2} + .\ .\ .$$

$$b_{m+1} = A_{mm}\, b_m + .\ .\ .$$

Gl. (18) ist unerfüllbar, wenn nicht diese 2 polynomischen Nenner gemeinsame polynomische Factoren haben. Da nun A_{mm} in keinem andern Term vorkommt, so müssen alle Terme beider Grössen einander entsprechen und den ausgeschriebenen Termen proportionirt sein. Folglich haben sie selbst das gleiche Verhältniss, d. h. es ist

$$r_m^{\,2} = b_m\, b_{m+1}$$

und nach Gl. (16)

$$p_m = \frac{\sqrt{b_m\, b_{m+2}}}{b_{m+1}}$$

explicite in Differentialquotienten der x dargestellt. p_m bedeutet die $m$te Krümmung der Curve., zunächst für $m = 1$ und 2; denn

$$p_1 = \Sigma a_1' a_2 \quad \text{und} \quad p_2 = \Sigma a_2' a_3$$

sind in der Tat gleich der Krümmung und Torsion einer Raumcurve. Diese Ausdrücke definiren die Krümmung als cos. des Winkels zwischen der Hauptnormale und consecutiven Tangente, die Torsion als cos. des Winkels zwischen der Binormale und consecutiven Hauptnormale, beide dividirt durch das Curvenelement ∂s. Analog kann man nun definiren:

„Die $m$te Krümmug ist der Grenzwert des cos. des Winkels „zwischen der $(m+1)$ten Fundamentalaxe und der consecutiven „$m$ten Fundamentalaxe, dividirt durch das Curvenelement."

Nach Gl. (14) ist sie ausgedrückt durch

$$p_m = \sum_{k=1}^{n} a_{m+1}\, a_m'$$

Ohne Hülfe der recurrenten Gl. (13), also independent, gibt schon Gl. (4) den Wert jedes a_m, wenn man v_h nach Gl. (7) (8) und r_m nach Gl. (9) ausdrückt, nämlich

$$r_m a_m = \sum_{r=1}^{m} x^{(\nu)} \left| \sum_{k-1}^{n} v^{(\lambda)} x^{(\mu)} \right| \begin{cases} \lambda = 1, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots m \\ \mu = 1, \ldots m-1 \end{cases}$$

doch ist jedenfalls die Relation (13) zwischen den a für die Theorie wichtiger. R. Hoppe.

Litterarischer Bericht

XLI.

Methode und Principien.

Piper, Oberlehrer am Gymnasium zu Lemgo: Ein mathematischer Beweis der Unsterblichkeit des Menschen. Lemgo 1887. Ohle. 39 S.

Der Verfasser giebt etwa in den drei ersten Vierteln seiner Broschüre eine Darstellung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die durch gut gewählte Beispiele gestützt klar und durchsichtig geschrieben ist und z. B recht wol als Einleitung in diesen Wissenszweig für das Selbststudium oder als Leitfaden zur Repetition für vorgerückte Schüler dienen könnte, zumal sie auch ein richtiges Mass in der Quantität des behandelten Stoffes innezuhalten scheint. Soll Ref. aus diesem anregend geschriebenen Teile einiges herausgreifen, so sei es zunächst der auf S. 7 durch ein Beispiel erläuterte Nachweis, dass die Wahrscheinlichkeit für ein und dasselbe fragliche Ereigniss oftmals subjectiv verschieden ist je nach den Kenntnissen, mit denen der Schätzende dem Sachverhalte gegenübersteht; ferner aber die eingehende Darlegung der objectiven Bedeutung, die dennoch die Wahrscheinlichkeit so, wie sie mathematisch definirt wird, in den meisten Fällen besitzt. Der von Jakob Bernoulli untersuchte Zusammenhang zwischen dem w des Mathematikers und der durchschnittlichen Anzahl zutreffender Fälle unter einer grossen Zahl von Versuchen, wir wollen kurz sagen: „das Gesetz der grossen Zahlen", wird von Piper in sinnreicher Weise bestätigt durch Benutzung einer siebenstelligen Logarithmentafel. Er nimmt die Logarithmen der 10, 30, 100, 300, 1000, 3000 oder 10000 ersten

unter den Zahlen 1, 11, 21, 31, . . . 99991, notirt die 7te Ziffer ihrer Logarithmen-Mantisse und zählt ab. wie oft jede Ziffer (0, 1, 2 . . . 9) hierbei vorkommt. Nach dem Gesetze der grossen Zahlen hat man jede Ziffer ungefähr $\frac{1}{10}$ mal so oft zu erwarten, als Zahlen benutzt worden sind, d. h. ungefähr 1, 3, 10, 30, 100, 300, 1000 mal. In Wahrheit finden natürlich Abweichungen statt; diese Abweichungen sind für jede einzelne Ziffer procentisch berechnet. Interessanter sind die mittleren Abweichungen: diese betragen, wie sich aus den Piper'schen Zahlen ergiebt, für die genannten Intervalle bezüglich

$$60 \quad 46_{,67} \quad 24 \quad 16 \quad 12_{,8} \quad 4_{,73} \quad 3_{,22} \text{ Procent}$$

der zu erwartenden Gesamtzahl. Diese mittleren Abweichungen stellen eine schnell fallende Reihe dar und bestätigen eben hierdurch das fragliche Gesetz. Die Besprechung des Gegenstandes vertieft sich, soweit es für den Standpunkt etwa eines guten Primaners möglich war. — Später geht Piper auf die Gesetze der Addition und Multiplication von Wahrscheinlichkeiten, sowie auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen ein.

Auf S. 25 wird ein Beispiel besprochen, das auf eine unendlich geringe Wahrscheinlichkeit führt oder vielmehr auf $w = 0$. Es handelt sich um folgendes: „Ich lege in meinen Garten eine Schützenscheibe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Meteorstein, der zur Erde fällt, diese Scheibe treffe und zwar so, dass im letzten Moment der Schwerpunkt des Steines völlig genau auf den Mittelpunkt der Scheibe gerichtet sei?“ Soll die Scheibe, die 1^{qm} Flächeninhalt haben mag, überhaupt getroffen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit

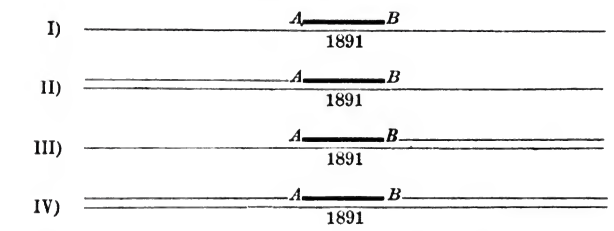
$$= \frac{1^{qm}}{\text{Erdoberfläche}} = \frac{1^{qm}}{70000 \text{ Bill. } ^{qm}} = \frac{1}{70000 \text{ Bill.}}$$

(ungefähr); soll ihr hundertster Teil getroffen werden, so ist auch jene 100 mal so klein u. s. w.: so wird hergeleitet, dass die fragliche Wahrscheinlichkeit = 0 ist. Freilich wäre es dennoch denkbar, dass die Scheibe genau im Mittelpunkt getroffen würde, doch will der Verfasser „den Widerspruch nicht zu lösen versuchen.“ Wir kommen später darauf zurück. Jedenfalls scheint dies Beispiel dem Verfasser vorgeschwebt zu haben, wenn er nun von S. 32 an die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendet, um einen Beweis für die Unsterblichkeit des Menschen zu führen. Dieser Beweis scheint dem Referenten nach verschiedenen Richtungen hin völlig verfehlt und bedarf seiner Ueberzeugung nach auch öffentlich der Widerlegung, um nicht die Principien der so oft gemissbrauchten

Wahrscheinlichkeitsrechnung in Misscredit gebracht zu sehen, indem sie angewendet werden auf ein transcendentes Gebiet, in welchem nun einmal bloss der Glaube, nicht aber das Wissen herrschen kann.

Die angedeutete Analogie liegt in folgendem: mein Erdenleben umfasst nur eine kurze Spanne Zeit, allerhöchstens etwa 100 Jahre; die Zeit überhaupt ist unendlich. Wie es nun im höchsten Grade unwahrscheinlich ist, dass der Meteorstein auf die Scheibe im Garten trifft, ebenso unendlich gering war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass die mir beschiedene Lebenszeit gerade in die jetzigen Jahre, mit in das Jahr 1891 fiel; denn es hätte eine unendliche Fülle anderer Zeiträume zu Gebote gestanden, zumal da Gottes Schöpfungswerke nicht notwendig an das Jahr 3762 v. Chr. (oder ein ähnliches) gebunden war. Verspräche uns ein Mann, dass wir mit eigenen Augen und sofort den Meteorstein auf den Mittelpunkt der Scheibe fallen sehen sollten, und es träfe dies wirklich zu, so würden wir alle dies Ereigniss, das a priori eine Wahrscheinlichkeit = 0 besass, eben nicht als Werk des Zufalls ansehen, sondern den Mann entweder für einen geschickten Taschenspieler oder für einen Kenner der uns noch verborgenen Naturgesetze oder für jemand halten, der mit höheren Mächten im Einverständniss lebt: wir würden an all diese Dinge jedenfalls noch eher als an ein reines Spiel des Zufalls glauben. In dem anderen Falle, bei der Frage wegen des zeitlichen Zusammentreffens seines Lebens mit der Gegenwart, hätte Piper, wenn er nun einmal den göttlichen Willen mit in die Betrachtung einführte, eben diesen als einfachste Erklärung heranziehen können: dann fiel das Rätsel fort, obwol der Mensch selbst die Wahrscheinlichkeit jenes Zusammentreffens a priori für verschwindend klein ansah.

Doch dies nur vorläufig! Jedenfalls müssen wir unsere Betrachtung noch vertiefen. Es handelt sich nämlich für Piper um eine Aufgabe, bei der eine Wahrscheinlichkeit der Ursache in Frage kommt. Unser Dasein ist ein Factum, und dieses Factum kann nach Piper eine vierfache „Ursache" haben: entweder ist uns überhaupt nur eine endliche Dauer bestimmt oder eine Dauer, die in Richtung der Vergangenheit, oder die in Richtung der Zukunft, oder endlich die nach beiden Richtungen unendlich ist. Wir stellen diese vier möglichen Wurzeln unsres Daseins graphisch dar, indem wir die unendliche Zeit durch eine gerade Linie, unser gesamtes Dasein durch eine direct darüber gezeichnete gerade Linie und insbesondere die uns auf der Erde beschiedene Lebenszeit durch den markirten Abschnitt *AB* wiedergeben.



Nun besitzt jede Ursache, aus der das betreffende Ereigniss mit unendlich kleiner Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, selbst eine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit; es grenzt also an Gewissheit, dass sie nicht vorhanden gewesen; jedenfalls verwerfen wir sie selbst unwillkürlich geradeso wie in dem erwähnten Beispiel vom Meteorstein den hier so äusserst unwahrscheinlichen Zufall. Genau so beurteilt nun Piper die Ursache I) unsres Erdenlebens als eine unendlich unwahrscheinliche; die Gründe sind schon oben genannt. Nun ist aber derselbe Einwand wie gegen I) auch gegen die übrigen Ursachen zu erheben. Jedenfalls nämlich ist mein gegenwärtiges Erden- und Menschenleben ein durch Geburt und Tod fest begrenzter Teil meines möglicherweise unendlich langen Daseins, ein Teil überdies, der durch das Bewusstsein und das Gedächtniss, mit dem ich ihn durchlebe und festhalte, für mich von hervorragender Wichtigkeit ist. Dass dieser ausgezeichnet wichtige Abschnitt meines Daseins gerade in die Gegenwart und mit in das Jahr 1891 fällt, ist und bleibt — so betrachtet — ein höchst merkwürdiges Ereigniss, sodass dieser von Piper selbst hervorgehobene Gesichtspunkt auch für II), III), IV) bestehen bleibt. Er selbst bezeichnet aus dem gleichen Grunde II), sowie nachträglich auch III) (S. 38) als unstatthafte Erklärungen, merkwürdigerweise aber nicht auch IV). Für mich aber ist das Ergebniss dieser Betrachtung das folgende: da unter den vier möglichen Erklärungsweisen meines gegenwärtigen Lebens keine mehr leistet als die andere, so ist eine Entscheidung zwischen ihnen auf Grund der Mathematik überhaupt nicht möglich.

Im Sinne Piper's war die Wahrscheinlichkeit der Ursachen I), sowie auch II) und III) gleich $\frac{1}{\infty}$. *) Stösst man auf solche Wahr-

*) Da sich die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ursachen verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten des fraglichen Ereignisses unter Zugrundelegung der einzelnen Ursachen, so könnten wir, die wir die letzteren sämtlich unend-

scheinlichkeiten, so hat man stets einen Fehler in der Fragestellung gemacht. Zwei Beispiele aus der Geometrie mögen dies erläutern. Vor uns liegt ein Blatt Papier; darauf gezeichnet ist eine gerade Linie. Ausserhalb derselben befindet sich ein fester Punkt, um den ein fest damit verbundenes Lineal drehbar ist. Man soll dem Lineal mit verschlossenen Augen die zur geraden Linie parallele Richtung geben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt der Versuch? Die Antwort wird verschieden ausfallen je nach der geforderten Genauigkeit, wobei man freilich sich vorstellen muss, es gäbe praktisch ein Mittel die Parallele von den annähernd parallelen Geraden streng zu sondern. Die Wahrscheinlichkeit erscheint, wenn absolute Genauigkeit verlangt wird, als $\frac{1}{\infty}$; lässt man geringe Neigungen zu, vielleicht bis zu einer Bogenminute, so ergeben sich leichtberechenbare endliche Werte, in unserm Beispiel

$$w = \frac{2}{180 \cdot 60} = \frac{1}{5400}$$

Da nun „$\frac{1}{\infty}$“ unweigerlich null gesetzt werden muss, das Treffen der parallelen Lage aber dennoch denkbar ist, so entscheide ich mich dafür die streng aufgefasste Frage überhaupt für fehlerhaft zu erklären. Es handelt sich hier um die Unvergleichbarkeit von Punkt und Linie: wie zahlreiche Punkte niemals einen Kreis zusammensetzen können, also auch nicht gefragt werden kann: „Der wievielte Teil von der ganzen Peripherie ist einer ihrer Punkte?“ — so kann auch eine singuläre Stellung des Lineals nicht verglichen werden mit der Gesamtheit der durch Drehung hervorgehenden anderen Lagen. Die richtige Fragestellung wird vielmehr einem ausgedehnten Bereiche gegenüber auch nur das Treffen eines Teilbereiches fordern dürfen, im obigen Falle also annähernd parallele Lagen zulassen müssen. — Noch auffallender erscheint das Resultat, wenn der singuläre Fall ein besonders ausgezeichneter ist. Ein Kegel möge geschnitten werden: mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man eine Parabel erhalten? Leicht macht man durch Festsetzung gewisser Nebenbedingungen für die Führung des Schnittes die Aufgabe identisch mit der von der Parallele. Auch hier ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\infty}$, ein Fingerzeig, dass die Frage überhaupt falsch war: man muss hier neben der Parabel noch ge-

---

lich klein von der nämlichen Grössenordnung befunden haben, die ersteren dennoch für endlich ansehen, aber derart, dass uns ihre Verhältnisse und also auch ihre absoluten Beträge unbekannt bleiben.

wisse Ellipsen und Hyperbeln zulassen, deren erlaubte Abweichung von jener mathematisch in der verschiedensten Weise festgesetzt werden könnte. — Jedenfalls ergiebt sich aus der angestellten Betrachtung, dass die von Piper durchgeführte Untersuchung von vornherein zur Unfruchtbarkeit verurteilt war. Nebenbei erledigt sich so auch der vom Verfasser erwähnte, aber nicht aufgedeckte Widerspruch betreffs der genau in ihrem Mittelpunkt zu treffenden Scheibe (S. 25): auch dort liegt der Fehler schon in der Fragestellung.

Aus der Zufälligkeit der Lage der uns zugemessenen Lebenszeit schliesst Piper, dass unser eigentliches Dasein von allen zeitlichen Schranken frei sein müsse. Wie nun, wenn man ähnliche Schlüsse auf Raum und Individualität ausdehnen wollte? Wie gross war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass ich gerade in dem und dem Hause der und der Stadt in Deutschland (und auf der Erde) geboren wurde? Soll man hier nicht wieder den Schluss ziehen, dass unser gesamtes Dasein nach und nach den ganzen Raum durchwandern oder irgendwie umspannen muss? Ferner: wie zufällig, dass ich gerade als Deutscher, als Abkömmling der und der Familie von bestimmtem Stande, Confession, Charakter, Vermögen u. s. w. geboren ward: auch dies hatte a priori betrachtet eine äusserst geringe Wahrscheinlichkeit. Welches reiche Gebiet für die Phantasie tut sich hier auf, und doch wie öde für den Verstand! Doch gerade durch solche Analogien erkennt man deutlich das Unberechtigte der Piper'schen Schlussweise!

Aber noch von einer ganz anderen Seite müssen wir die Deductionen Piper's betrachten. Eine Uebertragung derselben etwa auf den Tisch, der vor uns steht, schneidet er selbst ab, und ebenso hebt er ausdrücklich hervor, dass er für andere Menschen die Unsterblichkeit nicht in gleicher Weise wie für sich selbst beweisen, sondern nur durch Analogie erschliessen könne. Denn weder die jetzige Existenz eines Tisches noch die anderer Menschen gehöre für ihn zu den „merkwürdigen" Ereignissen: habe es doch zu allen Zeiten Tische, zu allen Zeiten auch Menschen gegeben. Aber, sagt er (S. 37): „dass ich gegenwärtig existire, das ist für mich unter allen Tatsachen die am meisten ausgezeichnete; ohne dieselbe würde es für mich überhaupt nichts geben." Die hervorragend „merkwürdigen" Ereignisse aber verlangen wir stets durch mehr als durch blossen Zufall erklärt zu sehen; dieser letztere befriedigt uns als Erklärungsgrund nur bei den durch nichts Besonderes ausgezeichneten, an Zahl so ungleich häufigeren, „gewöhnlichen" Ereignissen. Wiederum denke man an den Meteorstein: fällt er statt auf unsere Scheibe irgendwo in Amerika nieder, so

finden wir das nicht merkwürdig und sprechen von Zufall; wie anders, wenn die Scheibe vor unseren Augen in ihrem Mittelpunkt getroffen wird! Den Zufall würden wir dann für völlig ausgeschlossen halten. So reicht auch der Zufall wol aus zu erklären, dass gerade dieser Tisch (und kein anderer) jetzt vor mir steht, dass gegenwärtig der Sultan Abdul-Hamid (und nicht ein Soliman oder ein Abdul-Medschid) auf dem türkischen Throne sitzt; nicht aber, dass ich gerade jetzt lebe, denn das ist für mich die „im höchsten Grade vor anderen ausgezeichnete Tatsache."

Diesem Ideengange gegenüber ist erstens zu erwähnen, dass das Merkwürdige, was in meinem jetzigen Dasein liegt, doch bloss subjectiv vorhanden ist, während ein Herabfallen des Meteors auf den Mittelpunkt der Scheibe gleichmässig von jedermann als merkwürdig angesehen werden würde, und dass es die Mathematik füglich nur mit objectiv anerkannten Vorstellungen zu tun haben kann Ferner aber, und dies ist der Hauptpunkt: nicht die gegenwärtige Spanne Zeit ist es, wodurch mein jetziges Dasein mir als hervorragend ausgezeichnete Tatsache erscheint, sondern der Umstand, dass eben ich es bin, der da ist. Bei unsrer bisherigen Ergründung und Prüfung der Piper'schen Ideen hatten wir es mit der Frage zu tun: „Wie gross war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn ich überhaupt leben sollte, ich gerade im Jahre 1891 dasein würde?" Diese Wahrscheinlichkeit ist ihrem Werte nach zwar völlig unbekannt, sicherlich aber ungefähr gleichzusetzen der entsprechenden Wahrscheinlichkeit für jeden unserer Zeitgenossen. Um diese Wahrscheinlichkeit kann es sich also, wenn man mit Piper einen Unterschied macht zwischen dem Ich und der Aussenwelt, nicht handeln; der Bedingungssatz „wenn ich überhaupt leben sollte" muss vielmehr fortfallen, und ebenso kann die Frage nach der Zeit vorläufig ausgeschieden werden, da bei einer anderen Zeit unseres Erdenlebens diese letztere ebenso sehr oder ebenso wenig merkwürdig erscheinen würde als die Gegenwart. Es muss also dem Verfasser die freilich nirgends so formulirte Frage vorgeschwebt haben, die einen so starken Gegensatz zwischen dem Ich und dessen Mitmenschen rechtfertigt: „Wie gross war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass ich überhaupt dasein würde?" Und diese Frage ist logisch völlig unhaltbar, denn sie anticipirt das Ich und setzt es, während es noch gar nicht vorhanden ist, zukünftig als vorhanden. Natürlich konnte ein Anderer, der vor meiner Geburt schon lebte, eine solche auf mich bezügliche Frage tun; aber so ist sie hier nicht gemeint, denn dann verliert sich wieder alles „Merkwürdige," da für den Aussenstehenden ich ebenfalls ein Aussenstehender bin.

Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit (a priori), dass überhaupt in einem künftigen Jahre Menschen dasein werden, so ist dieselbe für absehbare Zeiträume = 1, denn zu allen Zeiten kehren die Bedingungen wieder, unter denen neuen Menschen das Dasein gegeben wird. Ganz anders stellt sich die Frage, wenn von dem künftigen Dasein eines näher zu definirenden einzelnen Menschen die Rede ist. Die Schwierigkeit liegt hier zunächst in der Frage selbst, denn wie lässt sich ein noch gar nicht lebender Mensch schon im voraus so charakterisiren, dass man von einer eindeutigen Definition sprechen könnte? Man denke etwa an denjenigen Zukunftsmenschen, der zum ersten Mal seinen Fuss auf den Nordpol setzt. Wie seine Existenz überhaupt fraglich ist, so ist es die Zeit seines Auftretens noch viel mehr. Immerhin hätte die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit dürfen wir ihn und seine Tat im Jahre 1950 erwarten?“ logisch nichts Anstössiges, Widersinniges. Noch anders aber verhält es sich mit dem Ich. Das Ich lässt sich, bevor es zum Dasein gelangt ist, überhaupt nicht charakterisiren oder definiren, und die Frage: „Welches war a priori die Wahrscheinlichkeit, dass ich existiren würde,“ oder specieller: dass ich gerade im Jahre 1891 existiren würde?“ hat überhaupt keine Berechtigung. Und auch die Frage nach einer Wahrscheinlichkeit gewisser Ursachen unsres Daseins würde sofort logisch falsch, wenn wir sie mit Beschränkung auf das Ich aufwerfen wollten: die Wahrscheinlichkeit der Ursache setzt bei ihrer Definition im allgemeinen, sowie bei ihrer Berechnung im einzelnen Falle stets die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses auf Grund dieser Ursache voraus; da aber die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses selbst logischerweise hier nicht in Frage kommen konnte, so auch nicht die Wahrscheinlichkeit etwaiger Ursachen. — Am allerwenigsten kann aber das von Piper auf S. 34 eingeschlagene Schlussverfahren gebilligt werden, wo von der Vorbedingung die Rede ist, dass so und so viele Menschen vor mir gelebt und das heiratsfähige Alter erreicht haben müssen: indem Piper bis auf Moses' Zeit zurückgeht, findet er so eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10^{34}}$. Es werden hiermit die Vorbedingungen und Ursachen wol für das Leben eines bestimmt definirten Menschen überhaupt angegeben, der zur Zeit 1891 leben sollte, nicht aber die Ursachen gerade für das Ich. Den Fehler hätte Piper schon daran entdecken können, dass er diese letzte Schlussweise auch auf seine Mitmenschen, auf den Sultan Abdul-Hamid u. s. w., hätte anwenden können, obwol er doch in anderem Zusammenhang deren Dasein ganz verschieden-wahrscheinlich taxirt als sein eigenes.

Wir fassen kurz die berührten Punkte nochmals zusammen.

In mannigfaltiger Weise sucht Piper die Wahrscheinlichkeit a priori für mein Dasein in der Gegenwart als eine unendlich kleine oder als eine mit dem Wert 0 behaftete hinzustellen, um dann auf Grund des Wunders, dass ich dennoch jetzt bin, die Unsterblichkeit als einen deus ex machina hervorspringen zu lassen. Das Wunderbare kann nun erstens darin gesucht werden, dass eine endliche Zeitstrecke innerhalb der unendlichen Zeit gerade so und nicht anders angenommen worden ist: in dieser Beziehung erklärt aber seine Ursache IV) nicht mehr als die Ursachen I), II) und III); überdies gelangt man auf verschwindende Wahrscheinlichkeitswerte, die an sich stets auf einen Fehler in der Fragestellung hinweisen. Zweitens kann das Rätsel des Selbstbewusstseins herangezogen werden, dieses Centrums, um welches sich erst alle Vorstellungen gruppiren müssen Durch Betrachtung desselben setze ich mich in scharfen Gegensatz zur übrigen Menschheit und gewinne einen Standpunkt, von wo aus ihr Dasein mir nicht, wol aber mein eigenes höchst merkwürdig erscheint. Da meine Persönlichkeit ferner eine fest geschlossene, nachträglich, wo ich lebe, leicht charakterisirbare, aber doch rein individuelle ist, so schwebt als Wahrscheinlichkeit a priori für dieses mein Sein eine um so geringere vor, je weiter die Detaillirung in der Charakteristik meiner Person jederzeit getrieben werden könnte. Bei näherer Betrachtung aber stellt sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit a priori für mein Sein als logisch falsch heraus, weil sie ein Nichtsein des Ich zu ihrer Grundlage macht.

Wir müssen daher die Piper'schen Betrachtungen, mögen sie nun auf die Zeit unsres Lebens oder auf das Ichbewusstsein den Hauptaccent legen, für durchaus verfehlt und irrig erklären, fühlen uns aber dennoch dem Verfasser zu Dank verpflichtet, da er uns zur näheren Prüfung von Fragen angeregt hat, die wie für uns, so gewiss auch für viele andere von hohem Interesse waren.

Alfred Holtze, Gymnasiallehrer
in Naumburg a. S.

Einige kritische Bemerkungen über die Grassmann'sche Ausdehnungslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Raumcurven.

In der Abhandlung über die Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven [1]) begründet Herr

1) Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven von H. Grassmann. 1886. Beilage zum Programm der lateinischen Hauptschule zu Halle a. S.

H. Grassmann die Aufstellung der Ausdehnungslehre damit, dass dieselbe die geometrischen Grössen direct der Rechnung unterwirft, ohne sie vorher ihres geometrischen Gewandes entkleidet zu haben, während die gewöhnliche analytische Geometrie an Stelle der geometrischen Grössen gewisse für dieselben charakteristische Zahlen einführt, mit diesen Zahlen rechnet, und die Resultate wieder in die geometrische Sprache übersetzt. Wir wollen untersuchen, ob das oben Gesagte in der Ausdehnungslehre verwirklicht wird.

In der Ausdehnungslehre zerfällt die einfache Multiplication in eine äussere und innere; in der ersteren werden wirklich die Strecken als geometrische Grössen aufgefasst, in der zweiten, der inneren Multiplication werden die geometrischen Grössen noch viel abstracter behandelt als in der gewöhnlichen analytischen Geometrie. Zur Begründung der inneren Multiplication wird nämlich eine Längezahl gleich einer Flächenzahl gesetzt. Um dieses jedoch ausführen zu können, muss man von jeder Bezeichnung der Zahl absehen, und nur am Ende der Rechnung wird man mit der Zahl den Begriff der Länge verbinden können. Die Ausdehnungslehre verliert hier gänzlich das ihr Eigentümliche und wird abstract. Sobald man nun beachtet, dass man in der inneren Multiplication mit gänzlich unbenannten Zahlen zu tun hat, so wird man ohne weiteres einsehen, dass für sie alle Multiplicationsregeln gültig sind, da ja diese Zahlen unseren gewöhnlichen entsprechen. Etwas anderes ist es, wenn die Zahl ausser der Länge auch die Richtung angeben soll.

Die innere Multiplication wird durch das Symbol $[a \mid b]$ angedeutet, welches durch Definition dem Ausdruck $ab\cos(ab)$ gleichgesetzt wird, wo a und b die absoluten Zahlen sind. Wir wollen dieses Product uns genauer ansehen. $\mid b$ soll gleich der Flächenzahl cd sein, und heisst Ergänzung der Strecke b. In dem Product $[a \mid b]$ giebt a eigentlich die Länge und Richtung der Strecke an. Infolge der der Definitionsgleichung

$$[a \mid b] = ab\cos(ab)$$

soll auch bei a von der Richtungsangabe abgesehen werden. Die relative Lage von a zu b wird hier ebenso angegeben wie in der gewöhnlichen Geometrie. Dass diese Gleichung wirklich eine Definitionsgleichung ist, folgt aus der ganz willkürlichen Annahme über die Lage der Ergänzung der Strecke zur Fläche. Es soll nämlich $\mid b$ senkrecht cd stehen. Unzweifelhaft werden bei der inneren Multiplication die Grössen ihres geometrischen Gewandes entkleidet.

Was die Ableitung des pythagoräischen Lehrsatzes betrifft, so bemerke ich, dass im eigentlichen Sinne nur gezeigt wird, dass es

Quadrate von Zahlen giebt, deren Summe gleich dem Quadrat einer andern Zahl ist. Dies deutet auch schon die Schreibweise an, in welcher das Endresultat erhalten wird:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

denn die deutschen Buchstaben sollen nur die Zahlen angeben. Verbindet man mit diesen Zahlen den Begriff der Länge, so erhält man den pythagoräischen Lehrsatz. Ebenso verhält es sich mit dem verallgemeinerten Pythagoras. Die Ausdehnungslehre verlässt hier den von ihr beabsichtigten Weg, geht in das Gebiet der unbenannten oder absoluten Zahlen über, und nur mit Hülfe neu eingeführter Definitionen übersetzt sie das erhaltene Resultat in die geometrische Sprache. Principiell unterscheidet sie sich also in nichts von der analytischen Geometrie, und so können wir fragen, welchen Zweck hat denn die Einführung der Ausdehnungslehre, wenn durch sie die Beweise an Correctheit nicht gewinnen, die Abkürzung scheinbar der Rechnung durch die Einführung einer grossen Anzahl von Definitionen aufgehoben wird.

Beachtet man, dass man in der Ausdehnungslehre streng zwischen benannten und unbenannten Zahlen unterscheiden muss, dann kann einem das Verständniss der räumlichen Multiplication nicht schwer fallen. Von diesem Standpunkte aus wollen wir die räumliche Multiplication betrachten.

Nach früherem ist

$$[ab] = |\, c$$

wo $|\, c$ eine unbenannte Zahl.

Die Ergänzung des Flächenraums ab wird definirt

$$|\, [ab] = c$$

Sie ist also die ursprüngliche Strecke oder der ursprüngliche Flächenraum selbst. Es fragt sich nun, ob diese Strecke c, welche doch einen Flächenraum repräsentirt, die Richtung angibt. Letzteres muss bejaht werden, wenn wir auf die Definition der äusseren räumlichen Multiplication Rücksicht nehmen. Es ist also zwischen $|\, c$ und $|\, [ab]$ streng zu unterscheiden, nicht bloss, dass $|\, c$ eine Strecke und $[ab]$ eine Fläche darstellt, *d*, sondern dass $|\, c$ eine unbenannte Zahl, $|\, [ab]$ eine benannte ist. Herr Grassmann scheint diesen Unterschied zwischen beiden Zahlen nicht zu machen, wenigstens lässt die Bemerkung zu der Formel 53) darauf schliessen: „Die Grösse $|\, [ab]$ stellt eine Strecke dar, welche senkrecht auf $[ab]$ steht, und deren Längenzahl gleich der Flächenzahl von $[ab]$ ist."

Während bei der Ergänzung der Strecke c der Flächenraum senkrecht zu dieser Strecke c construirt wird, so wird bei der Ergänzung der Fläche die Strecke senkrecht zu deren Fläche construirt, wobei natürlich die Längenzahl der Strecke gleich der Flächenzahl ist. Sobald also in beiden Fällen der Flächenraum derselbe ist, werden $|\,c$ und c zusammenfallen, sie werden aber nicht identisch werden. Uebrigens kommt es bei der räumlichen Multiplication gar nicht darauf an, dass

$$|\,[ab] = c \quad \text{anstatt} \quad [ab]$$

steht, da man bei der Aufstellung der Grundformeln sich eines trigonometrischen Satzes bedient.

Haben wir das Product $[ab\,.\,cd]$, und soll die innere räumliche Multiplication ausgeführt werden, so ist nach der Ausdehnungslehre zu schreiben $[ab\,|\,cd]$. Führen wir die Ergänzungen ein, und setzen wir $[ab[= |\,c; \quad |\,[cd] = f$

so wird

$$[ab\,|\,cd] = [\,|\,ef]$$

In diesem Product ist $|\,c$ eine unbenannte, f eine benannte Zahl. Bei der inneren räumlichen Multiplication haben wir also auch das Product einer benannten mit einer unbenannten Zahl. Solche Producte kommen im unseren Zahlensystem vor, wir können also ohne weiteres die Factorenfolge vertauschen

$$[\,|\,ef] = [e\,|\,f]$$

Dies ist also die innere Multiplication des ersten Abschnittes. Dem Symbol $[\,|\,ef]$ wird nun ein anderer Sinn beigelegt als dem Product $[a\,|\,b]$. Da f tatsächlich eine Fläche repräsentirt, so hat man nach einem bekannten Satze

$$f = cd\sin(cd)$$

zu setzen, und man erhält

$$[\,|\,e\,.\,f] = \mathfrak{e}cd\sin(cd]$$

Ist $\qquad ab = cd;$ so wird

$$[ab] = \mathfrak{e}\,.\,f \quad \text{wo} \quad e = f$$

also $\qquad [ab]^2 = \mathfrak{e}^2 = a^2b^2\sin^2(cb)$

Selbstredend werden auch hier die absoluten Zahlen $a = b$ genommen. Das Resultat stellt also eine absolute Zahl dar.

Die Formel 38)

$$ab \sin(ab) = \sqrt{(ab)^2}$$

führt Herr Grassmann mit der Bemerkung an:

„Nebenbei folgt aus der obigen Entwicklung die Formel 38)"

Diese Formel hat jedoch tatsächlich gar keine Ableitung gefunden, da sie ebeu eine geometrisch-trigonometrische Wahrheit ist, welche Herr Grassmann schon vor der Bemerkung zur Formel 38) benutzt, um das Product $[ab]$ auszudrücken. Die Formel 38) drückt diesen Satz nur in der Schreibweise der Ausdehnungslehre aus.

Für die äussere räumliche Multiplication wird die Definitions-Gleichung aufgestellt

$$[\,|\,a\,|\,b] = |\,[ab]$$

welche Formel sehr wol eine Ableitung zulässt, sobald man nur den Unterschied zwischen benaunten und unbenannten Zahlen beachtet.

Bei der räumlichen äusseren Multiplication soll nun auch die Gültigkeit des Gesetzes über die Vertauschung der Reihenfolge der Factoren aufhören. Wir haben:

$$[ab = cd];\quad [ab] = |\,e;\quad [cd] = |\,f \quad \text{es wird}$$

$$[\,|\,e\,|\,f] = !\,[ef]$$

Soll nun durch Vertauschung in der Reihenfolge von $e = f$ das Resultat beeinflusst werden, so müssen e und f die Richtung angeben. Nur in diesem Fall ist

$$[ef] = -\,[fe]$$

und hieraus ergiebt sich rückwärts

$$[ab\,cd] = -\,[cd\,ab]$$

In der Aufgabe 5. auf S. 19 ist das Product $[\,|\,a\,|\,b\,|\,c]$ zu bestimmeu. Natürlich wird es gleich $[abc]$ gefunden. Jetzt lesen wir Folgendes:

Verstehen wir nun endlich noch unter der Ergänzung einer Zahl α nichts anderes als diese Zahl α selbst, setzen wir also $\alpha = \alpha$, und somit auch

$$|\,[abc] = [abc]$$

so können wir das gewonnene Resultat auch so schreiben

$$[abc] = |\,[abc]$$

Ich bemerkn hiezu: Die Ausdehnungslehre kennt keine Ergänzungen einer Zahl, sie hat wohl Ergänzungen einer Strecke und

einer Fläche, aber von einer absoluten Zahl soll bei ihr keine Rede sein. Zudem sind die Ergänzungen der Strecke und Fläche sehr von einander verschieden, wie wir schon vorhin dargetan haben. Wir können aus dieser Bemerkung des Herrn Grassmann nur erkennen, dass in der Ausdehnungslehre benannte und unbenannte Zahlen nicht unterschieden werden. Dieses zeigt auch die Aufgabe 6)

Zur Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Theorie der Raumcurven wird die Gleichung einer Raumcurve dargestellt durch

$$x = x_{(t)}$$

wo x von einem bestimmten Punkt O an gerechnet wird, und t eine variable Zahlengrösse ist. Für t kann man auch die Längenzahl des Bogens der Curve nehmen. Da mit x die Richtung verbunden ist, so ist durch die Gleichung

$$x = x_{(t)}$$

die Raumcurve eindeutig bestimmt; eine Construction derselben nach dieser Gleichung dürfte wol unmöglich sein, da nur für die Construction die Richtung von x wirklich gegeben sein muss.

Bei der Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Raumcurventheorie ist ferner von grosser Wichtigkeit die Gültigkeit der Grundbegriffe und Operationen der Differentialrechnung in der Ausdehnungslehre. Herr Grassmann sieht die Gültigkeit als bestehend an, was nicht richtig ist.

Infolge des Additionstheorems der Ausdehnungslehre ist das zwischen x und $x+dx$ liegende Curvenstück dx, sodass $dx = ds$ ist. Für O als Coordinatenanfang sei

$$AO = x, \quad BO = x+dx$$

dann ist

$$AB = ds = dx$$

Es ist nun

$$AB = \sqrt{(BC)^2+x^2(d\varphi)^2}$$

wo BC das gewöhnliche Differential und $d\varphi$ der Winkel zwischen x und $x+dx$ ist. Es ist aber das dx der Ausdehnungslehre grösser als das der Differentialrechnung, 1 er absolute Zahlenwert von dx ist also gleich dem Zahlenwert des Bogens, also

$$\sqrt{(dx)^2} = ds$$

Wir kommen hier auf den feinen Unterschied zwischen dx und ds. Es soll nämlich dx die Richtung und die Länge, ds nur die Längenzahl des Curvenbogens angeben, denn nur auf diese Weise kann

unter $\frac{dx}{ds}$ eine Strecke (Neigungsstrecke nach Herrn Grassmann) verstanden werden. Herr Grassmann lässt jedoch ds die Länge darstellen, wie aus dem Satz folgt:

„Dann ist das zwischen beiden Punkten liegende Curvenstück seiner Länge-Richtung nach gleich dx, während die Länge allein durch den correspondirenden Zuwachs von s, durch ds dargestellt wird." Wäre ds die Länge, so würde $\frac{dx}{ds}$ ausser der Richtung die Verhältnisszahl zwischen dx und ds angeben. Von einer Strecke könnte dann bei $\frac{dx}{ds}$ gar keine Rede sein. Es ist also $\frac{dx}{ds}$ weiter nichts als der dste Teil von dx.

Das zweite Differential findet man nach den Principien der Ausdehnungslehre dadurch, dass man AD gleich und parallel

$$dx_1 = BE$$

macht, so ist

$$BD = d^2x$$

Es fragt sich nun, ob der numerische Wert von d^2x sich mit dem durch die Differentiation erhaltenen deckt? Da der absolute Zahlenwert von dx gleich ds ist, so wird auch, wenn die Gültigkeit des gewöhnlichen Differentiirens als richtig angenommen wird, der absolute Zahlenwert von d^2x gleich d^2s sein. Dies tritt nur ein, wenn der absolute Wert von x gleich $s+\text{const}$ ist, was Herr Grassmann durchaus nicht annimmt.

Noch frappanter zeigt sich die Ungültigkeit in folgendem Beispiel: Es ist

$$\frac{d(x)^2}{ds} = 2\left[x \mid \frac{dx}{ds}\right]$$

Dieses Product ist aber nach der Definitionsgleichung gleich

$$\mathfrak{x}\,\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\cos\left(x_0\,\frac{dx}{ds}\right)$$

wenn $\mathfrak{x}$ der absolute Zahlenwert von x und $\frac{d\mathfrak{x}}{ds}$ der absolute Zahlenwert von $\frac{dx}{ds}$ ist. Es besteht also die Gleichung:

$$\frac{d(x)^2}{ds} = 2\left[x \mid \frac{dx}{ds}\right] = 2\mathfrak{x}\,\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\cos\left(x\,\frac{dx}{ds}\right) = 2\mathfrak{x}\cos\left(x\,\frac{dx}{ds}\right)$$

da

$$d\xi = ds$$

ist. Differentiren wir noch einmal, so ist

$$\frac{d^2(x)^2}{ds^2} = 2\left[\frac{dx}{ds} \mid \frac{dx}{ds}\right] + 2\left[x \mid \frac{d^2x}{ds^2}\right] = 2\cos\left(x\,\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{d\xi}{ds} + 2\xi\,\frac{d\left(\cos x\,\frac{dx}{ds}\right)}{ds}$$

denn der Winkel $\left(x, \frac{dx}{ds}\right)$ ist als Function von s anzusehen.

Führen wir nach der Definitionsgleichung die Multiplication aus, so ist

$$\left[\frac{dx}{ds} \mid \frac{dx}{ds}\right] = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \frac{(d\xi)^2}{ds^2} = 1$$

$$\left[x \mid \frac{d^2x}{ds^2}\right] = \xi\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}\cos\left(x, \frac{d^2x}{ds^2}\right) = \xi\,\frac{d^2x}{ds^2}\cos\left(x, \frac{d^2x}{ds^2}\right)$$

Was den Differentialquotienten von $\cos\left(x\,\frac{dx}{ds}\right)$ betrifft, so wissen wir, dass $\cos\left(x\,\frac{dx}{ds}\right)$ der cosinus desjenigen Winkels ist, welchen die Tangente mit dem Radiusvector, also mit AO bildet.

Da das gewöhnliche dx, (wenn $AO = x$ gesetzt ist) nicht gleich dem dx der Ausdehnungslehre in Bezug auf die Grösse ist, so wollen wir diesos gewöhnliche dx mit dr bezeichnen. Es ist also

$$BO - AO = BC = dr$$

Es wird mithin

$$\cos\left(x\,\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dr}{ds}$$

also nach s differentiirt:

$$\frac{d\cos\left(x_1\,\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{d^2r}{ds^2}$$

Beachten wir diese letzten Gleichungen, so ist

$$\frac{d^2(x)^2}{ds^2} = 2 + 2\xi\,\frac{d^2\xi}{ds^2}\cos\left(x\,\frac{d^2x}{ds}\right) = 2\cos\left(x, \frac{dx}{ds}\right) + 2\xi\,\frac{d^2r}{ds^2}$$

Es kann nun der Fall eintreten, dass d^2x senkrecht x steht, dann ist

$$\cos\left(x, \frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0$$

während a und dx nicht auf einander senkrecht stehen. Es wird dann

$$2 = 2\cos\left(x, \frac{dx}{ds}\right) + 2\xi\frac{d^2x}{ds^2}$$

was absurd ist, da beide Seiten übereinstimmen müssten, d. h. die rechte Seite müsste auch gleich 2 sein. Wir sehen also, dass die gewöhnliche Anwendung der Differentialrechnung zu einem absurden Resultat führt. Es ist also die Differentialrechnung nicht so ohne weiteres anzuwenden.

Es haben also die Formeln, welche Herr Grassmann giebt, auf S. 15, 16 für die Neigung der Hauptnormale etc. keinen Sinn, sie sind absurd.

In den Formeln der Theorie der Raumcurven ist die Einführung der Differentialquotienten gänzlich überflüssig. Nach Herrn Grassmann lautet die Gleichung für die Tangente

$$[(\xi - x)x'] = 0, \quad \text{wenn} \quad x' = \frac{dx}{ds}$$

ist, was bedeutet, dass die Strecke $\xi - x$ mit $\frac{dx}{ds}$ d. h. mit dem dsten Teil von dx zusammenfallen soll. In der Tangente muss jedoch das ganze dx liegen, sodass die Gleichung für die Tangente richtiger lautet

$$[(\xi - x)\,dx] = 0$$

Ein Gleiches zeigt sich bei der Gleichung der Normalebene.

Es möge hier noch auf eine Unrichtigkeit bei der Formel 13) auf S. 10 hingewiesen werden. Bei der geometrischen Ableitung der Neigung der Hauptnormale gelangt Herr Grass-mann zu der Formel:

$$\varphi\lambda = \frac{d^2x\,ds - d^2s\,dx}{ds\sqrt{(d^2x)^2 - (d^2s)^2}}$$

ohne irgend welche Rücksicht auf die variable Zahlengrösse zu nehmen, da sie dazu gar nicht benutzt wird. Es muss also dieses $\varphi\lambda$ mit dem $\varphi\lambda$ auf S. 10

$$\varphi\lambda = \frac{d^2x}{\sqrt{(d^2x)^2}}$$

übereinstimmen, was nicht stattfindet. Beide Ausdrücke werden gleich, wenn

$$d^2s = 0$$

in der ersteren Formel gesetzt wird.

Die Verschiedenheit beider Ausdrücke rührt daher. dass in Fig. 22. die Richtung der Hauptnormale GD richtigerweise senkrecht der Tangente AG steht, was aber in der Fig. 1. dieser Abhandlung auf 10. nicht stattfindet.

Wir sind also zu dem Resultat gelangt, dass die Ausdehnungslehre ihrem Princip, die geometrischen Grössen als solche zu behandeln, nicht treu bleibt, dass die in der Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Raumcurventheorie aufgestellten Gleichungen keinen Sinn haben, und dass die gewöhnliche Methode des Differentiirens in der Ausdehnungslehre unanwendbar ist.

Die Einführung neuer gänzlich abstracter Begriffe, deren Anzahl mit jeder neuen Anwendung dieser Lehre wächst, kann auf keinen Fall zur Vereinfachung beitragen.

Stettin, den 18. Sept. 1888.

Ernst Schultz.

Zum litterarischen Bericht XXXVII. S. 6 u. 7. über das „Lehrbuch der Elementar-Mathematik für höhere Unterrichtsanstalten. Von Prof. Dr. H. Lorberg".

Auf S. 7. Zeile 17. 18 ist aus Versehen ein falsches Citat aufgestellt und dem Verfasser eine Behauptung zugeschrieben worden, von welcher er versichert, dass sie im Buche nicht vorkomme. Zur Berichtigung ist die gleiche Behauptung, aber von Seiten des Ref. zu substituiren. Es ist daher die Stelle Z. 17—20 — „schliesst der Verfasser etc. . . . verführt werden?" — zu streichen und dafür einzuschalten: „ist die Grundlage des Beweises gegeben, dass jede Irrationalzahl eine einzige bestimmte Grösse ist, und die Rechnung mit ihr ohne den mindesten Fehler statthaben kann." Hoppe.

Litterarischer Bericht
XLII.

Geometrie.

Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curvas) von Carl Friedrich Gauss (1827.) Deutsch herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig 1889. Wilhelm Engelmann. 62 S.

Das Vorliegende ist Nr. 5. von Ostwald's Classikern der exacten Wissenschaften. Das Originalwerk von Gauss beginnt mit der von ihm geschaffenen Lehre von der (von französischen Schriftstellern sogenannten) sphärischen Darstellung, d. i. Abbildung der Flächen auf der Kugel vom Radius 1 nach dem Princip gleichgerichteter Normalen. Dann folgt die Theorie der Berührungsebenen und Normalen, dann die Einführung der Begriffe des Krümmungsmasses k der Fläche in einem Punkte und der Gesamtkrümmung eines begrenzten Flächenstücks σ; d. i. der Grösse seiner sphärischen Darstellung, ausgedrückt durch $\int k\,\partial\sigma$. Dann folgt die Theorie der kürzesten Linien unter vorwaltendem Gesichtspunkt praktisch geodätischer Anwendung ausgebildet mit Eingehen auf approximative Rechnung mittelst Reihenentwickelung, womit auch die Schrift schliesst. Hinzugefügt sind Anmerkungen des Uebersetzers. Zuerst werden die principiell neuen Elemente ans Licht gestellt, welche Gauss der noch heute fortbestehenden Gestaltung der Theorie hinzugebracht hat, dann über die Succession der Publicationen seiner Schrift Nachrichten gegeben, dann wird über die einzelnen Deductionen, welche zumteil nicht die einfachst möglichen sind, Kritik geübt und die Fortbildung der Gauss'schen Grundlagen durch neuere Autoren in Betracht gezogen. H.

Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale. Zum Gebrauch für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen bearbeitet von A. Michalitschke. Zweite Auflage. Erster Teil. Mit Figurentafel. Prag 1891. H. Dominicus.

Was die Bezeichnung des Gegenwärtigen als „erster Teil" bedeutet, ist durch nichts ersichtlich, es stellt sich als erschöpfendes Ganzes dar. An die Spitze wird als Definition „einer Classe von Spiralen" die Polargleichung $r = a\varphi$ gestellt. Da keine Erwähnung davon geschieht, dass an die Stelle der Potenz jede beständig wachsende oder abnehmende Function treten kann, so hätte die Zugehörigkeit der 3 betrachteten Spiralen zu jener definirten Classe auch nachgewiesen werden müssen. Es erscheint daher als nachlässige Inconsequenz, dass die logarithmische Spirale, welche in der Form

$$r = \lim \left(1 + \frac{a\varphi}{n}\right)^n \quad (n = \infty)$$

in der Tat als Grenzfall der Classe angehört, hier ohne Erwähnung dieser Beziehung schlechthin als Spirale andrer Classe aufgestellt wird. Von jeder dieser 3 Spiralen einzeln wird die Gleichung aufgestellt und discutirt, die Construction gelehrt, die Differentialgleichungen, die Berührungsgrössen, die Krümmung, die Rectification und Quadratur entwickelt, von der logarithmischen Spirale ausserdem die Evolvente, Evolute, Fusspunktcurve, Katakaustika, Antikaustika, Diakaustika, Perikaustika, Antevolute und Cykloidalis in Untersuchung gezogen, im Anhang auf weitere Eigenschaften die Aufmerksamkeit gelenkt. Der Nutzen des Buchs für das Studium der ebenen Curven ist ein offenbarer: es wird dadurch den Anfängern die Anregung gegeben die Natur und Eigenschaften anderer specieller und allgemeinerer ebener Curven in vielseitigster Weise zu untersuchen und dadurch Vertrautheit mit der Theorie der ebenen Curven zu gewinnen. H.

Die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Von Dr. A. Emmerich, Gymnasiallehrer zu Mühlheim a. d. Ruhr. Mit 50 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. Berlin 1891. Georg Reimer. 154 S.

Das Vorliegende gibt in systematischer Entwickelung und elementarer Herleitung alle bis jetzt entdeckten Eigenschaften und Beziehungen der Brocard'schen Gebilde, nämlich Punkte, Winkel und Kreise, bloss mit Ausschluss der Beziehungen zu den Kegel-

schnitten. Ausgehend von der Aufgabe: die 3 sich in einem Punkte schneidenden Transversalen eines Dreiecks zu ziehen, welche mit den Seiten gleiche Winkel bilden — einer Aufgabe, durch deren 2 Lösungen die 2 Broc. Punkte und die 2 Broc. Winkel definirt sind, werden zuerst Sätze über diese Gebilde selbst, dann über die Lemoine'schen Kreise, die Tucker'schen Kreise, den Taylor'schen Kreis, die Beikreise, den Brocard'schen Kreis und das Brocard'sche Dreieck, die gleichbrocardischen Dreiecke, die Neuberg'schen und die Mc Cay'schen Kreise in ihren Beziehungen zu jenen Gebilden entwickelt. Sämtliche hier betrachteten und mit vorstehenden Namen bezeichneten Gebilde finden ihre Erklärung bei ihrer Einführung. Auch die Methode beansprucht keine Vorkenntnisse als elementare Geometrie, Algebra und Trigonometrie, bindet sich weder an Rechnung noch an directe geometrische Schlüsse, sondern wählt mit Hülfe beider den einfachsten Weg. Die Bestimmungsweise schliesst sich stets direct an das Dreieck, auf welches die Gebilde Bezug haben, als Fundamentaldreieck an, setzt aber keine Bekanntschaft mit üblichen trimetrischen Coordinatentheorien voraus, noch beschränkt sie sich auf irgend welche. Nach allem ist das Buch selbst für diejenigen, welche ohne Verweilen bei der Dreiecksgeometrie nur in der Kürze von dem Gegenstande Kenntniss nehmen wollen, ganz geeignet, bietet aber auch durch seine Reichhaltigkeit und den Hinblick auf weitere Forschung Interesse genug für dauerndes Studium. H.

Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, nach neueren Methoden dargestellt von Adolf Hanner, ordentlicher Professor der höheren Mathematik an der k. u. k. technischen Militär-Akademie in Wien. Mit 127 in den Text gedruckten Figuren. Prag 1891. H. Dominicus. 480 S.

Das Vorliegende ist ein Lehrbuch zunächst bestimmt für die Schüler des Verfassers. Die Gegenstände desselben, welche als eigentliches Ziel des Vortrags erscheinen, sind Lehren der neueren synthetischen Geometrie, solche die der Verfasser für nützlich und zweckentsprechend erachtet hat. Die durchgehends angewandte analytische Rechnungsform dient als Mittel der Herleitung und wird zum geeigneten Organ dafür soweit nötig cultivirt. Der Titel ist daher nicht zutreffend, wenn gleich bei Beachtung der angegebenen Gegenstände kaum misszuverstehen. Die Gegenstände sind (nach einleitenden allgemeinen Anordnungen) folgende: Die Gerade und der Punkt nebst dem Gesetze der Reciprocität; Punktreihen und Strahlenbüschel 1. Ordnung; Eigenschaften ebener Figuren; die homogenen Coordinaten; projectivische Punktreihen und Strahlen-

büschel 1. Ordnung; Involution; Invarianten und Covarianten binärer Formen; projectivische ebene Systeme; allgemeine Untersuchungen über Kegelschnitte; Polarisation; Mittelpunkt, Asymptoten, Durchmesser; projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte: Kegelschnittbüschel und Kegelschnittreihe. H.

Netze zum Anfertigen zerlegbarer Krystallmodelle. Für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterrichte herausgegeben und erläutert von Dr. W. Waege, Oberlehrer am Königstädtischen Gymnasium zu Berlin. Dreizehn Tafeln und Text. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1890. R. Gaertner. 22 S.

Die 1. Auflage ist im 30. litt. Bericht, S. 20 besprochen. Die 2. Auflage fügt zum Inhalt der ersten eine zweite Abteilung, bestimmt für die nächst höhere Classe, hinzu, in welcher 13 neue und weniger einfache Krystallformen behandelt werden. Ueber die Befestigung der Stücke beim Gebranche ist diesmal gesagt, dass eine Stricknadel vertical hindurchgesteckt meistens zum Aneinanderhalten genügt. H.

Optik, Akustik und Elasticität.

Uebersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. Einheitlich und leicht fasslich entwickelt von Adalbert Breuer, k. k. Professor in Trautenau, Böhmen. Erster Theil. Normale Dispersion. Mit einer Figurentafel. Hannover 1890. J. Bacmeister. 50 S.

Nachdem die Gesetze der Schwingungen des freien Aethers berechnet sind, werden die Theorien der Dispersion von Cauchy, Powell, Broch, Redtenbacher, Eisenlohr, Christoffel, Briot, C. Neumann und Boussinesq entwickelt und die hauptsächlichen historischen Notizen dazu gegeben. Der Verfasser hofft durch seine Bearbeitungsweise das Verständniss erleichtert zu haben. Sollte dies indes auch nicht für jedermann der Fall sein, so bietet doch die Zusammenstellung gewiss eine Erleichterung des Studiums. Zugaben sind: die empirischen Formeln von Ketteler und die Approximationsgleichungen der Aetherbewegung. H.

Die Spectralanalyse in einer Reihe von sechs Vorlesungen mit wissenschaftlichen Vorträgen. Von H. E. Roscoe. Dritte

Auflage. Neu bearbeitet vom Verfasser und Arthur Schuster. Mit 123 Holzstichen, Chromolithographien, Spectraltafeln etc. Braunschweig 1890. Friedrich Vieweg und Sohn. 466 S.

Der Vortrag zeichnet sich durch Einfachheit, Klarheit und Concinnität aus. Charakteristisch ist indes, dass er ohne Ruhepunkt von Anfang bis Ende gleichmässig fortgeht. Beschreibung der Experimente und Vorgänge und Theorie begleiten einander beständig; resultirende Sätze, Einteilung, theoretischen Fortschritt gibt es nicht zu verzeichnen. Die Experimente entsprechen unmittelbar der Demonstration in den Vorlesungen; ihre Abbildungen stellen recht deutlich das Aufzufassende in den Vordergrund. Auch die Geschichte der Entdeckungen ist ganz in den doctrinären Vortrag verwebt. Die 3. Auflage ist wesentlich umgearbeitet, und sind darin die neuen Entdeckungen, soweit sie als gesichert gelten, aufgenommen.

H.

Handbuch für Spectroskopiker im Cabinet und am Fernrohr. Praktische Winke für Anfänger auf dem Gebiete der Spectralanalyse. Von Nicolaus von Konkoly, Dr. phil., Ritter des eis. Kronenordens III. Cl., Beisitzer Sr. Maj. des Kaisers von Oesterreich grosser goldenen Medaille für Kunst u. Wiss., Mitglied vieler gelehrten Gesellschaften und Akademien etc. Mit 335 Holzschnitten im Texte. Halle a. S. 1890. Wilhelm Knapp. 560 S.

Der Verfasser begründet den Anspruch des gegenwärtigen Werkes darauf, dass es neben allen vorhandenen Werken über Spectroskopie noch einem Bedürfnisse entspreche, hauptsächlich durch die darin gegebenen praktischen Winke für Anfänger. Da es überdies mit besonderer Berücksichtigung des Schulgebrauchs abgefasst ist, so wird gewiss niemand geneigt sein, die Mühe einer neuen Bearbeitung des Lehrstoffs für nutzlos zu erklären. In den einzelnen Hauptabschnitten wird behandelt: die Einrichtung eines spectroskopischen Laboratoriums; Präcisions-Hülfsapparate; die Spectroskopie; die Messapparate zu denselben; Spectralphotometer und Spectroskope für specielle Untersuchungen; die Fernröhre, ihre Unterbringung und ihre Triebwerke; die Sternwarten im allgemeinen. Bei der Herstellung des Werkes haben dem Verfasser als Hülfe gedient: Schellen's Spectralanalyse, Kayser's Spectralanalyse und die Abhandlungen von Hugo Krüss.

H.

Grundzüge einer neuen Musik-Theorie Von Joachim Steiner. Wien 1891. Alfred Hölder. 89 S.

Einführung in die Elemente der physikalischen Musiktheorie. Ein Beitrag von Dr. Leopold Austerlitz, k. u. k. Oberlieutenant im Artillerie-Stabe, Lehrer der Mathematik an der k. u. k. Militär-Oberrealschule. 11 S.

Es handelt sich um die Verwendung rein harmonischer Intervalle für die Musik und die dazu erforderliche Stimmung der Scalen. Die Abschnitte der Schrift sind folgende: Feststellung einiger Grundbegriffe; Kritik der Grundformen, Tonverwandtschaft; einfache Quintsysteme, classische Diatonik, Chromatik; harmonisches Tonsystem; Enharmonik; Zergliederung der siebenstufigen Tonleitern; Parallelismus und Reciprocität, melodische Freizügigkeit; die wichtigsten Accorde; verschiedene Ergänzungen; Notenschrift, Historisches; temperirte Stimmung; das Problem der reinen Stimmung. H.

Grundriss der Festigkeitslehre. Zum Gebrauch an Handwerkerschulen, insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Mit 91 in den Text gedruckten Figuren und mehreren Tafeln, sowie mit zahlreichen Uebungsbeispielen und Aufgaben. Dresden 1890. Gerhard Kühtmann. 123 S.

Nach Aeusserung im Vorwort soll das Buch beide Extreme meiden, welche der Verfasser in den vorhandenen Hülfsmitteln gefunden habe, indem die einen blosse Regeln geben, die andern in der Theorie zu weit gehen. Die bezeichnete Kluft, wofern sie existirt, ist erklärlich, da der Lehrer nicht gern bei unzureichender Begründung stehen bleiben würde. Factisch aber kann man bemerken, dass im technischen Unterricht gewöhnlich eine Mittelstufe beliebt wird, dass aber ein langsamer Fortschritt zugunsten der theoretischen Bildung Platz greift. Man macht die Erfahrung, dass die Theorie nicht bloss ein tieferes Verständniss eröffnet, worauf wol Mancher gern verzichtet, sondern auch die Aneignung des Lehrstoffs sehr erleichert. Bei theoretischer Ausbildung handelt es sich aber nicht allein um Begründung der einzelnen Lehren, von der das Vorwort allein spricht, viel wichtiger ist die klare Auffassung der Begriffe und ihrer Beziehungen. Dass die Lehre von der Festigkeit nicht ohne Eingehen auf die Lehre von der Elasticität dargelegt werden kann, ist leicht zu sehen, und das vorliegende Lehrbuch versäumt nicht über letztere das nötige beizubringen. Wie sich aber beide Begriffe zu einander verhalten, davon sagt es kein Wort. Zu Anfang wird Festigkeit so erklärt, dass nicht Festigkeit sondern nur Elasticität der Angabe entspricht. Weiterhin werden als Aufgaben der

Festigkeitslehre drei aufgestellt: die dritte ist eine Frage der Elasticität, welche den beiden ersten schon zugrunde liegt, hier aber, wo sie am Ende steht, als neugierige Nebenfrage erscheint. Jedenfalls ist der Verfasser nicht bestrebt gewesen über die Begriffe aufzuklären, was hier innerhalb der Sphäre der niedrigsten Technik hätte leicht geschehen können. Der Reihe nach wird behandelt: Zugfestigkeit, Zerdrückungsfestigkeit, Schubfestigkeit, Biegungsfestigkeit, Drehungsfestigkeit, Zerknickungsfestigkeit. Jedem Abschnitt sind Uebungsbeispiele hinzugefügt. Zwei Anhänge geben numerische Tabellen. Hoppe.

Erd- und Himmelskunde.

Die Wettervorhersage. Eine praktische Anleitung zur Wettervorhersage auf Grundlage der Zeitungswetterkarten und Zeitungswetterberichte für alle Berufsarten. Im Auftrage der Direktion der deutschen Seewarte bearbeitet von Prof. Dr. W. J. van Bebber, Abtheilungsvorstand der deutschen Seewarte. Mit zahlreichen Beispielen und 103 Abbildungen. Stuttgart 1891. Ferdinand Enke. 171 S.

Der Verfasser stellt sich die grosse Aufgabe, die Erfolge der wissenschaftlichen Meteorologie dem ungelehrten Volke zugänglich zu machen. Er constatirt zunächst, dass das Publicum, obgleich es beständig in dem Elemente der Wettererscheinungen lebt, doch so gut wie keine Kenntniss von den neuern Fortschritten erhalten hat, und nach wie vor die irrigen Vorstellungen und Vorurteile geblieben sind, und schreibt den Grund davon allein dem Umstand zu, dass noch keine gemeinverständliche Mitteilung von Seiten Kundiger veröffentlicht worden ist. Einen tiefern und allgemeinern Grund aber lässt er unerwähnt, und doch ist gerade dieser geeignet das Verdienstliche des gegenwärtigen Unternehmens ins Licht zu stellen. Die meisten Menschen sind wie bekannt sehr abgeneigt sich das Geschehene im natürlichen Zusammenhange vorzustellen und daraus Belehrung zu schöpfen; nichts lehrende Regeln sind ihnen meist lieber. Der Reisende verlangt nach einer gleichen Landeszeit, obgleich ihm diese die Möglichkeit raubt aus der Bahnhofsuhr die Länge des Ortes, wo er sich befindet, zu erkennen, und trotzdem er an jeder Landesgrenze durch die unregelmässige Zeitdifferenz vexirt wird. Für die Fragen des Mondwechsels, die eine einfache Anschauung dessen, was man täglich sieht, von selbst beantworten

würde, werden Regeln aufgestellt, die keine Belehrung geben. Diese Scheu vor dem Denken, welche bei den gewöhnlichen Erscheinungen weit grösser ist, als bei entferntern und tiefern Fragen, würde auch in der Meteorologie alle Belehrung unwirksam machen. Doch, ist auch die Zahl derjenigen, die für den Zusammenhang der alltäglichen Erscheinungen Interesse haben, gering, so ist es um so wichtiger, dass wenigstens diese Wenigen, darauf aufmerksam gemacht werden, wie sie ohne tieferes Studium sich eine Fähigkeit aneignen können, die ihnen fürs ganze Leben Gewinn bringt. Dass dies sehr selten geschieht, ist erklärlich; denn dem Autor kommt hierin keine Nachfrage entgegen. Um so höher ist jede Stimme zu schätzen, die sich dafür erhebt, und jede Arbeit, die dem genannten Zwecke gewidmet ist. Auch das gegenwärtige Werk gehört zu diesen seltenen Unternehmungen; sein höchster Wert liegt darin, dass es für die Auffassung der gewöhnlichen Erscheinung, der beständigen Umgebung des Menschen im causalen Zusammenhange, obgleich derselbe von den Wenigsten gesucht wird, eintritt. Die Meteorologie ist natürlich in anderm Falle als andere Zweige der Naturwissenschaft: sie bedarf einer weit ausgedehnteren empirischen Basis. Um den Leser mit dieser vertraut zu machen, war es nötig das ganze Verfahren der meteorologischen Anstalten darzulegen. Dies ist im ersten Abschnitt geschehen. Dann folgt die causale Beurteilung der in den Wetterkarten dargebotenen empirischen Grundlage, die Bedeutung der Maxima und Minima des Luftdrucks und der Zugstrassen im allgemeinen. Dann werden insbesondere betrachtet Gebiete mit hohem, dann mit niedrigem Luftdruck, dann die einzelnen Zugstrassen bei kälterer und bei wärmerer Jahreszeit, dann zur Aufstellung von Wettervorhersagen auf Grundlage der Wetterkarten Anleitung gegeben, dann gezeigt, wie örtliche Betrachtungen (über Temperatur, Wind, Luftdruck u. s. w.) dabei zu berücksichtigen sind. Von allen Beurteilungen werden zahlreiche Beispiele gegeben.

H.

Zeitgleichungs-Zifferblatt. Von Dr. O. Kleinstück. Jena (1891). Fr. Mauke (A. Schenk).

Auf einer Tafel (33×28 ctm) sind um den Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Minuten einer Stunde von -30 bis 30 zählt, 2 Zeiger drehbar. Innerhalb des Kreises verfolgt eine Curve die Monate und Tage eines Jahres. Die Differenz der mittleren und wahren Zeit, gibt nun das Ende des messingenen Zeigers an, wenn derselbe über den Curvenpunkt des betreffenden Tages geht. Der eiserne Zeiger soll dazu dienen, sich die sog. Einheitszeit, d. i. die

mittlere Zeit des 15ten Meridians östlich von Greenwich, zu vergegenwärtigen, indem man ihn entsprechend der Längendifferenz vor oder hinter den messingenen stellt. H.

Vermischte Schriften.

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. IV. Anno XXIX. Napoli 1890.

Der 4. Jahrg. der 2. Reihe enthält folgende mathematische Arbeiten.

V. Reina: Ueber die Theorie der Normalen einer Fläche.

A. Forti: Neue Tafeln der hyperbolischen Functionen, welche den doppelten Sector zum Argument haben. (Bericht.)

G Torelli: Ueber einige partielle Differentialgleichungen. — Ueber eine Formel von Halphen bezüglich der Transformationen der linearen Differentialgleichungen. — Ausdehnung eines Satzes von Riemann bezüglich des Quotienten der vollen elliptischen Integrale 1. Gattung. — Nekrolog auf Raffaele Rubini, Verfasser von „Trattato di geometria analitica", „Complementi di algebra", „Elementi di calcolo infinitesimale" und „Teoria delle forme algebriche".

G. Pirondini: Von einer besondern geometrischen Transformation.

V. Mollame: Ueber den casus irreductibilis der kubischen Gleichung.

A. Capelli: Ueber die Theorie der algebraischen Functionen mehrerer Variabeln. H.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb Editor. Thomas Craig Associate Editor. Vol. XIII. Baltimore 1891.

Der 13. Band enthält folgende Abhandlungen.

M. W. Haskell: Ueber die zu der Curve $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projectiven Sinne gehörende mehrfache Ueberdeckung der Ebene. — Cayley: Ueber eine lösbare Gleichung 5. Grades. — O. Bolza: Ueber die Theorie der Substitutions-Gruppen und ihre Anwendungen auf algebraische Gleichungen — M. d'Ocagne: Einige Eigenschaften der Zahlen K_m^p. — P. Appell: Ueber die Gesetze der centralen

Kräfte, welche den Angriffspunkt bei allen Anfangsbedingungen einen Kegelschnitt beschreiben lassen. — H. Taber: Ueber gewisse Identitäten in der Theorie der Matricen. — W. C. L. Gorton: Systeme auf einer Fläche normaler Strahlen. — F. Morley: Ueber die Epicykloide. — H. P. Manning: Reduction von

$$\frac{\partial x}{\sqrt{A(1+mx^2)(1+nx^2)}} \quad \text{auf} \quad \frac{M\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

durch die Substitution

$$x^2 = \frac{a+by^2}{a'+b'y^2}$$

J. C. Fields: Einfacher Beweis des Reciprocitäts-Satzes aus dem Gauss'schen Kriterium. — Ausdrücke für Bernoulli'sche und Eulersche Zahlen in ihrer Beziehung. — P. A. McMahon: Dritte Abhandlung über eine neue Theorie der symmetrischen Functionen. — J. Perott: Bemerkung zum Euklid'schen Satze über die Unendlichkeit der Anzahl der Primzahlen. — K. Pearson: „Aetherspritzen" (Eine kosmische Hypothese). — C. H. Chapman: Ueber die Matrix, welche einen Vector darstellt. — F. Brioschi: Ueber eine neue Form der Modulargleichung 8. Grades. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XVIII. XIX. Amsterdam 1891. Sikken en Co.

Der 18. u. 19. Band enthalten folgende Abhandlungen.

G. Schouten: Lös. Pr. Aufg. 6. 7. (Pendelndes Rotationsellipsoid) (Centralbewegung für eine Kraft von der Form Ar^n) 18 — P. H. Schoute: Nachschrift zu ersterer. 18. — W. van Loghem: Ort der Punkte einer in ihrer Ebene bewegten Scheibe, deren plötzliche Befestigung die lebendige Kraft auf $\frac{1}{n}$ ihres Wertes bringt. 18. — F. J. van den Berg: Ueber die Wahrscheinlichkeit, dass die Teile einer willkürlich geteilten Geraden zwischen gegebenen Grenzen liegen — und: dass sie ein geschlossenes Vieleck einschliessen können. 18. — Ueber reciproke Polcurven. — Ueber eine in der Geodäsie anwendbare Aufgabe. — Die ältesten Rechentafeln der Welt. 19. — W. Mantel: Ueber Bewegungsmomente. Eine Methode. — Th. B. van Wettum: Ueber die Quaternionen-Matrix. 18. — R. J. Escher: Theorie der algebraischen Functionen. 18. — J. E. Kluyver: Lös. Aufg. 7. (Complex der Geraden auf einer Fläche 2. Grades, die durch 7 willkürliche Punkte geht). 19. — A. A. Nijland: Logarithmische Coordinaten. 19. — C. Krediet: Lös. Aufg. 12. (4 sich anziehende Punkte in gesuchter anfänglicher

Stellung und Geschwindigkeit sollen constanten Abstand behalten) 19. — J. M. Thiel: Neuer Beweis des Satzes von Euler, bewiesen für convexe Körper. 19. — G. J. D. Mounier: Beweis eines Satzes aus der höhern Algebra — Vollständige Berechnung des Schimmelspiels. 19. — H. Ekama: Eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten. — Das Schimmelspiel. 19. — P. Molenbreek: Ueber die geometrische Darstellung imaginärer Punkte im Raume. 19. — L. van Elfrinkhof: Auflösung linearer Vector-Gleichungen in besondern Fällen. — Bemerkungen zur Abhandlung von Wettum über Quaternionen-Matricen. 19. — P. J. Helwig: Construction einiger Systeme der Ecktransversalen des ebenen Dreiecks. 19. H.

Annuaire pour l'an 1892. Publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Prix 1 fr. 50 c. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1892 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: Notice sur la 3e réunion du Comité international permanent, pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel, à l'Observatoire de Paris, en avril 1891; par le Contre-Amiral Mouchez. — Notice sur la Lune et son accélération séculaire; par F. Tisserand. — Session de l'Association geodésique internationale, tenue à Florence, le 8 octobre 1891; par A. Bouquet de la Grye. — Les Observatoires de montagne. Un Observatoire au Mont-Blanc; par J. Janssen. — Sur la Mire lointaine de l'Observatoire de Nice; par A. Cornu. — Discours prononcés à l'inauguration de la statue du chevalier de Borda, à Dax, le dimanche 24 mai 1891; par A. Bouquet de la Grye et le Vice-Amiral Paris. In-18 de v-876 pages, avec figures et 2 Cartes magnétiques.

Gauthier-Villars et fils.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Adam, W., Geschichte d. Rechnens u. d. Rechenunterrichts. Zum Gebrauch an gehobenen u. höheren Lehranstalten, sowie auch bei der Vorbereitg. auf die Mittelschullehrer- u. Rektoratsprüfg. bearb. Quedlinburg, Vieweg's Buchh. 2 Mk. 40 Pf.

Cantor, M., Vorlesungen üb. Geschichte der Mathematik. 2. Bd. Von 1200—1668. 1. Thl. Leipzig, Teubner. 14 Mk.

Grotefend, H., Zeitrechnung d. deutschen Mittelalters u. der Neuzeit. 1. Bd.: Glossar u. Tafeln. Hannover, Hahn'sche Buchh. 16 Mk.

Villicus, F., die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthume bis zum XVIII. Jahrh. m. besond. Rücksicht auf Deutschland u. Oesterreich. Mit Illustrat. u. e. tabellar. Zusammenstellg. v. Zahlwörtern aus 72 Sprachen, nebst Zählungssystemen v. altamerik. Völkerstämmen. 2. Afl. Wien, Gerold's S. 2 Mk. 80 Pf.

Methode und Principien.

Gef, W., die Wellen der Schwerkraft u. ihre Wirkgn. auf die Wellen der Elektrizität, d. Lichts u. auf die Körper. Heidelberg, A. Siebert. 1 Mk.

Geigel, R., Gedanken üb. Molecularattraction. Würzburg, Stahel. 30 Pf.

Glasmacher u. Schmitz, Anleitung zum Rechenunterricht unter Zugrundelegung der „Neuen Ausgabe" d. Rechenbuches der Verff. Strassburg, Heitz. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Hauer, L. u. A. Sulzbacher, praktische Anweisung zur Erteilung d. Rechenunterrichts in der Volksschule. Ein Handbuch f. Lehrer u. Seminaristen. Neuwied, Heuser's Verl. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Heinze u. Hübner, Methodik d. Rechnens. Lehrer-Ausgabe d. Rechenbuches A. Aufgaben u. Auflösgn. 7 Hefte u. Anh. zum 4. Heft. 2. Aufl. Breslau, Görlich's Verl. 6 Mk. 35 Pf.

Räther, H., Theorie u. Praxis d. Rechenunterrichts. Im Anschluss an das Uebungsbuch f. mündl. u. schriftl. Rechnen, v. H. Räther u. P. Wohl bearb. 2. Tl. Die Zahlreihe 1—100000 u. die mehrfach benannten Zahlen. Breslau, E. Morgenstern, Verl. 2 Mk.

Simon, M., zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. Strassburg, Strassb. Druckerei u. Verlagsanstalt. 2 Mk.

Sammlungen.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 16. Afl. 9.—16. (Schluss-)Lfg. Strassburg, Strassb. Druckerei u. Verlagsanstalt. à 25 Pf.; kplt. 4 Mk.; geb. 4 Mk. 50 Pf.

Heis, E, Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgem. Arithmetik u. Algebra. 83. — 85. Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg. 3 Mk.

Heller, J. F., methodisch geordnete Sammlung v. Aufgaben u. Beispielen aus der darstellenden Geometrie f. Realschulen. 1. Thl. Für d. 5. Classe. Wien, Hölder. 1 Mk. 80 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 998.—1057. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Müller, E. R., Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometr. Analysis. 2. Tl.: Aufgaben, gelöst m. Anwendg. der Proportionslehre. Bearb. nach System Kleyer. Ebd. 4 Mk.

Wallentin, F., methodisch geordnete Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der Algebra u. allgemeinen Arithmetik f. die oberen Classen der Mittelschulen, Lehrer-Bildungsanstalten u. anderen gleichstehenden Lehranstalten. 3. Aufl. Wien, C. Gerold's S. Geb. 4 Mk. 20 Pf.

Wrobel, E., Uebungsbuch z. Arithmetik u. Algebra, enth. d. Formeln, Lehrsätze u. Auflösungsmethoden in systemat. Anordnung u. e. grosse Anzahl v. Fragen u. Aufgaben. 2 Tl. nebst Anh. Pensum d. oberen Classen höherer realist. Lehranstalten. Rostock, Werther. 2 Mk. 20 Pf.

— dasselbe. Anhang allein. Ebd. 80 Pf.; Resultate dazu. 60 Pf.

Tabellen.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 35. Aufl. Halle, Strien Verl. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

— Kleine Ausg. 3. Aufl. Ebd. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Gravelius, H., vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln f. d. Decimalteilung der Quadranten, nebst Tafeln der Logarithmen der Zahlen, Antilogarithmen, Tafeln der Zahlenwerte der trigonometr. Functionen, Gauss'schen Logarithmen, Quadrattafeln und Logarithmen d. Hyperbelfunctionen. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Houël, G. J., fünfstellige Logarithmentafeln d. Zahlen u. der trigonometrischen Functionen, nebst den Gaussischen Additions- u. Subtractionslogarithmen u. verschiedenen Hülfstafeln. Berlin, Alb. Cohn. 2 Mk.

Köhler, E. T., Manuale logaritmico-trigonometrico. 9. ed. italiana. Leipzig, Tauchnitz. 3 Mk.

Lüning, Th., Koppel-Tafeln nach Viertel-Strichen u. Geraden, nebst Erklärg. u. Gebrauchs-Anweisung. Bis zu Distanzen v. 500 Seemeilen erweitert. Flensburg, L. P. H. Maass. Geb. 3 Mk. 50 Pf.

Schlömilch, O., fünfstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Grosse Ausg. 4. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Divić, F., die sieben Rechnungsarten m. allgemeinen Zahlen. Auf Grundlage der Anschauung u. unter Anwendg. verallgemeinerter Definitionen nach einheitl. Plane dargestellt. Wien, Pichler's W. & S. 3 Mk. 60 Pf.

Fuss, K., Lehrbuch der Buchstabenrechnung u. Algebra f. den Schul- u. Selbstunterricht. 3. Aufl. 1. Tl. Nürnberg, Korn'sche B. 3 Mk.

Gegenbauer, L., üb. die Ringfunktionen. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

— zur Theorie der regulären Kettenbrüche. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— zur Theorie der Näherungsbrüche. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Grassmann, R., die Zahlenlehre od. Arithmetik, der niedere Zweig der Analyse. 1. Zweig der Formenlehre oder Mathematik. Stettin, Grassmann. 4 Mk.

Kohn, G., zur Theorie der associirten Formen. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Kühl, J. H., Leitfaden der Arithmetik u. Algebra. Für den Schul- u. Selbstunterricht bearb. 2. Tl. Hamburg, Kriebel. Kart. 3 Mk.

Maier, J. G., Lehrbuch der Elementar-Arithmetik zum Gebrauch in Schulen, Lehrerbildungsanstalten u. beim Selbstunterricht. 1. Tl. Das Rechnen m. absoluten Zahlengrössen. 2. Aufl. Stuttgart, Gundert. 4 Mk.

Mansion, M. P., Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Vom Verf. durchges. u. verm. deutsche Ausg. Mit Anhängen von S. v. Kowalewsky, Imschenetzky u. Darboux. Hrsg. v. H. Maser. Berlin, Springer. 12 Mk.

Molenbroek, P., Theorie der Quaternionen. Leiden, Brill. 7 Mk.

Neumann, K. W., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. 6. Aufl. Bremen, Heinsius Nachf. 2 Mk. 80 Pf.; geb. 3 Mk. 20 Pf.

Scheffler, H., Beiträge zur Zahlentheorie, insbesondere zur Kreis- u. Kugelteilung, m. e. Nachtrage zur Theorie der Gleichgn. Leipzig, Fr. Förster. 6 Mk.

Staudacher, H., Lehrbuch der Grundrechnungsarten m. Buchstabengrössen. 2. Tl.: Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- u. Kettenbrüche u. Rechnung m. unvollständ. Zahlen. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Uhlich, E., Reihensummation auf geometrischem Wege. Grimma, Gensel. 50 Pf.

Geometrie.

Cranz, H., Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. 1. Tl.: Analytische Geometrie d. Punktes u. der Geraden. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie f. den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. 1. Tl.: Ebene Geometrie. 2. Aufl. Braunschweig, Salle. 2 Mk.

Fink, K., üb. die Einführung gewisser Grundbegriffe der projektiven Geometrie im Schulunterricht. Tübingen, Franz Fues. 80 Pf.

Fischer, E., systematischer Grundriss der Elementar-Mathematik. 2. Abtlg.: Die Geometrie (Raumlehre). Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bearb. Berlin, Carl Duncker. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 35 Pf.

Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Tl. Gleichheit der Gebilde in e. Ebenen-Abbildung ohne Massänderg. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Mattiat, D., die Raumlehre in der Volks- und Fortbildungs-

schule. Leitfaden u. Wiederholungsbuch. 4. Aufl. Gera, Hofmann. Kart. 75 Pf.

Peano, G., die Grundzüge d. geometrischen Calculs. Autoris. deutsche Ausg. v. A. Schepp. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 4. Tl.: Die Lehre vom Kreis. Die geometr. Oerter u. die merkwürd. Punkte d. Dreiecks. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Schlotke, J., analytische Geometrie der Ebene. Sammlung v. Lehrsätzen u. Aufgaben, nebst Erläutergn. u. Resultaten. Dresden, Kühtmann. 6 Mk. 80 Pf.; kart. 7 Mk.

Vonderlinn, J., Lehrbuch des Projektionszeichnens. 3. Tl. 2. Hälfte. Centralcollineation ebener u. räuml. Systeme, Kegelschnitte, rechtwinkl. u. schiefwinkl. Axonometrie. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Vries, J. de, üb. räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Waelsch, E., üb. Formen 5. Ordnung auf der cubischen Raumcurve. Ebd. 40 Pf.

Weyer, G. D. E., Einführung in die neuere konstruirende Geometrie. Zum Gebrauch f. Studirende. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Trigonometrie.

Gusserow, C. u. L. Levy, Abriss der Trigonometrie. Geometr. bearb. Berlin, Polytechn. Buchh. Kart. 1 Mk.

Haebler, Th., die Ableitung der ebenen Trigonometrie aus drei Grundgleichungen. Grimma, Gensel. 50 Pf.

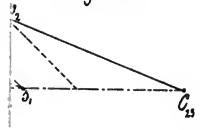
Praktische Geometrie, Geodäsie.

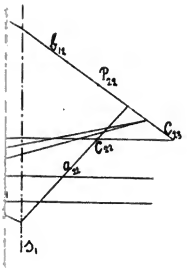
Fialkowski, kurzgefasste praktische Geometrie. Leichtfassliche Anleitg. zum Vermessen, Höhenmessen u. Nivelliren f. Ackerbauschulen u. andere verwandte Lehranstalten. 2. Aufl. Pichler's W. & S. 2 Mk. 40 Pf.

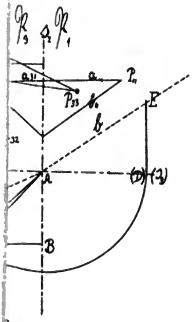
— der Messtisch u. die Auflösung der wichtigsten Grundaufgaben an denselben, nebst Zollmannscher Scheibe u. Astrolabium. Für Anfänger. Ergänzungsheft zur prakt. Geometrie. Ebd. 60 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1890. Beobachtungs-System d. Königr. Sachsen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im Königr. Sachsen im J. 1890. 1. Hälfte, Abth. I u. II d. Jahrbuches d. königl. sächs. meteorolog. Institutes. VIII. Jahrg. 1890. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz, Verl. 10 Mk.

Fig. 22a.







b.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bilfinger, G., die Sterntafeln in den ägyptischen Königsgräbern v. Bibân el Molûk. Stuttgart, Wildt'sche Buchh. 2 Mk.

Eisenlohr, A., e. mathematisches Handbuch der alten Aegypter [Papyrus Rhind d. British Museum], übers. u. erklärt: 2. Asg. (Ohne Tafeln.) Leipzig, Hinrichs'sche Buchh., Verl. 12 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 25. Unterredungen u. mathematische Demonstrationen üb. zwei neue Wissenszweige, die Mechanik u. die Fallgesetze betr., v. G. Galilei. Anh. zum 3. u. 4., 5. u. 6. Tag. Aus dem Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. Leipzig, Engelmann. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Methode und Principien.

Grassmann, R., die Ausdehnungslehre od. die Wissenschaft v. den extensiven Grössen in strenger Formel-Entwicklung. Stettin, Grassmann's Verl. 2 Mk. 25 Pf.

Hartmann, E., Anleitung zur Behandlung d. elementaren Rechenunterrichts in benannten Zahlen in heuristisch-entwickelter Lehrform. Giessen, v. Münchow. 1 Mk. 20 Pf.

Kluck-Kluczycki, V. P., Umsturz irrthümlicher Schullehren d. heutigen Standes der Wissenschaften: Physik, Chemie, Physiologie, Raumlehre, Astronomie etc. auf Grund der Auffassung v. der Einheit der Naturkraft. III. Das ballist. Princip d. gasexplosiven Mechanikzerfallens an der einst. einheitl. festen Masse d. Globuarwelt in Verbindg. m. Materieträgheit, begründet die an sich belassene Bewegg. im freien Himmelsraum der Stern- u. Planetenerscheingn. Krakau, Gebethner & Co. 3 Mk.

Sterner, M., principielle Darstellung d. Rechenunterrichtes auf historischer Grundlage. 1. Tl. Geschichte der Rechenkunst. München, Oldenbourg. 6 Mk.

Steuer, W., Methodik d. Rechenunterrichts. 4. Afl. Breslau, Woywod, Verl. 4 Mk. 50 Pf.

Lehrbücher.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Bd. 2. Abth. Planimetrie. 15. Afl. Hannover, Hahn'sche Buchh. 2 Mk.

Sammlungen.

Adam, W., Auflösungen der 6500 Aufgaben f. den Unterricht in der Arithmetik u. Algebra. In method. Stufenfolge bearb. 2. Tl. Neu-Ruppin, Petrenz. 3 Mk. 50 Pf.

Bothe, A., Sammlung v. Rechenaufgaben f. höhere Schulen. 3. Hft. Die Verhältnisse, Proportionen u. deren Anwendgn. 7. Afl. Annaberg, Graser's Verl. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Hagen, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. 1. Bd. Arithmetrische u. algebraische Analysis. Berlin, Dames. 30 Mk.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 928.—997. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Stockmayer, H., u. G. Thomass, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen, der Realschulen u. verwandten Lehranstalten. 1. Bdchen.: für 10—11 jähr. Schüler (III. Klasse). 5. Afl. Stuttgart, Bonz & Co. 80 Pf.

Zech, v., Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösgn. 2. Afl. unter Mithülfe v. C. Cranz. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 4 Mk. 20 Pf.

Tabellen.

Bišćan, Formeln u. Tabellen. Hilfs- u. Notizbuch f. den prakt. Elektrotechniker. Leipzig, Leiner. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Gravelius, H., vierstellige Logarithmentafeln. Berlin, Dümmler's Verl. 50 Pf.

Ligowski, W., Sammlung fünfstelliger, logarithmischer, trigonometrischer u. nautischer Tafeln, nebst Erklärgn. u. Formeln der Astronomie. 2. Afl. Kiel, Universitäts-Buchh. Geb. 7 Mk.

Stampfer, S., logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst verschiedenen andern nützl. Tafeln u. Formeln, u. e. Anweisung m.

Hülfe derselben logarithm. Rechngn. auszuführen. Wien, C. Gerold's S. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bobek, K. J., Lehrbuch der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 16. Afl. 1.—8. Lfg. Strassburg, Strassb. Druckerei & Verlagsanst. à 25 Pf.

Brenner, A., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik. 1. Tl. 2. Afl. Freising, Datterer. 1 Mk.

Gegenbauer, L., zur Theorie der hypergeometrischen Reihe. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Krüger, R., Lehrbuch d. Rechnens in imaginären u. komplexen Zahlen. Stuttgart, Jul. Maier. 5 Mk.

Lerch, M., zur Theorie der unendlichen Reihen. Prag, Rivnáč, Verl. 10 Pf.

Lie, S., Vorlesungen üb. Differentialgleichungen m. bekannten infinitesimalen Transformationen, bearb. u. hrsg. v. G. Scheffers. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Maier, J. G., Lehrbuch der Grundrechnungsarten. 3. Buch: das Rechnen m. unbenannten gebrochenen Zahlen (die gemeinen Brüche u. die Dezimalbrüche). Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 3 Mk.

Olbricht, R., Lehrbuch der Schluss- u. Kettenrechnung (der einfachen u. zusammengesetzten Regeldetrie u. d. Reesischen Satzes.) Bearb. nach System Kleyer. Ebd. 4 Mk. 50 Pf.

Pehrsson, P., Studien zur Lehre v. der Wurzelerweiterung u. Wurzelvariation. Upsala, Akadem. Buchh. 8 Mk. 80 Pf.

Schüler, W. F., Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen d 1. Grades. (Diophantische Gleichgn.) Nebst den Abhandlgn. d. Bachez de Méziriac im französ. Originale m. beigefügter Uebersetzg. Bearb. zum Teil nach System Kleyer. 1. Buch. Stuttgart, Jul. Maier. 4 Mk. 50 Pf.

Schüller, W. J., Arithmetik u. Algebra f. höhere Schulen u. Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Steck, F. X., u. J. Bielmayr, Lehrbuch der Arithmetik f. Latein- u. Realschulen. 10. Afl. Kempten, Kösel. 1 Mk. 20 Pf.

Ullrich, E., das Rechnen m. Duodecimalzahlen. Heidelberg, C. Winter's Univ.-B. 1 Mk. 80 Pf.

Vorschule der Sammlung arithmetischer u. geometrischer Auf-

gaben zur Vorbereitung auf die Lehrerinnen-Prüfung. Bearb. von e. ehemal. Mitgliede zweier Prüfungs-Commissionen. Düsseldorf, Bagel. 80 Pf.; Lösungsheft 40 Pf.

Geometrie.

Adler, A., graphische Auflösung der Gleichungen. Klagenfurt, v. Kleinmayr. 1 Mk.

Bürklen, O., zur Lehre vom Winkel. Tübingen, Franz Fues. 40 Pf.

Hartl, H., der Rechenwinkel. Ein Hilfsmittel zu raschen graph. Lösg. wicht. mathemat. Aufgaben. Reichenberg, J. Fritsche. 80 Pf.

Hočevar, F., Manuale di geometria del gimnasio inferiore. Traduzione de F. Postet. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 50 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Hoffmann, G., Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben, m. Uebungsbeispielen f. Schulen höherer Lehranstalten. 3. Afl. Leipzig, Reisland. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Iselin, J. J., die Grundlagen der Geometrie ohne spezielle Grundbegriffe u. Grundsätze, m. Einschluss e. vollständ. Darstellung der reinen Sphärik. Bern, Wyss, Verl. 6 Mk.

Küpper, K., Fortsetzung d. Untersuchung üb. algebraische Raumcurven (v. dieser Abh. B. III, IV, F. VII). Prag, Rivnáč, Verl. 80 Pf.

Menger, J., Grundlehren der Geometrie. Ein Leitfaden f. den Unterricht in der Geometrie u. im geometr. Zeichnen an Realschulen. Wien, Hölder. 1 Mk. 84 Pf.

— Leitfaden der Geometrie f. Gewerbeschulen. 2. Afl. Ebd. Kart. 1 Mk.

Pick, G., üb. das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen 2. Ordnung. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Waelsch, E., üb. e. geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen. Ebd. 30 Pf.

— zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen u. Flächen. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

— zur Konstruktion der Polargruppen. Ebd. 30 Pf.

Weyr, E., üb. Involutionen höheren Grades auf nichtrationalen Trägern. Ebd. 40 Pf.

— üb. Raumcurven 6. Ordnung vom Geschlechte Eins. (II. Mittheilung.) Ebd. 30 Pf.

Wolff, Ch., das Princip der reciproken Radien. Erlangen, Blaesing's Univ.-B. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Pietsch, C., Katechismus der Feldmesskunst. 5. Afl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Mechanik.

Jansen, W., die Kreiselbewegungs-Untersuchung der Rotation v. Körpern, welche in e. Punkte od. gar nicht unterstützt sind. Berlin, Luckhardt. 1 Mk. 80 Pf.

Ott, E., Elemente der Mechanik. 2. Afl. Zürich, Schulthess. 4 Mk.

Schmid, C., Statik u. Festigkeitslehre. Lehrheft nebst vielen Beispielen elementar behandelt f. den Gebrauch an der Schule u. in der Praxis. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 4 Mk.

Technik.

Becker, W., die Absteckung v. Strassen- u. Eisenbahncurven m. u. ohne Benutzung e. Winkelinstrumentes. 2. Asg. Wien, Spielhagen & Sch. 1 Mk. 60 Pf.

Bibliothek, elektrotechnische. 2. Bd. 3. Afl. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Central-Anzeiger f. d. gesammte Elektrotechnik. Jahrg. 1891. Nr. 17. Frankfurt, Gebr. Knauer. Halbjährl. 1 Mk.

Corsepius, M., Leitfaden z Construction v. Dynamomaschinen u. zur Berechnung v. elektrischen Leitungen. Berlin, Springer. 2 Mk.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: W. Krieg. 4. Jahrg. 1891. 27. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährl. 3 Mk. 75 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1891. 1. Heft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Früchtenicht, H., die Gezeiten. Lehrmittel. (2 ovale Tafeln m. Drehvorrichtung.) Halle, Reichardt. 75 Pf.

Weiler, W., der praktische Elektriker. Populäre Anleitg. zur Selbstanfertigg. elektr. Apparate u. zur Anstellg. zugehör. Versuche, nebst Schlussfolgergn., Regeln u. Gesetzen. Leipzig, Schäfer. 5 Mk.

Wolffberg, diagnostischer Farbenapparat. 3. Afl. Nebst Erläutergn. u. Gebrauchsanweisg. Breslau, Preuss & J. 4 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Breuer, A., übersichtliche Darstellung der mathematischen Theorie üb. die Dispersion d. Lichtes. II. Tl. Anomale Dispersion. Erfurt, Bodo Baemeister. 2 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1890. I. Tl. Meteorologische u. magnet. Beobachtungen v. Stationen 1. Ordng. u. ausserordentl. Beobachtgn v. Stationen 2. u. 3. Ordng. Leipzig, Voss' Sort. 10 Mk. 20 Pf.

Annalen, neue, der k. Sternwarte in Bogenhausen bei München. Hrsg. v. H. Seeliger. 2. Bd. München, Franz'scher Verl. 25 Mk.

Bebber, W. J. van, das Sturmwarnungswesen an den deutschen Küsten. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk.

Beobachtungs-Ergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 5. Hft. Ebd. 4 Mk.

Franz, J., die jährliche Parallaxe d. Sterns Oeltzen 11677, bestimmt m. dem Königsberger Heliometer. Königsberg, Gräfe & U. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Hann, J., Studien üb. die Luftdruck- u. Temperaturenverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel, nebst Bemerkgn. üb. deren Bedeutg. f. d. Theorie d. Cyclonen u. Anticyclonen. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

Hilfstafeln u. d. bisherigen Schriften der königl. Sternwarte Bogenhausen bei München. 2 Abhandlungen. München, Franz'scher Verl. 3 Mk.

Hornberger, R., Grundriss der Meteorologie u. Klimatologie, letztere m. besond. Rücksicht auf Land- u. Forstwirte. Berlin, Parey. 6 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches f. 1888. Beobachtungs-System d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1888. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co., Verl. 24 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches f. 1889. Beobachtungssystem d. Königr. Sachsen. Bericht üb. die Thätigkeit im königl. sächs. meteorolog. Institut f. d. J. 1889 m. 5 Anhängen u. 5 Taf. II. Hälfte od. III. Abth. d. Jahrbuches d. königl. sächs. meteorolog. Institutes. VII. Jahrg. 1889. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Brunner'sche B. 10 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, 1891. Bayern. Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern, hrsg. v. d. königl. meteorolog. Central-Station durch C. Lang u. F. Erk. 13. Jahrg. 1891. 1. Hft. München', Th. Ackermann, Verl. Jährlich 18 Mk.

Jahresbericht d. Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogth. Baden, m. den Ergebnissen d. meteorolog. Beobachtgn. u. d. Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein u. an seinen

grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1890 etc. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchh., Verl. 6 Mk.

Kleinstück, O., Zeitgleichungs-Zifferblatt. Jena, Mauke's Verl. Auf Pappe m. Zeigern. 1 Mk. 60 Pf.

Löschardt, F., die neuesten Hypothesen üb. die Rotation d. Planeten Venus, kritisch beleuchtet. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Mahler, E., die Berechnung der Jahrpunkte (Thekuphonrechnung) im Kalender der Juden. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Mittheilungen der Vereinigung v. Freunden der Astronomie u. kosmischen Physik. Red. v. W. Förster. I. Jahrg. Juli 1891 — Juni 1892. (10—12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Dümmler's Verl. Halbjährl. 3 Mk.

Oppenheim, S., Bestimmung der Bahn d Planeten (290) Bruna. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Pfeil, L. Graf v., kometische Strömungen auf der Erdoberfläche u. das Gesetz der Analogie im Weltgebäude. 4. Afl. Berlin, Dümmler's Verl. 7 Mk.

Publikationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 27. 8. Bds. 1. Stück. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. den Schriftführern der Gesellschaft. 26. Jahrg. 1. u. 2. Hft. Ebd. à 2 Mk.

Nautik.

Gezeitentafeln f. d. J. 1892. Hydrographisches Amt d. Reichs-Marine-Amts. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. 1892. 31. Jahrg. Hrsg.: W. Ludolph. Bremen, Heinsius Nachf. 75 Pf.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1894 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See, nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. vom Reichsamt d. Innern, unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Bibliothek d. Elektrophysiker u. Elektrotechniker. Verzeichniss der neuesten Erscheinungn. aus dem Gebiete der Elektricität, Elektrotechnik, Physik, Chemie, Mechanik u. Maschinenlehre etc., wesentlich die Elektricitäts-Literatur d. In- u. Auslandes. Frankfurt, Alt. 2 Mk.

Boltzmann, L., Vorlesungen üb. Maxwell's Theorie der Elektrizität u d. Lichtes. I. Thl. Ableitung der Grundgleichgn. f. ruh., homogene, isotrope Körper. Leipzig, J. A. Barth. 5 Mk.

Crüger, J., Lehrbuch der Physik. 7. Afl. Leipzig, Amelang's Verl. 4 Mk. 50 Pf.

Exner, E., elektrochemische Untersuchungen. (1. Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Faraday, M., Experimental-Untersuchungen üb. Elektricität. Deutsche Uebersetzg. v. S. Kalischer. 3. (Schluss-) Bd. Berlin, Springer. 15 Mk.; geb. 17 Mk. 20 Pf.; kplt. 36 Mk.; geb. 39 Mk. 60 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 10. Lfg. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Hollenberg, A., Stücke aus der Physik. Ein Hülfsbuch f. Lehrer an Volksschulen. 3. Afl. Moers, Spaarmann. 1 Mk. 20 Pf.

Jäger, G., das Gesetz der Oberflächenspannung v. Lösungen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Klemenčič, J., üb. die Reflexion v. Strahlen elektrischer Kraft an Schwefel- u. Metallplatten. Ebd 50 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 159. u. 160. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Kries, J. v., üb. die Beziehungen der Physik u. der Physiologie. Rede. Freiburg, Mohr. 60 Pf.

Obermayer, A. v., zur Erklärung e. m. der fortführenden Entladung der Elektricität verbundenen Anziehungserscheinung. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Pfaundler, L., üb. e. verbesserte Methode, Wärmecapacitäten mittelst d. elektrischen Stromes zu bestimmen. Ebd. 70 Pf.

Puluj, J., Bestimmung d. Coefficienten der Selbstinduction m. Hülfe d. Elektrodynamometers u. e. Inductors. Ebd. 40 Pf.

— Untersuchungen üb. die Entladung der Elektricität aus Spitzen, in verschiedenen Gasen, bei verschiedenen Drucken. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum praktischen Leben. 26.—30. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Asg. v. E. Gumlich, L. Hollborn, W. Jaeger, D. Kreichgauer, Ch. Lindeck. 1. Thl. Mechanik. 1. Bd. Allgemeine Mechanik u. Mechanik der festen Körper. 2. u. 3. Lfg. Berlin, Springer. à 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 39. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Für den Band 20 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. E. Lampe. 20. Bd. Jahrg. 1888. 3. Hft. Berlin, Georg Reimer. 14 Mk.

Vorträge d. Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. 31. Jahrg. Wien, Hölzel's Verl. 1. Hft. 60 Pf.; 18. Hft. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 100. Bd. 1. u. 2. Hft. Leipzig, Freytag. 4 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1891. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

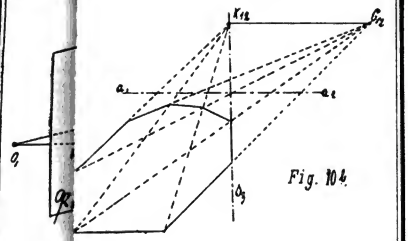


Fig. 10 d.

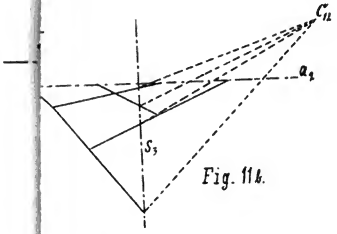


Fig. 11 k.

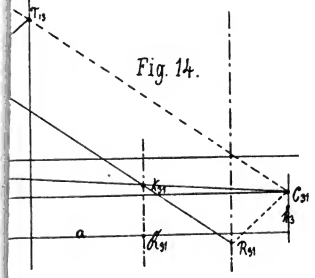
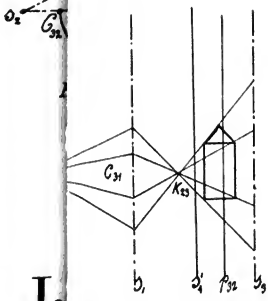


Fig. 14.



I.

Digitized by Google

Dasselbe f. 1891. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. 1. Hft. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1891. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co. 3 Mk.

Kalender f. Geometer u. Kulturtechniker, hrsg. v. W. Schlebach. Jahrg. 1892. Nebst e. Beilage. Stuttgart, Wittwer's Verl. Geb. in Leinw. u. geh. 3 Mk. 50 Pf.; in Ldr. geb. u. geh. 4 Mk.

Rechnungsvorschriften f. die trigonometrische Aufnahme der Reichs-Schutzgebiete. Formeln u. Tafeln zur Berechng. der geograph. Coordinaten aus den Richtgn. u. Längen der Dreiecksseiten. Berlin, Mittler & S. 2 Mk.

Mechanik.

Hafner, E., die Anziehungs- u Abstossungskräfte in der Natur, ihr Entstehungsgesetz u. ihre Beziehgn. zur Bewegg. Glarus, Baeschlin. 2 Mk. 60 Pf.

Technik.

Epstein, J., Einführung in das elektrotechnische Mass-System. Frankfurt, Alt. 80 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1890. 2. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Hoppe, O., Elektrotechnik. 4. Aufl. Clausthal, Grosse'sche Buchh. 50 Pf.

Kalender f. Elektrotechniker. Hrsg. v. F. Uppenborn. 9. Jahrg. 1892. München, Oldenbourg. Geb. 4 Mk.

Kalender f. Elektrotechnik pro 1892. Bearb. v. J. Krämer. 6. Jahrg. Wien, Perles' Verl. Geb. in Leinw. 3 Mk.; in Ldr. 4 Mk. 40 Pf.

Kalender f. Optiker u. Mechaniker f. d. J. 1892. Hrsg. v. e. bewährten Fachmann. 1. Jahrg. Dresden, Bloem. Geb. 1 Mk. 25 Pf.

Kapp, G., elektrische Kraftübertragung. Ein Lehrbuch f. Elektrotechniker. Autoris. deutsche Ausg., nach der 3. engl. Aufl. bearb. v. L. Holborn u. K. Kahle. Berlin, Springer. Geb. 7 Mk.

Prometheus. Illustrirte Wochenschrift üb. die Fortschritte der angewandten Naturwissenschaften, hrsg. v. J. N. Witt. 3. Jahrg. 1891/92. Nr. 2. Berlin, Mückenberger. Vierteljährlich 3 Mk.

Wagner, C., die elektrische Haustelegraphie. Allgem. verständlich dargestellt. Berlin, Mode's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Red.: O. Schneider. 12. Jahrg. 1891. Nr. 19. Leipzig, Gressner & Schr. Vierteljährlich. 2 Mk.

Finsterwalder, S., die v. optischen Systemen grösserer Oeffnung u. grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Auf Grund der Seidel'schen Formen untersucht. München, Franz'scher Verl. 3 Mk.

Huber, G., Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse. Bern, Wyss. 80 Pf.

Lampa, A., üb. die Absorption d. Lichtes in trüben Medien. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Snellen, H., Optotypi ad visum determinandum secundum formulam $v = \frac{\partial}{D}$. Ed. XI. Berlin, Peters, Verl. 3 Mk. 50 Pf.

Volkmann, P., Vorlesungen üb. die Theorie d. Lichtes. Unter Rücksicht auf die elast. u. die elektromagnet. Anschauung. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 20 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Airy, G. B., die Gravitation, e. elementare Erklärung der hauptsächlichsten Störungen im Sonnensystem, übers. v. R. Hoffmann. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. XIV. Jahrg.: 1890. Hrsg. v. der Direktion der Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. 15 Mk.

Bischof, F., Bestimmungen der Bahn d. Kometen 1890. II. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Dillmann, C., astronomische Briefe. Die Planeten. Tübingen, Laupp'sche Buchh. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Hammer, E., zur Abbildung d. Erdellipsoids. Ergänzung zu d. Verf. Schrift: Ueber die geographisch wichtigen Kartenprojektionen. Stuttgart, Wittwer's Verl. 1 Mk.

Hartmann, J., die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Hesse-Hartegg, C. v., die Einheitszeit nach Stundenzonen, ihre Einführg. im Weltverkehr u. im gewöhnl. Leben. Leipzig, Reissner. 1 Mk. 50 Pf.

Himmel u. Erde. Illustrirte naturwissenschaftliche Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. IV. Jahrg. Octbr. 1891 — Septbr. 1892. 1. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich. 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte

der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. IX. Bd. X. Jahrg. 1890. Magdeburg, Faber'sche Buchdr. Kart. 6 Mk.

Láska, W., üb. die Verbesserung der Bahnelemente. Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Meyer, M. W., Mussestunden eines Naturfreundes. Skizzen u. Studien über himml. u. ird. Dinge. 2. Afl. Berlin, Allgem. Verein f. deutsche Literatur. 6 Mk.; geb. 7 Mk.

Monatsbericht der deutschen Seewarte. 1891. 2.—4. Hft. Hamburg, Friederichsen & Co. à 50 Pf.

Panter, J. M., die Windverhältnisse auf dem Sonnenblick u. einigen anderen Gipfelstationen. Leipzig, Freytag. 5 Mk.

Petzold, W., Leitfaden f. den Unterricht in der astronomischen Geographie. 2. Aufl. Bielefeld, Velhagen & Kl. 1 Mk. 50 Pf.

Riggenbach, A., die Niederschlagsverhältnisse v. Basel. Basel, Georg, Verl. 10 Mk.

Schmidt, A., die Strahlenbrechung auf d. Sonne, e. geometr. Beitrag zur Sonnenphysik. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 1 Mk.

Tarnuzzer, Ch., Falb u. die Erdbeben. Hamburg, Verlagsanst. u. Druckerei A.-G. 60 Pf.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 feine lith. Taf., nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. Jedermann. 2. Aufl. 2.—5. Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

Physik.

Adler, G., üb. e. Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl ester Körper mittelst der Waage. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Baenitz, C., Grundzüge f. den Unterricht in der Physik. 13. Aufl. der Physik f. Volksschulen. Bielefeld, Velhagen & Kl. Kart. 90 Pf.

— Lehrbuch der Physik in populärer Darstellung. Nach method. Grunds. f. gehobene Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht bearb. 11. Aufl. Ebd. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

— Leitfaden f. den Unterricht in der Physik. 4. Aufl. Ebd. Geb. 1 Mk. 50 Pf

Berghaus, physikalischer Atlas. Vollständig neu bearb. u. hrsg. v. H. Berghaus. 23. Lfg. Gotha, Justus Perthes. 3 Mk.

— dasselbe. II. u. IV. Abtlg. Ebd. Geb. 22 Mk. 40 Pf.

Crüger, J., Grundzüge der Physik, m. Rücksicht auf Chemie als Leitfaden f. d. mittlere physikalische Lehrstufe methodisch bearb. 24. Aufl. Leipzig, Amelang's Verl. 2 Mk. 10 Pf.

Czuber, C., Theorie d. Beobachtungsfehler. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Fliedner, C., Aufgaben aus der Physik nebst e. Anh. physikal. Tabellen enth. 7. Aufl., bearb. v. G. Krebs. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk. 40 Pf.; Auflösgn. 3 Mk. 60 Pf.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1885. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 41. Jahrg. 2. u. 3. Abth. Berlin, Georg Reimer. 40 Mk.

Fröhlich, J., wechselseitige Anziehungen u. Abstossungen gleichzeitig schwingender Elementarmagnete. Berlin, Friedländer & S. 1 Mk. 20 Pf.

Jamieson, A., Elemente d. Magnetismus u. der Elektrizität. Insbesondere f. angeh. Elektrotechniker. Uebers. u. m. Zusätzen versehen v. J. Kallert. Leipzig, Quandt & H. 8 Mk. 40 Pf.

Kirchhoff, G., Vorlesungen üb. mathematische Physik. 3. Bd. Electricität u. Magnetismus. Hrsg. v. M. Hauck. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 161.—164. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Kundt, die neueren (Formen) Entwickelung d. Elektricitätslehre. Rede. Berlin, Hirschwald. 80 Pf.

May, O., üb. elektrische Kraftverleihung u. Kraftübertragung. Nach seinem Vortrage, geh. im techn. Verein. Frankfurt, Alt. 1 Mk. 20 Pf.

Nentwig, H., die Physik an der Universität Helmstedt. Mit Benutzg. v. Akten d. herzogl. Landeshauptarchives zu Wolfenbüttel u. bisher ungedruckter Briefe Leibnizens in den kgl. Bibliotheken zu Halle u. Hannover dargestellt. Wolfenbüttel, Zwissler. 2 Mk.

Poincaré, H., Elektricität u. Optik. Vorlesungen. Red. v. J. Blondin. Autoris. deutsche Ausg. v. W. Jäger u. E. Gumlich. 1. Bd.: Die Theorie v. Maxwell u. die elektromagnet. Lichttheorie. Berlin, Springer. 8 Mk.

Puluj, J., üb. die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in e. Leiter m. Selbstinduction. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Riecke, E., gesammelte Abhandlungen v. J. C. Maxwell, besprochen v. E. R. Göttingen, Dieterich'sche Verlagsbuchh. 1 Mk. 60 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 31.— 35. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausg. v. E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, C. Kreichgauer, S. Lindeck. 1. Thl.: Mechanik. 1. Bd. Allgemeine Mechanik u. Mechanik der festen Körper. 4. u. 5. (Schluss-) Lfg. Berlin, Springer. à 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 29. Bd. A. u. d. T.: Abhandlungen der mathematisch-physikal. Classe. Leipzig, Hirzel. 33 Mk.

Acta mathematica. Zeitschrift, hrsg. v. G. Mittag-Leffler. 15. Bd. 1. u. 2. Heft. Berlin, Mayer & M. Für den Band 15 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. III. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Jacobi's, C. G. J., gesammelte Werke. Hrsg. auf Veranlassg. der königl. preuss. Akademie d. Wissenschaften. 7. Bd. Hrsg. v K. Weierstrass. Berlin, Georg Reimer. 4 Mk.

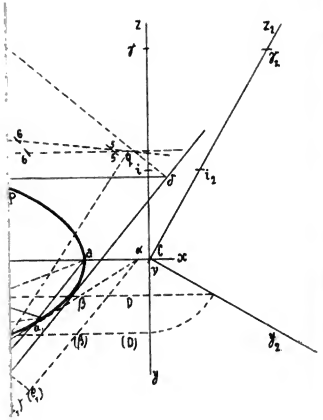
Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de. l'Academie impériale des sciences de St.-Petersburg. Tome VII. Livr. 1. Leipzig, Voss' Sort. 3 Mk. 65 Pf.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 1—8. Berlin, Herm. Paetel. à 60 Pf. — 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 100. Bd. 3.—7. Heft. Leipzig, Freytag. 13 Mk. 90 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe d. k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1891. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Thomson, W., populäre Vorträge u. Reden. Autoris. Uebersetzg. nach der 2. Aufl. des Originals. I. Bd. Konstitution der Materie. Berlin, Mayer & M. 5 Mk.; geb. 5 Mk. 80 Pf.



4.

Litterarischer Bericht
XLIII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Beiträge zur Zahlentheorie, insbesondere zur Kreis- und Kugelteilung mit einem Nachtrage zur Theorie der Gleichungen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1891. Friedrich Foerster. 285 + 133 S.

Die von Gauss gegründete, von Richelot, Serret und Kummer geförderte und erweiterte, von Bachmann nach erreichtem Standpunkt zusammengestellte Theorie der Kreisteilung ist nach Erklärung des Verfassers hiermit nicht abgeschlossen, sondern lässt noch manche Mängel bestehen und wird im Gegenwärtigen in wol verständlichem Vortrage mit Untersuchung der noch offenen Fragen entwickelt. Die Reihenfolge der behandelten Gegenstände ist folgende: Die construirbare Kreisteilung; die cyklisch geordneten Functionen; die allgemeine Kreisteilung; die Teilbarkeit der Zahlen von der Form 2^r+1; zur allgemeinen Zahlentheorie, nämlich: die polyplexen Wurzeln und die polyplexe Zahl überhaupt; die ideale Zahl, die algebraische Zahl, die Quaternionen, d. i. die vom Verfasser als ganz verfehlt dargetane Speculation Hamilton's; endlich die Kugelteilung. Dann folgt im Anhang: das Lösbarkeitsmerkmal und die Herstellung lösbarer Gleichungen. H.

Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von Dr. M. Paul Mansion, Professor an der Universität Gent, Mitglied der königl. belgischen Akademie. Vom Verfasser durchgesehene und vermehrte deutsche Ausgabe. Mit Anhängen von

S. von Kowalevsky, Imschenetsky und Darboux. Herausgegeben von H. Maser. Berlin 1892. Julius Springer. 489 S.

Die hervorragende Stelle des Originalwerkes, welches jetzt nach langer Unterbrechung wieder zugänglich gemacht wird, in der mathematischen Litteratur wird vom Herausgeber in den Worten ausgesprochen: „das Mansion'sche Buch ist bisher das einzige geblieben, welches in so eingehender Weise die verschiedenen Methoden, welche zur Integration der partiellen Differentialgleichungen vorgeschlagen wurden, historisch-kritisch beleuchtet, ihre Beziehungen zu einander klarlegt, ihre Vorzüge und Mängel gegenseitig abwägt und jedem der Begründer das Verdienst lässt, welches ihm zukommt. Es ist das einzige Werk dieser Art geblieben, einfach aus dem Grunde, weil es seine Aufgabe gleich in vollkommener und unübertrefflicher Weise löste". Letztere Aussage kommt jeder Kritik zuvor. Wir wollen nur die Hauptabschnitte aufführen: Entstehung der partiellen Differentialgleichungen. I. Buch: Methode von Lagrange und Pfaff. Lineare partielle Differentialgleichungen; Methode von Lagrange zur Integration der part. Diffgl. mit 3 Veränderlichen und einiger Gleichungen mit einer grösseren Zahl von Veränderlichen; Ausdehnung der Lagrange'schen Methode auf part. Diffgl. mit beliebig vielen Variabeln; die Pfaff'sche Methode. II. Buch: Methode von Jacobi. Grundlagen; Integration einer part. Diffgl. 1. Ordnung; Integration der simultanen part. Diffgl. 1. Ordnung; Methode von Clebsch für die Integration der linearen part. Diffgl., zu denen die Jacobi'sche Methode führt; Methode von Korkine und Boole; Mayer's Methode zur Integration der linearen part. Diffgl., zu welchen die Jacobi'sche Methode führt. III. Buch: Methode von Cauchy und Lie. Allgemeine Auseinandersetzung, Arbeiten von Cauchy; Untersuchungen von Serret; Lie's Methode betrachtet als eine Erweiterung der Cauchy'schen; die Lie'sche Methode als Zusammenfassung der früheren Methoden. Anhänge: Zur Theorie der part. Diffgl. Von Frau Sophie von Kowalevsky. Untersuchung der Methoden zur Integration der part. Diffgl. 2. Ordnung mit 1 abhängigen und 2 unabhängigen Veränderlichen. Von V. G. Imschenetsky. Ueber die part. Diffgl. 2. Ordnung. Von G. Darboux. H.

Cours de la Faculté des sciences de Paris. Traité d'analyse. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des sciences. Tome I. Intégrales simples et multiples. L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries. Applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris 1891. Gauthier-Villars et fils. 457 S.

Der umfassende Titel „Lehrbuch der Analysis" bezeichnet das Gesamtwerk nicht und ist auch, wie aus dem Vorwort zu ersehen, nicht zu diesem Zwecke vom Verfasser gewählt. Der eigentliche Gegenstand ist vielmehr die Theorie der Differentialgleichungen, und der jetzt erschienene erste Band hat die vorbereitende Bestimmung, gewisse Lehren von den bestimmten Integralen, welche der Verfasser zugunsten seiner Zuhörer für gut fand, zu entwickeln. Die 4 Themata sind auf dem Specialtitel genannt. Das erste betrifft die allgemeine Lehre von den Integralen der Functionen, den einfachen, auch krummlinigen, den doppelten und mehrfachen; das zweite die Laplace'sche Gleichung, Anziehung und Potential, die gleichförmig convergenten Reihen, das Dirichlet'sche Integral, die Fourier'sche Reihe; das dritte Enveloppen', Regelflächen, Congruenzen von Geraden und Complexe', Berührung, Krümmung, Torsion, Curven auf Flächen, abwickelbare Flächen, Abbildung. H.

Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. Von Ulisse Dini, ordentlichem Professor an der Universität Pisa. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Jacob Lüroth, Professor zu Freiburg i. B., und Adolf Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Leipzig 1892. B. G. Teubner. 554 S.

In der Bearbeitung ist der Gesichtspunkt unverkennbar, ein italienisches Werk, dass nach dem Urteil der Herausgeber bisher einziges und durch kein andres ersetztes Hülfsmittel des Studiums der Functionentheorie gewesen ist, nicht nur nach Deutschland zu verpflanzen, sondern es auch für Deutschland und die neueste Zeit durch Berücksichtigung der methodischen Fortschritte auf der Höhe seiner Stellung zu erhalten. Dies Verfahren war indes vom Verfasser selbst an die Hand gegeben; denn auch die Entstehung des Originalwerks zeigt durch successive Aufnahme neuerer und fremder Erzeugnisse, dass es für weitere Vervollkommnung bestimmt war. Die Lehrmethode charakterisirt sich durch Bevorzugung der formellen Begriffsbestimmung vor der materiellen. Dies hat auf den Entwickelungsgang des Ganzen keinen merklichen Einfluss geübt. Es werden nach einander die Begriffe der Irrationalzahl, des Grenzwerts und der unendlichen Grössen, der Functionen, ihrer Stetigkeit, ihre Derivation, die unendlichen Reihen, dann die Integration behandelt, mithin dem Plane nach die Theorie aufgebaut. Im Einzelnen aber macht die Begriffsbestimmung die grösste erreichte Allgemeinheit zum Ausgangspunkte und begnügt sich mit Aufstellung der notwendigen Bedingungen, ohne den Anschluss der Lösungen

an vorher bekannte Gebiete ans Licht kommen zu lassen. Der Deutlichkeit förderlich ist diese didaktische Inconsequenz gewiss nicht; eher möchte das letztere Verfahren dahin wirken scheinbare principielle Schwierigkeiten zu schaffen, wo von Natur keine vorhanden sind. Hoppe.

Curso de analyse infinitesimal. Por F. Gomes Teixeira, Director da Academia Polytechnica do Porto, professor na mesma Academia, antigo professor na Universidade de Coimbra, socio correspondente das Academias Reaes das Sciencias de Lisboa e Madrid e das Sociedades Reaes das Sciencias de Liège, Praga, etc. Calculo differencial (premiado pela Academia Real des Sciencias de Lisboa com o premio instituido por El-Rei D. Luiz I) 2.ª ediça˜o. 1890. — Calculo integral (segunda parte) 1892. Porto. Typographia Occidental.

Die erste Ausgabe der Differentialrechnung, erschienen 1887, ist im 23. litt. Bericht S. 27, der erste Teil der Integralrechnung, erschienen 1889, im 33. litt. Bericht S. 4 besprochen. Der jetzt erschienene 2. Teil der Integralrechnung behandelt die Integration der Functionen imaginärer Variabeln, die Euler'schen Integrale, die elliptischen Functionen mit Anwendungen, vielförmige Functionen, die Lagrange'sche Reihe, die Variationsrechnung, geometrische Anwendung, Minimalflächen. H.

Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Akademische Vorlesungen von H. Weber, Professor der Mathematik an der Universität Marburg. Braunschweig 1891. Vieweg u. Sohn. 504 S.

Das Buch ist in 3 Teile geteilt, überschrieben analytischer, algebraischer, zahlentheoretischer Teil. Im ersten findet man die Lösung der Probleme, welche aus der Einführung der elliptischen Functionen natürlich hervorgiengen, wiewol erst vollendet in einem Abschnitt des zweiten. Die beiden letzten teilen die durch die Theorie der elliptischen Functionen veranlassten weitergehenden Untersuchungen mit, und zwar der zweite solche, die schon länger bekannt sind, der dritte solche, die lange nur Wenigen bekannt, erst in neuester Zeit durch Halphen, aber auch hier nur unvollendet, an die Oeffentlichkeit gelangt sind. Die Abschnitte des 1. Teils sind: die elliptischen Integrale; die Thetafunctionen; die Transformationen derselben; die elliptischen Functionen; die Modulfunctionen; einige Anwendungen; Die Abschnitte des 2. Teils: Hülfssätze aus der Algebra; Multiplication und Teilung der elliptischen Functionen; Theorie der Trans-

formationsgleichungen und die Gleichung 5. Grades. Die Abschnitte des 3. Teils: complexe Multiplication; Berechnung von Classeninvarianten; die Multiplicatorgleichung in der complexen Multiplication und die Zerfällung der Classengleichung in Factoren; Galois'sche Gruppe der Classengleichung, die Normen der Classeninvarianten $f(\omega)$; Teilung der elliptischen Functionen mit singularen Moduln. Anhang: Verzeichniss von Classeninvarianten. H.

Theorie der Quaternionen. Von Dr. P. Molenbroek. Leiden 1891. E. J. Brill. 284 S.

Zum grössten Teile ist der Verfasser Hamilton gefolgt, in einigen Stücken selbständig bessernd vorgegangen Die einzelnen Abschnitte behandeln: Summen und Differenzen von Vectoren; Quotienten von Vectoren, Quaternionen; Producte von Vectoren; einige geometrische Oerter; Differentiale von Quaternionen; Auflösung von Quaternionengleichungen 1. Grades; Quaternionengleichungen 2. und höhern Grades. Anhang: Potenzen mit Quaternionenexponenten; Logarithmus und trigonometrische Functionen eines Quaternions. H.

Die sieben Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen. Auf Grundlage der Anschauung und unter Anwendung verallgemeinerter Definitionen nach einheitlichem Plane dargestellt von Dr. Franz Divić, königl. Gymnasial-Professor. Mit 35 Holzschnitten. Wien und Leipzig 1891. A. Pichler's Wittwe u. Sohn. 165 S.

Da keine Aeusserung des Verfassers darüber vorliegt, so kann man in Zweifel sein, ob das Buch für wissenschaftlichen oder für Schulzweck bestimmt ist. Jedenfalls gibt es keinen Anlass, pädagogische Gesichtspunkte darin zu suchen. Ist es aber unabhängig vom Schulgebrauche bearbeitet, so kann man wol einen, wenn auch nicht sachlichen, doch formellen theoretischen Fortschritt erwarten. In dieser Beziehung behauptet der Verfasser, dass seine Darstellungsweise viele Vorzüge habe, und nennt als Hauptvorzug, dass seine Definitionen der Operationen für alle Zahlarten (weder von Zahlarten noch von Erweiterung des Zahlbegriffs kommt etwas vor) einen verständlichen Sinn geben. Dies trifft jedoch nicht zu; z. B. die Definition der Multiplication ist nur für natürliche Zahlen verständlich. Ueberhaupt möchte es wol schwer sein Definitionen oder Sätze in dem Buche zu finden, die sich anders als durch ungewöhnliche Ausdrücke und Umschreibungen von den gewöhnlichen unterschieden. Die Auffassung steht, mit den gewöhnlichen Lehrbüchern verglichen, auf niederer Stufe. Unklare Redeweisen kommen nicht wenige vor,

z. B. „Mit einer Grösse sind zwar alle ihre Teile insgesamt gegeben etc.“ — „eine andere Zahl, welche mit der erwähnten gleichwertig ist.“ — Factoren werden Teile des Products genannt. — Eigentümlich möchte vielleicht die Erklärung des Zählens sein; was aber dadurch gewonnen wird, ist nicht wol abzusehen. Hoppe.

Neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung. Von Dr. Julius Bergbohm. Wien 1892. Selbstverlag des Verfassers. 58 S.

Vor nicht langer Zeit trat der Verfasser mit einer Schrift: „Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik“ — auf, worin er zwecklose, nichts unbekanntes darbietende Rechnungen unter Einführung neuer Namen für neue Entdeckungen ausgab. Was im 40. litterarischen Bericht S. 41 hierüber gesagt ist, lässt die gegenwärtige Schrift ohne Beachtung und fährt auf dem Wege vorausgeschickter Anpreisung und unerfüllter Versprechungen fort. Zum Belege die Aussage S. 56: „Fast alle Methoden, welche nötig sind, um selbst die verwickeltsten Integrale zu ermitteln, sind schon in der vorliegenden Abhandlung angedeutet.“ In der Tat wird aber in den zur Darlegung der angeblichen Methode ausgeführten Rechnungen kein einziges Integral ermittelt, vielmehr stets erst durch eine überflüssig vermehrte Reihe von Operationen die Differentiation einer speciellen Function vollzogen, dann durch den umgekehrten Gang das bereits bekannte Integral wiedererhalten.

Hoppe.

Synopsis der höheren Mathematik. Von Johann G. Hagen, S. J., Director der Sternwarte des Georgetown-College Washington D. C. Erster Band. Arithmetische und algebraische Analyse. Berlin 1891. Felix L. Dames.

Dass bei dem grossen Umfang und der vielfachen Verzweigung der höhern Mathematik eine Synopsis, welche die Ergebnisse der Forschung übersichtlich zusammenstellt, den erreichten Standpunkt in jeder Richtung erkennen lässt und die betreffenden Arbeiten nachweist, ein Bedürfniss Aller, die die Wissenschaft treiben, geworden ist, werden dieselben wol zugestehen. Zur Erschaffung eines solchen Werkes ist indes viel Umsicht und Verständniss erforderlich. Auch der Verfasser hat gefunden, dass die Aufnahme des Stoffes begrenzt werden muss, und dazu den Gesichtspunkt gewählt, dass die vorhandenen Lehrbücher alle diejenigen Sätze enthalten möchten, welche abgeschlossenen Theorien zugehören. Nur

deren Lehrstoff ist also aufgenommen, jedoch stets auf die Originalarbeiten zurückgeführt. Das Ganze ist sachlich geordnet, die Zweige der Wissenschaft sind so geschieden, wie sie sich der Litteratur zufolge actuell gestaltet haben. Ein alphabetisches Sachregister erleichtert die Auffindung. Den einzelnen Sätzen (natürlich ohne Beweis) sind historische Angaben und andre Bemerkungen beigefügt. Obgleich nun das Urteil eines Einzelnen nicht darüber zu entscheiden vermag, ob die vorliegende Synopsis dem Bedürfnisse nach allen Seiten hin genügt, so kann man doch soviel sagen, dass die Behandlungsweise eine vortreffliche Befähigung zu einem solchen Werke kund gibt. H.

Erd- und Himmelskunde.

Mitteilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik. Redigiert von Prof. Dr. W. Foerster zu Berlin. I. Jahrgang. Heft 1. Berlin 1891. Ferd. Dümmler.

Die Vereinigung ist gegründet am 19. Mai 1891, mit dem Zwecke das Zusammenwirken der Forschung zu organisiren. Der Verkehr besteht in freien Mitteilungen von Seiten der Mitglieder an die leitenden Stellen der Vereinigung und von diesen aus in Publication von Ratschlägen und von Ergebnissen der Bearbeitung der eingesandten Beobahtungen in der gegenwärtigen Zeitschrift, ihrem einzigen Organ. Die neue Vereinigung soll als regionale gleich den in England, Frankreich, Russland und Nordamerika bereits bestehenden nationalen Vereinigungen von Astronomen und Freunden der Astronomie die internationale „Astronomische Gesellschaft" als umfastendere und übergeordnete anschen. Sie hat 6 Arbeitsgruppen gebildet und jede für sich organisirt, nämlich: für Sonnenbeobachtungen, für Beobachtungen des Mondes und der Planetenoberflächen, der Intensität und Färbung des Sternlichtes und des Milchstrassenzuges, für Zodiakallicht und Meteore, für Polarlicht, Erdmagnetismus, Erdströme und Luftelektricität, für Wolken-, Halo-, und Gewitter-Beobachtungen. Das erste Heft enthält zuerst Ratschläge für die Beteiligung an der Erforschung der sogenannten leuchtenden Wolken, dann Ankündigung in Betreff der Meteorbeobachtungen nebst Nachricht über zwei solche, dann eine Zusammenstellung der vorhandenen Sternkarten. H.

Astronomische Abende. Allgemein verständliche Unterhaltungen über Geschichte und Ergebnisse der Himmels-Erforschung. Von Dr. Hermann J. Klein. Dritte, vielfach umgearbeitete und vermehrte Auflage. Leipzig (1892). Eduard Heinrich Mayer. 392 S.

Der Verfasser beabsichtigt in diesem Buche, fern von systematischer Darstellung, in einer freien und unterhaltenden Form dem Leser die hauptsächlichen Errungenschaften der heutigen Sternkunde vorzuführen. Hierzu hat er als geeignetsten Anknüpfungspunkt die historische Entwickelung. insbesondere die Lebensgeschichten der hervorragendsten Astronomen gewählt, welche die Gelegenheit bietet die notwendigsten Erklärungen einzuflechten, um so unmerklich eine Grundlage zu gewinnen, die für den Leser ohne grosse Vorkenntnisse zum Verständniss der spätern Darstellung ausreicht. Dass in der Tat Interesse für Belehrung über die Himmelserscheinungen reichlich vorgefunden wird, wie es der Verfasser voraussetzt, kann man oft bemerken und ist durch den so häufig dargebotenen Anblick des Sternhimmels leicht erklärlich. Auch muss man bei Durchlesung des Buches dem Verfasser viel Befähigung und Geschick zur Durchführung des genannten Planes zuerkennen; ganz besonders ist es hochzuschätzen, dass er es, ohne den Lesern viel Fleiss und Nachdenken anfzubürden, doch vermieden hat, ein eingebildetes Wissen durch Mitteilung unverstandener Gelehrsamkeit zu erzeugen. Gerade darum aber dürfen wir über eine Ausnahme, die sich dennoch an einer Stelle findet, nicht stillschweigen. Das Auftreten des Coppernicus bezeichnet eine entschiedene Wendung der wissenschaftlichen Forschungsweise, (von der freilich Klein kein Wort sagt). Indem C. mit klarem Bewusstsein die Basis seiner Lehre eine Annahme nannte und in seinem ganzen Werke sowie in der Widmungsschrift als solche charakterisirte, errang die „Hypothese" vermöge ihrer ausserordentlichen Erfolge ihren glänzenden Sieg über die bornirte Meinung (die sich jederzeit für absolutes Wissen, Wahrheit, Forderung des Geistes u. s. w. hält und ausgibt) und behauptete ihn durch durch die racshe Entwickelung der neuern Wissenschaft. Hätten C. und seine Nachfolger ihre Lehren als Wahrheiten hingestellt, so hätte sich statt einer fortschreitenden Wissenschaft nur eine Reihe von Meinungen ergeben. Die Hypothese des C. war es, die von Kepler präcisirt, von Newton zur Vollendung gebracht ward. Dies Verhältniss der Hypothese zur angeblichen Wahrheit verdreht nun Klein gänzlich auf S. 24, wo er von Osiander's Vorrede zu C.'s Werke spricht und sich empört darüber zeigt, dass dieser die neue Lehre als Hypothese bezeichne, die weder wahr noch wahrscheinlich zu sein brauche. Der Beisatz versteht sich natürlich für jeden Forscher von selbst, die Bezeichnung als Hypothese steht

sogar mit dem von Klein citirten eigenen Ausspruch des C. in voller Uebereinstimmung. Es ist daher nicht die Aussage von Os., sondern die von Klein unverständlich. Sofern nun die vorgesehenen Leser keine Forscher sind, durfte freilich Klein jene bedeutungsvolle Wendung mit Stillschweigen übergehen. Dann aber war auch kein Anlass ,von der genannten Vorrede ein Wort zu sagen. Sprach er einmal davon, so war es ganz den sonst treu gehaltenen Grundsätzen zuwider, den Sachverhalt so im Dunkeln zu lassen wie es hier geschieht. Doch ist nicht bloss die fehlende Erklärung, sondern eine wirkliche Entstellung des Sachverhalts zu rügen. Was die Erhabenheit von C.'s Geiste offenbart, und worin der Kundige eine Anbahnung des spätern Wiederauflebens der Wissenschaften sieht, das lässt Klein — denn anders lässt sich seine Aeusserung nicht wol deuten — in Os.'s Munde als Herabwürdigung von C.'s Lehre erscheinen. Hoppe.

Astronomy and astro-physics. Editors WM., W. Payne, Director of the Goodsell Observatory, Northfield, Minn, George E. Hale, Director of the Kenwood Astro-Physical Observatory, Chicago. 101. 102. 103. 1892.

Das dem Ref. in 3 Heften Vorliegende ist eine amerikanische Zeitschrift, von welcher jährlich 10 Hefte erscheinen. Der erste Teil jedes Heftes enthält Abhandlungen allgemein astronomischen Inhalts, der zweite, astrophysikalische Teil hauptsächlich Untersuchungen der Spectra von Fixsternen und der Physik der Sonne, der dritte Teil Nachrichten und Noten. H.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Par H. Poincaré, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des sciences. Tome I. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. Paris 1892. Gauthier-Villars et fils. 385 S.

Nachdem Gyldén und Lindstedt die säcularen Terme, welche die nach alter Methode zur approximativen Lösung des Problems der 3 Körper gebrauchten Reihen enthalten, entfernt und neue Reihen mit lauter periodischen Termen dafür entwickelt hatten, Reihen indes die nur eine anfängliche grössere Annäherung ergeben, aber nicht convergiren, war es im theoretischen Interesse für den Verfasser das nächste Ziel, eine obere Grenze des Restes zu finden. Dies Ziel ist durch die gekrönte Preisarbeit, wie sie im 13. Bande der Acta Mathematica veröffentlicht ist, erreicht. Das vorliegende

Werk gibt nun fiie ganze Theorie in mehr synthetischer Darstellung. Die Abschnitte des bis jetzt allein erschienenen 1. Bandes sind: Jacobi's Methode; Integration durch Reihen; periodische Lösungen; charakteristische Exponenten; Nichtexistenz einförmiger Integrale; approximative Entwickelung der Störungsfunction; asymptotische Lösungen. H.

Lehrbuch der physikalischen Geographie. Von Dr. Siegmund Günther, Professor an der k. technischen Hochschule in München. Mit 169 in den Text gedruckten Holzschnitten und 3 Tafeln in Farbendruck. Stuttgart 1891. Ferdinand Enke. 508 S.

Welche Doctrinen hier der Begriff der physikalischen Geographie als umfassend betrachtet wird, zeigt die Reihe der Themata des Lehrbuchs: Kosmophysikalische Einleitung; Gestalt und Grösse der Erde; Gravitation; Erdtemperatur und Erdinneres; Geognosie und Stratigraphie; Land und Entstehung der Gebirge; Hebungen und Senkungen; vulcanische Erscheinungen; Erdbeben; das magnetische und elektrische Verhalten der Erde; die Atmosphäre und die in ihr sich vollziehenden Bewegungen; Klimatologie; ozeanische Statik und Dynamik; die Gewässer des Festlandes; Schnee und Gletschereis; die zerstörenden Kräfte an der Erdoberfläche; allgemeine und specielle Morphologie der Erdoberfläche. Aus diesen vielen Gebieten erwachsen nun eine grosse Anzahl naturwissenschaftlicher Fragen, die wir nach heutigem Standpunkt als ungelöst betrachten müssen, sofern aus ihrer Untersuchung kaum irgend eine definitive Lehre oder Theorie hervorgegangen ist. Dem Lehrbuch bleibt nur die Aufgabe des beschreibenden Berichts, nämlich einesteils der Beschreibung der beobachteten Erscheinung, andernteils des der Beobachtung sich entziehenden zur Erklärung der Erscheinung hinzugedachten Vorgangs, darüber hinaus höchsteus Kritik der Argumentationen. So lässt denn auch das vorliegende Lehrbuch es dabei bewenden, die verschiedenen Erklärungsversuche mit Nennung ihrer Autoren neben einander zu stellen. Es bleibt sogar unerwähnt, wenn denselben wesentlich verschiedene Erscheinung zugrunde liegt. So sind z. B. zur Erklärung der Meeresströmungen 3 Hypothesen aufgeführt, deren erstere beiden für locale Ausgleichungsströme passen, während der dritte nur für Circulationen denkbar ist, ohne dass die Frage nach der Existenz der letztern aufkommt. Gerade darum aber, weil keine Frage zum befriedigenden Abschluss gebracht ist, darf man annehmen, dass der Reiz des Studiums um so grösser sein wird; denn ein Rätsel übt nach Mitteilung der Lösung keine Anziehung mehr. H.

Astronomischer Kalender für 1891. 1892. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Zehnter, elfter Jahrgang. Wien. Carl Gerold's Sohn. 144 + 147 S.

Die Beilagen beider Jahrgänge geben die Elemente aller Planeten, Satelliten und Asteroiden. Jede von beiden berichtet ferner über die Entdeckungen neuer Planeten und Kometen. Ausserdem enthält erstere die Phasen des Saturnringes in den Jahren 1891 und 1892, letztere das Verzeichniss der vorzüglichsten in unsern Breiten sichtbaren Fixsterne. Nähere Auskunft wird in beiden Jahrgängen erteilt über die nach ein- oder mehrmaliger Wiederkehr beobachteten Kometen. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1886. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 42. Jahrg. 1. Abth., enth.: Physik der Materie. Red. v. E. Budde. Berlin, Georg Reimer. 13 Mk.

Gerland, E., Geschichte der Physik. (Weber's naturwissenschaftl. Bibliothek, Nr. 4.) Leipzig, J. J. Weber. Geb. 4 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 21. Bd. Jahrg. 1889. (In 3 Hftn.) 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. 13 Mk.

Methode und Principien.

Baur, O. W. v., üb. die dialektisch-didaktische Begriffserweiterung in der Mathematik, nachgewiesen an der Lehre vom Negativen. Nach e. Vortrag. Tübingen, Fues, Verl. 60 Pf.

Jde, J., was ist Elektricität? Eine auf Grund einiger Erscheingn. der Physik u. Chemie versuchte Beantwortg. der Frage. Berlin, Simion. 1 Mk.

Korn, A., e. Theorie der Gravitation u. der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage d. Hydrodynamik. I. Tl. Gravitation u. Elektrostatik. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Lipps, Th., ästhetische Faktoren der Raumanschauung. Hamburg, Voss. 3 Mk.

Preyer, W., üb. den Ursprung d. Zahlbegriffs aus dem Tonsinn u. üb. das Wesen der Primzahlen. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Schlichting, K., die Gravitation ist e. Folge der Bewegung d. Aethers. Lüben, Goldschiener's Buchh. 50 Pf.

Secchi, A., die Einheit der Naturkräfte. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Autoris. Uebersetzg. v. R. Schulze. 2. Aufl. Neue Ausg. 8. u. 9. (Schluss-)Lfg. Braunschweig, Salle. à 80 Pf., kplt. 12 Mk.

Zimmermann, W. F. A., die Geheimnisse der Naturkräfte. 5. Aufl. v. B. Dürigen u. F. Matthes. 39. — 49. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 30 Pf.

Sammlungen.

Heilmann, S., Materialien f. den Unterricht im Rechnen u. in der Buchführung f. d. oberen Kurse der Realschule — allgemeine Abtlg. — sowie zum Selbstunterrichte, m. zahlreichen Beispielen u. Aufgaben. München, Lindauer'sche Buchh. 1 Mk. 80 Pf.

Holfert, H. F., geometrische Lehrsätze u. Uebungsaufgaben. zum Gebrauche in Realschulen u. verwandten Anstalten f. die Hand der Schüler bearb. 4 Hfte. Dresden, Huhle. 1 Mk. 65 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1058. — 1097. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lindner, J., 400 Kopfrechnungen, grösstentheils Aufgaben v. Anstellungs- u. Seminaraustrittsprüfungen. Regensburg, Bauhof. 60 Pf.; Resultate 20 Pf.

Mehler, F. G., Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien u. Realschulen. Mit e. Vorworte v. Schellbach. 17. Aufl. Berlin, Georg Reimer. 1 Mk. 50 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Menzel, J., Aufgaben f. d. Kopfrechnen. 8. Aufl. Bielefeld, Velhagen & Kl. Geb. 2 Mk. 60 Pf.

Müller-Erzbach, W., physikalische Aufgaben f. den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen höherer Lehranstalten u. f. den Selbstunterricht. Berlin, Springer. 2 Mk.

Steuer, W., e. Sammlung angewandter Aufgaben f. das Kopfrechnen, nebst ausführl. Lehrgang f. Kopf- u. schriftl. Rechnen. 1. Hft. 4. Aufl. Breslau, Woywod, Verl. 1 Mk.

Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch der Logarithmen f. Mittelschulen u. höheren Lehranstalten. 18. Aufl. Wien, Bermann & Altmann, Verl. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Bremiker's, C., logarithmisch-trigonometrische Tafeln m. 5 Decimalstellen. 6. Aufl., besorgt v. A. Kallius. Berlin, Weidmannsche Buchh. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Zech, J., Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen, f. 7 Stellen berechnet. 3. Aufl. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Dalwigk, F. v., Beiträge zur Theorie der Thetafunctionen v. p-Variablen. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Detor, Ch. G. J., Repetitorium der Differential- u. Integralrechnung. 2. Aufl. Berlin, Rockenstein, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Dini, U., Grundlagen f. e. Theorie der Functionen e. veränderlichen reellen Grösse. Mit Genehmigg. d. Verf. deutsch bearb. v. J. Lüroth u. A. Schepp. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Gegenbauer, L., üb. arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied u. Differenz theilerfremd ist. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

— arithmetische Relationen. Ebd. 60 Pf.

— über den quadratischen Restcharakter. Ebd. 50 Pf.

Hauck, A. F., u. H. Hauck, Lehrbuch der Arithmetik f. Latein-, Real- und Handelsschulen. (In 3 Tln.) Hrsg. v. J. Brunotte. Resultate zum II. Tl., 1. Abtlg. (5. Aufl.) Nürnberg, Kornsche Buchh. 75 Pf.

Kohn, G., üb. die Resultante u. Covariante u. e. Grundform Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Lembcke, K., allgemeine Arithmetik, in ihrer Beziehung zum praktischen Rechnen, f. den Selbstunterricht, insbesondere der Präparanden u. Seminar-Aspiranten dargestellt. 2. Aufl. Wismar, Hinstorff, Verl. 3 Mk.

Sickenberger, A., Leitfaden der Arithmetik, nebst Uebungsbeispielen. 5. Aufl. München, Th. Ackermann, Verl. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 2 Mk.

— Leitfaden der elementaren Mathematik. 1. Tl. Algebra. 2. Afl. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.; kart. 1 Mk. 35 Pf.

Stolz, O., die Maxima u. Minima der Functionen v. mehreren Veränderlichen. Nachtrag. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Geometrie.

Hertzer, H., die geometrischen Grundprinzipien der Parallel-Projektion. 2. Aufl. Berlin, Späth. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Hočevar, F., Lehrbuch der Geometrie f. Obergymnasien. 2. Aufl. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 70 Pf.; geb. 2 Mk. 10 Pf.

Martus, H. C. E., Raumlehre f. höhere Schulen, 2. Tl.: Dreiecksrechnung u. Körperlehre. Bielefeld, Velhagen & Kl. 3 Mk. 50 Pf.; geb. 4 Mk.

Recknagel, G., ebene Geometrie, Lehrbuch e. systematisch geordneter Aufgabensammlg. f. Schulen u. zum Selbststudium. 4. Aufl. München, Th. Ackermann, Verl. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 40 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Kalender f. Messkunde auf d. J. 1892. Hrsg. v. M. Clouth. 19. Jahrg. 1. Thl. Trier, Lintz'sche B., Verl. 1 Mk. 40 Pf.; geb. in Leinw. 2 Mk.; in Ldr. 2 Mk. 60 Pf.

Wüst, A., leichtfassliche Anleitung zum Feldmessen u. Nivelliren. Für prakt. Landwirte u. landwirtschaftl. Lehranstalten bearb. 3. Aufl. Berlin, Parey. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Hrsg. v. W. Jordan u. C. Steppes. 21. Bd. Jahrg. 1892. (24 Hfte.) 1. Hft. Stuttgart, Wittwer's Verl. Jährlich 9 Mk.

Mechanik.

Haerdtl, E. Frhr. v., Skizzen zu e. speziellen Fall d. Problems der drei Körper. München, Franz'scher Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Technik.

Bibliothek, elektrotechnische. 44. Bd. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Blessinger, H., die elektrische Beleuchtung industrieller Anlagen einschliesslich aller Theile in Theorie u. Praxis f. Nicht-Elektrotechniker. Kiel, Lipsius & T, Verl. 2 Mk. 70 Pf.

Braun, F., üb. elektrische Kraftübertragung, insbesondere üb. Drehstrom. Ein gemeinverständl. Experimentalvortrag. Tübingen, Laupp'sche B. 1 Mk.

Brugger, C., die Fortschritte der Elektrotechnik u. die internationale elektrotechnische Ausstellung zu Frankfurt a./M. Mitte Mai bis Mitte Octbr. 1891. Frankfurt a./M., Fösser Nachf. 50 Pf.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: W. Krieg. 5. Jahrg. 1892. (5 Hfte.) 1 Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich 3 Mk.

Elektrizität, die. Organ d. Leipziger Elektrotechniker-Vereins u. dessen Prüfungs- u. Revisions-Anstalt. Hrsg. u. red. v. O. Umbreit. 1. Jahrg. 1892. (24 Nrn.) Nr. 1. Leipzig, Otto Umbreit. Halbjährlich 4 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1890. 3. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Gehrcke, J., Rechenlehrbuch f. Unterbeamte u. Unterbeamten Anwärter der Eisenbahn, Post, Strafanstalten, Polizei-Verwaltungen, etc. 2. Aufl. Berlin, Siemenroth & W. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Schwartze, Th., Telephon, Mikrophon u. Radiophon. 3. Aufl. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Sommerfeld, A., üb. e. neue Integriermaschine. Königsberg, Koch. 60 Pf.

Szczepanski, F. v., Bibliotheca elektrotechnica. Wissenschaftlich m. Autorenregister verseh. Repertorium der neueren deutschen, französ. u. engl. elektrotech. Literatur. Petersburg, v. Szczepanski. 1 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift, elektrotechnische. (Centralblatt f. Elektrotechnik.) Red. v. F. Uppenborn. 13. Jahrg. 1892. (52 Hfte.) 2. Hft. Berlin, Springer. Jährlich 20 Mk.

— f. Elektrotechnik. Organ d. elektrotechn. Vereins in Wien. Red.: J. Kareis. 10. Jahrg. 1892. 1. Hft. Wien, Helf's Sort. Jährlich 16 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

König, A., üb. den Helligkeitswerth der Spektralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. Nach gemeinsam mit R. Ritter ausgeführten Versuchen. Hamburg, Voss. 4 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Abhandlungen d. königl. preussischen meteorologischen Instituts. I. Bd. Nr. 5. Berlin, Asher & Co. 10 Mk.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1890. II. Thl. Meteorologische Beobachtgn. der Stationen 2. Ordnung in Russland nach dem internationalen Schema. Leipzig, Voss' Sort. 15 Mk. 40 Pf.

Annalen der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien (Währing), Hrsg. v. Weiss. VII. Bd. Wien, Künast. 15 Mk.

Bidschof, F., Bestimmung der Bahn d. Planeten (279) Thule. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Blasius, W., drei Vorträge üb. Meteorologie. Braunschweig. Bock & Co. 80 Pf.

Falb's Kalender der kritischen Tage 1892 m. Bezug auf Witterungserscheinungen. Erdbeben u. Schlagwetter in den Bergwerken. Wien, Hartleben. 1 Mk. 50 Pf.

Haase, F. H., die atmosphärische Elektrizität. Betrachtungen üb. deren Entstehg. u. Wirkungsweise. Berlin, Siemens. 1 Mk. 20 Pf.

Hoernes, H., üb. Ballonbeobachtungen u. deren graphische Darstellung m. besond. Berücksicht. meteorologischer Verhältnisse.

Im Anh.: Ausgeführte Ballonreisen zu wissenschaftlichen Zwecken. Wien, Hartleben. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1894 m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1) — (283) f. 1892. Hrsg. v. dem Rechen-Institute der königl. Sternwarte zu Berlin unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches. Jahrg. 1890. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Mitteilungen der m. dem königl. statist. Landesamt verbundenen meteorol. Centralstation. Bearb. v. L. Meyer. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1890. Beobachtungs-System d. Königr. Sachsen. Bericht üb. die Thätigkeit im königl. sächs. meteorolog. Institut f. d. Jahr 1890 mit 5 Anhängen u. 5 Taf. II. Hälfte od. Abth. III. d. Jahrbuches d. königl. sächs. meteorolog. Institut. VIII. Jahrg. 1890. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz, Verl. 10 Mk.

Kalender, astronomischer, f. 1892. Nach dem Muster d. K. v. Littrow'schen Kalenders hrsg. v. der k. k. Sternwarte. Neue Folge. 11. Jhrg. Wien, Gerold's S. Kart. 2 Mk.

Liznar, J., e. Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen der erdmagnetischen Kraft. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde 1892. 21. Jahrg. 6. Aufl. Bremen, Heinsius Nachf. Geb. 7 Mk. 50 Pf.

— dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 6. Aufl. 21. Jahrg. 1892. Ebd. 3 Mk.

Mittheilungen der Vereinigung v. Freunden der Astronomie u. kosmischen Physik. Red. v. W. Foerster. II. Jahrg. 1892. (10—12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Dümmler's Verl. Jährlich 6 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krüger. 129. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke S. Für den Band 15 Mk.

Plassmann, J., Beobachtungen veränderlicher Sterne. 3. Thl. Köln, Bachem. 2 Mk.

— Verzeichniss v. Meteorbahnen. Ebd. 2 Mk.

Publikationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 28. 8. Bds. 2. Stück. Leipzig, W. Engelmann. 5 Mk.

Repertorium f. Meteorologie, hrsg. v. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, red. v. H. Wild. XIV. Bd. Leipzig, Voss' Sort. 31 Mk. 65 Pf.

Singer, K., die Witterung in Süddeutschland 1861—1890. Kurze monatl. Uebersichten. München, Th. Ackermann, Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. Red.: H. J. Klein. 25. Bd. od. neue Folge. 20. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Scholtze. Für den Band 12 Mk.

Timm, H., wie gestaltet sich das Wetter? Eine prakt. Anleitg. zur Vorherbestimmung der Witterg. Wien, Hartleben. 2 Mk.; geb. 3 Mk.

Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 26. Jahrg. 1891. 3. u. 4. Hft. Leipzig, W. Engelmann. à 2 Mk.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 11 feine lith. Taf. nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. jedermann. 2. Aufl. 8.—13. Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

— üb. die Berechnung e. Kometenbahn m. Berücksicht. v Gliedern höherer Ordnung. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Wetter, das. Meteorologische Monatsschrift f. Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 9. Jahrg. 1892. 1. Hft. Braunschweig, Salle. Jährlich 6 Mk.

Zeitschrift, meteorologische. Red. v. J. Hann u. G. Hellmann. 9. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Wien, Hölzel's Verl. Jährlich 20 Mk.

Nautik.

Annalen der Hydrographie u. maritimen Meteorologie. Hrsg. v. der deutschen Seewarte in Hamburg. 20. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Mittler & S. Halbjährlich 1 Mk. 50 Pf.

Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Hrsg. vom k. k. hydrograph. Amte, Marine-Bibliothek. 20. Bd. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Wien, Gerold's S. Jährlich 12 Mk.

Nachrichten f. Seefahrer. Hrsg. v. d. hydrograph. Amte d. Reichs-Marine-Amts. 23. Jahrg. 1892. (52 Nrn.) Nr. 1. Berlin, Mittler & S. Halbjährlich 1 Mk.

Zeitscrift für Luftschifffahrt u. Physik der Atmosphäre. Red. v. V. Kremser. 11. Jahrg 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Mayer & M. Jährlich 12 Mk.

Physik.

Annalen der Physik und Chemie. Hrsg. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Barth. Jährlich 36 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik u. Chemie. Begründet v. J. C. Poggendorff. Hrsg. v. G. u. E. Wiedemann. 16. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Barth. Für den Band 20 Mk.

Borchardt, B., Grundriss der Physik zum Gebrauche f. Mediziner. Stuttgart, Enke. 3 Mk.

Gibbs, J. W., thermodynamische Studien. Unter Mitwirkg. d. d. Verf. aus dem Engl. übers. v. W. Ostwald. Leipzig, W. Engelmann. 14 Mk.; Einbd. 75 Pf.

Gotard, H., üb. die Auflösung v. Reflexen durch Summation elektrischer Hautreize. Dorpat, Karow, Verl. 1 Mk.

Handbuch der Physik. hrsg. v. A. Winkelmann. 11. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 165.—168. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Neumann, C., üb. e. eigenthümlichen Fall elektrodynamischer Induction. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

Physik, praktische. Illustrirte Wochenschrift f. die gesamten wissenschaftl., techn. u. industriellen Interessen der Mechanik, Optik, Elektrotechnik u. s. w., sowie Organ f. den physikal. Unterricht. Hrsg. v. M. Krieg. 5. Jahrg. 1892. Nr. 1. u. 2. Magdeburg, Faber'sche Buchdruckerei. Halbjährlich 3 Mk.

Revue, physikalische. Hrsg. v. L. Graetz. 1. Jahrg. 1892. (12 Hfte.) 1. Hft. Stuttgart, Engelmann. Vierteljährlich 8 Mk.

Sumpf, Anfangsgründe der Physik. 5. Aufl. Hildesheim, Lax. 1 Mk. 50 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. d. physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 36. (Schluss-) Lfg. Wien, Hartleben. 50 Pf.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin im J. 1891. 10. Jahrg. Hrsg. v. A. König. Berlin, Georg Reimer. 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften v. dem J. 1890—1891. VII. Folge, 4. Bd. Prag, Rivnáč, Verl. Kart. 12 Mk. 80 Pf.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn, Red.: J. Fröhlich. 9. Bd. (Octbr. 1890 — Octbr. 1891.) 1. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. IV. u. V. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Burkhardt, H., Bernhard Riemann. Vortrag. Göttingen, Vandenhoeck & R. 40 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 58. Bd. Leipzig, Freytag. Geb. 70 Mk.

Mittheilungen aus dem Gebiete der angewandten Naturwissenschaften. Hrsg. u. unter Mitwirkung v. H. Rose, red. v. H. Wilhelm.

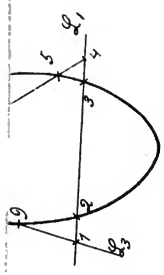
III. Jahrg. 1892. (24 Nrn.) Nr. 1. Mähr.-Schönberg, Dr. Hugo Wilhelm's Selbstverlag. Jährlich 6 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. III. Bd. 2. Hft. Red. v. Hoppe, Ropsold u. Busche. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Mittheilungen, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus den Sitzungsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1892. 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. Jährlich 8 Mk.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. d. Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 9. Berlin, H. Paetel. 80 Pf.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahrg. 1891. Prag, Rivnáč, Verl. 7 Mk. 40 Pf.



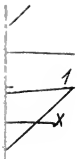


Fig. 5.

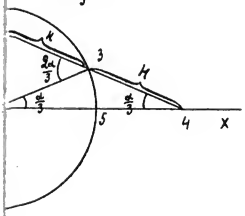


Fig. 1.

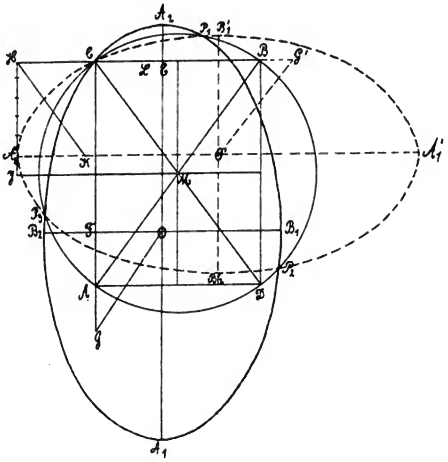
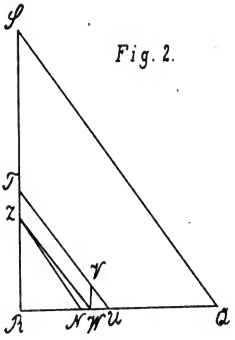


Fig. 2.



XVII. Panzerbieter: Dreiteilung des Winkels.

Litterarischer Bericht

XLIV.

Methode und Principien.

Die Grundlage der Geometrie ohne specielle Grundbegriffe und Grundsätze mit Einschluss einer vollständigen Darstellung der reinen Sphärik einheitlich dargestellt von Johann Jakob Iselin (eidgen. diplom. Arzt von Glarus). Bern 1891. K. J. Wyss. 4°. 264 S.

Der Gedanke, aus dem die vorliegende Arbeit entsprungen ist, findet sich in der Einleitung klar dargelegt. Die Principien der Geometrie zeigen einige Begriffe und einige Sätze, welche nach bisheriger Methode nicht begründet werden konnten, daher als Grundbegriffe und Grundsätze angenommen werden mussten. Der Verfasser ist nun der Ansicht, diese Mängel beruhten nur auf unrichtiger Entwickelungsfolge. Er meint eine Anordnung gefunden zu haben, bei der keine Voraussetzung nötig sei und das System der Begriffe und Sätze sich in strenger Folge ergebe. Die Ausführung, welche der Hauptsache nach den Inhalt des Buches ausmacht, wenn derselbe auch vielfach über die notwendigen Principien hinausgeht, hat den Erfolg auf folgende Umstellung gebaut: statt der linearen Gebilde ‚Ebene und Geraden, macht die Kugel den Anfang; jene werden aus ihr durch Uebergang zur Grenze und durch Schnitte gewonnen (eine Deduction die auch von andern Autoren versucht ist). Dass nun das eigentliche Ziel, die Beseitigung aller Voraussetzungen, in vorliegender Bearbeitung gänzlich verfehlt ist, kann dem Leser derselben schwerlich entgehen. Dass jede Theorie, also auch die Geo-

metrie Voraussetzungen haben muss, ist selbstverständlich. Das „neue System" stellt sich bei gegenwärtiger Abfassung dem alten System gegenüber gerade dadurch in Nachteil, dass die factischen Voraussetzungen, die teils mehr, teils weniger offenbar darin gemacht sind, nie ausgesprochen werden. Die Congruenz von Raumgebilden als notwendiger Grundbegriff, die empirischen Eigenschaften des Raumes als notwendige Grundsätze hätten zunächst anerkannt werden müssen, da sie beständig in Anwendung kommen. Hiervon kann man leicht absehen. Das Ganze charakterisirt sich schon in unverhehlter Weise durch seinen Anfang als principiell unlogisch und entzieht dadurch alles Folgende der Controle, nämlich durch Einführung und beständige Verwendung unmöglicher Begriffe. Unmittelbar und ohne Versuch einer Erklärung wird das absolute Unendliche (∞) als Grösse behandelt und die Linie eine Summe von Punkten, die Fläche eine Summe von Linien u. s. w. genannt. Als Symbole sind solche Ausdrücke offenbar nicht zulässig, wo die logische Bündigkeit in Frage steht; man müsste verlangen, dass der Autor auch im Stande wäre, die Symbole durch Worte von eigentlichem Sinne zu ersetzen, das aber wäre, um es bei allen Anwendungen zu vollziehen, eine Aufgabe, die dem gesamten vorausgesetzten Problem ziemlich gleich käme; ehe es geschehen ist, lässt sich nicht ersehen, wieviele Lücken der Deduction dann zutage kommen würden, die unter der Decke der Symbole verborgen waren. Nach allem ist das Buch weit entfernt das Versprochene zu leisten. Ueberhaupt muss man darauf verzichten auf dem hier eingeschlagenen Wege ein Lehrsystem zu schaffen, das als Grundlage des Unterrichts das euklidische zu ersetzen vermöchte, weil hier die Gesichtspunkte des letztern, Beginn in den einfachsten Gebilden und synthetischer Fortgang, gar nicht in Betracht gezogen sind. Lässt man diese Bestimmung des Buchs fallen und betrachtet es als wissenschaftliche Untersuchung, und zwar ohne Anspruch ein bestimmtes Ziel erreicht zu haben, so bietet es manches anregende dar. Zuerst werden die bisherigen Grundbegriffe in der Weise des Verfassers discutirt. Der 2. Teil trägt das „neue System" vor. Er beginnt mit dem Euler'schen Satze von den Polyedern (unter Voraussetzung successiven Angrenzens der Flächen). Dann werden die Kugel, die Schnitte der Kugeln, die sphärische Geometrie, die Rotationsflächen und solche 2. Grades behandelt. Dann folgt durch Uebergang zur Grenze die Geometrie der Ebene und der Geraden. Die Lehrsätze werden als Folge vorhergehender Erörterung, nie mit nachfolgendem Beweise aufgestellt. „Benamsungen" werden, unterschieden von Definitionen, in grosser Anzahl gegeben, die meisten dem gewöhnlichen Gebrauche gemäss, andre auch neu erdacht, wegen Länge der Erklärung nicht leicht zu verstehen.

Hoppe.

Ueber den Ursprung des Zahlbegriffs aus dem Tonsinn und über das Wesen der Primzahlen. Von W. Preyer in Berlin. Hamburg und Leipzig 1891. Leopold Voss. 36 S.

Der Verfasser stellt die Ansicht auf, dass der Mensch auf den Zahlbegriff zuerst durch die Empfindung der Harmonie der in einfachen Schwingungsverhältnissen stehenden Töne geführt werde. Da nun das System der Harmonie nicht die vollständige Zahlenreihe ergibt, so seien eben die Lücken derselben das erzeugende Element der Primzahlen, von diesem Gesichtspunkte aus müsse man freilich 2 und 3 (warum nicht auch 5?) von der Reihe der Primzahlen ausschliessen. Der schlagendste Einwand gegen die Ansicht ist ohne Zweifel der, dass kein Kind, ehe es zum Verständniss der Akustik reif ist, von einer Beziehung der Octave zur Zahl 2, etc. etwas weiss und doch schon längst vorher zählen kann. Weder gegen diesen Einwand indes, noch überhaupt verteidigt die Schrift jene Ansicht, sondern sucht nur soviel als möglich Beziehungen der Musiktheorie zur Arithmetik aufzuweisen, ohne je darauf zurückzukommen, welche das psychische prius sei. Gleich als ob der Ursprung des Zahlbegriffs ein unergründetes Geheimniss wäre, scheint also der Verfasser die Entdeckung jener Quelle als einer nur möglichen schon für eine vorläufig hinreichende Leistung zu halten. Erwähnt mag noch werden, dass der Verfasser das hexadische Zahlsystem empfiehlt, damit das Bereich der Primzahlen auf die Einerziffern 1 und 5 beschränkt wird. Hoppe.

Die Gravitation ist eine Folge der Bewegung des Aethers. Von Karl Schlichting, Lüben i. Schl. Lüben 1891. L. Goldschiener. 11 S.

Der Verfasser nimmt eine gleichmässige Bewegung der als Kugeln gedachten Aetheratome in gemeinsamer Richtung an. Diese gehen zum Teil wirkungslos durch die Zwischenräume der Körpermolecüle, zum andern Teil erteilen sie dem Körper durch Stoss eine Bewegung. Treffen dann die durchgeströmten Atome in verminderter Anzahl einen zweiten Körper, so ist ihre Wirkung auf ihm schwächer, und relative Annäherung beider ist die Folge. So wird dann die Erscheinung der Attraction, d. h. für eine einzige momentane Lage der Körper erklärt. Manche Rechnung wird geführt, doch steht die physikalische Deutung mit den Resultaten in keiner sichtlichen Verbindung. Hoppe.

Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Von F. Pietzker, Oberlehrer am

Gymnasium zu Nordhausen. Mit 10 Figuren im Text. Braunschweig 1891. Otto Salle. 104 S.

Der Verfasser verspricht in der vorliegenden Schrift die nichteuklidische Geometrie in der von ihren Autoren, Helmholtz, Riemann und Beltrami geschaffenen Gestalt und die Mehrdimensionengeometrie durch Nachweis von Widersprüchen zu widerlegen. Da die Behandlungsweise von vorn herein den Eindruck einer vortrefflichen Beherrschung des Gegenstandes, Vorurteilsfreiheit, Umsicht und Sogfalt macht, so muss die genannte Ankündigung, auch wenn man die Ueberzeugung hat, dass sie aus Irrtum hervorgeht, Aufmerksamkeit in hohem Grade und die Begierde erwecken die Widersprüche kennon zu lérnen, die der Verfasser gefunden haben will. Allein in dieser Erwartung findet sich der Leser gänzlich getäuscht: zum Nachweis des Widerspruchs kommt es gar nicht; die bei der Vorbereitung bewiesene Sorgfalt wird jedesmal bei Seite gesetzt, sobald eine exacte Entscheidung bevorsteht: der definitive Schluss wird in allgemeinen Worten unbekümmert um deren Deutung und ohne Eingehen auf den sachlichen Inhalt gezogen, und was ihm an Bündigkeit fehlt, durch starke Betonung des Resultats ersetzt. Bei Beurteilung der Schrift müssen wir auf den wesentlichen Unterschied der zwei in Rede stehenden Theorien ein grösseres Gewicht legen, als es der Verfasser tut. Die nichteuklidische Geometrie operirt mit unfertigen Begriffen, nämlich solchen, die wegen des Fehlens gewisser Merkmale eine grössere Allgemeinheit besitzen; ihre Aufgabe ist keine Fortbildung, sondern eine rückgängige Prüfung der Basis einer durch ihre Erfolge bereits gesicherten Wissenschaft; sie ist kein Teil oder Zweig der letztern, eine weitere Ausdehnung unabhängig von jener didaktischen Bestimmung möchte sich schwerlich rechtfertigen lassen. Die Mehrdimensionengeometrie hingegen steht ganz auf dem Boden der euklidischen, sie bedarf keiner neuen Grundbegriffe, und alle ihre Gebilde und Lagenverhältnisse sind (unendlich mehr als erforderlich) durch euklidische eindeutig bestimmt. Sie ist kein notwendiger, aber ein nützlicher peripherischer Zweig, gerechtfertigt durch eine grosse Anzahl von Sätzen, welche der Geometrie von 1, 2 und 3 Dimensionen durch Unterordnung unter allgemeinere Gesetze eine Beleuchtung erteilen, eine Rechtfertigung die hiernach dadurch bedingt ist, dass sie durchschauliche Gesetze producirt. Die Idealität beider Speculationsbereiche charakterisirt dieselben überhaupt nicht, weil die meisten Gegenstände der Mathematik ideell sind. In Betreff der nichtenklidischen Geometrie müssen wir uns hier auf einige Bemerkungen beschränken. Es werden zuerst bedenkliche Folgen derselben genannt, dann ihre Unvereinbarkeit mit dem Princip der gleichmässigen Gestaltung des Raumes zu

beweisen versucht, dann die Beweiskraft der Raumtheorien von Helmholtz, Riemann und Beltrami untersucht Auffällig ist zunächst, dass der Verfasser nach wiederholten Aeusserungen den Begriff der Congruenz als gegeben durch die Gleichmässigkeit des Raumes betrachtet, noch mehr, dass er durch eine citirte Stelle, wo Helmholtz den Sachverhalt auseinandersetzt, auf seinen Irrtum nicht aufmerksam wird, also jene Stelle gar nicht zu verstehen scheint. So belanglos die Sache an sich sein mag, so macht sie doch die richtige Auffassung der von ihm kritisirten Theorien etwas zweifelhaft. Sein Haupteinwand gegen dieselben ist nämlich, dass die Geraden sich nicht umgekehrt decken; zwar seien für die Deckung umständliche Beweise gegeben, deren Richtigkeit er nicht bestreitet, doch seien dieselben unzureichend. Die vermisste Untersuchung, welche er nun selbst in Angriff nimmt, bezieht sich nicht auf den Verlauf der Geraden, sondern nur auf ihre Endpunkte: er sucht ein Coordinatensystem, welches den zweiten Endpunkt vom ersten aus ebenso bestimmt wie der ersten vom zweiten aus. Weil er für 3 Dimensionen ein solches im nichteuklidischen Raume nicht findet, so schliesst er, dass der nichteuklidische Raum unmöglich sei. Dabei ist folgendes zu bemerken. Nimmt man den Congruenzbegriff als gültig an, d. h. betrachtet man ein einziges Gebilde bei seiner Translocation als unveränderlich, so ist es selbstverständlich, dass das System der 2 Punkte, als starres betrachtet, sich in umgekehrter Lage decken muss', ohne dass daraus ein Schluss auf die Gleichmässigkeit des Raumes gezogen werden kann. Die Deckung der geraden Verbindung folgt aus dem Satze, dass eine Gerade durch 2 Punkte bestimmt ist. Dies und dass die Gerade in dem definirten Raume liegt wenn 2 ihrer Punkte darin liegen, ist ohne Zweifel in der Doctrin bewiesen. Dass dennoch kein Coordinatensystem gleichmässig, umkehrbar und vertauschbar gefunden werden kann, wenn man sich, wie es hier geschieht, auf Kürzeste als Coordinatenlinien beschränkt, ist nicht auffällig, da auf keiner nicht abwickelbaren Fläche zwei Scharen Kürzester ein regelmässiges System ergeben, und doch die positiv gekrümmte Kugelfläche einen gleichmässigen Raum darstellt. So ist denn auch hier der definitive Schluss durch nichts motivirt; dem Raume wird schuld gegeben, was Schuld der Abmessungsweise innerhalb desselben ist, ein Fehler der in naher Verbindung damit steht, dass der Verfasser mit der Gleichmässigkeit des Raumes den Congruenzbegriff als gegeben betrachtet, als ob man nicht in jenem auch nicht congruente Gebilde construiren könnte. Vorstehendes soll keine Widerlegung der entwickten Ansicht des Verfassers sein, sondern nur zeigen, warum wir seine Behauptung. die nichteuklische Geometrie führe auf Widersprüche, nicht als einleuchtend dargetan anerkennen können. Anders liegt nun

die Sache in Betreff der Mehrdimensionengeometrie; denn diese besteht ganz unabhängig von ihren Bearbeitern, lässt sich also rein objectiv beurteilen. Der Verfasser wird hier auf sie durch den Umstand geführt, dass Riemann und Beltrami die nichteuklidische Geometrie für gleichbedeutend mit der Geometrie eines constant gekrümmten Raumes erklären, eine Auffassung, welche offenbar ihre Möglichkeit als bedingt durch die Möglichkeit einer mindestens vierfachen Mannigfaltigkeit darstellt. Hieraus erwächst dem Verfasser ein zweiter Weg zur Widerlegung der nichteuklidischen Geometrie, indem hierzu schon die der Mehrdimensionengeometrie allein genügen würde. Zur Ausführung stellt er im letzten Abschnitte eine „Betrachtung" an, die er am Schlusse eine „unmittelbar die vollkommene Unmöglichkeit der vierten Raumdimension klarlegende" nennt, der aber zu einem Beweise geradezu alles, namentlich das Vorkommen der zu beweisenden Unmöglichkeit, fehlt. Es werden nach einander die Gebilde von 1, 2, 3, 4 Dimensionen betrachtet und an ihnen einzeln ein gewisser Gegensatz und eine „doppelte Auffassung" hervorgehoben. In wiefern nun der gemeinte Gegensatz und die 2 Auffassungen, die bzhw. nur bei 1 und 2 Dimensionen ausgesprochen sind, auch bei 3 und 4 Dimensionen als dieselben verstanden werden sollen, um einen Sinn zu ergeben, wenn weiterhin schlechthin von der doppelten Auffassung die Rede ist, lässt sich schwer erraten; jedenfalls stimmt es nicht mit der Absicht „klarzulegen", dass so dehnbare Begriffe, gerade wo ein wichtiger Schluss gezogen werden soll, ohne vollkommen entwickelte Angabe ihres Inhalts gebraucht werden. Doch ist es auch gar nicht nötig aus der langen Betrachtung irgend etwas zu bestreiten. Wir wollen zugeben, dass ein gewisser gemeinsamer Gegensatz und eine gewisse gemeinsame doppelte Auffassung innerhalb der ersten 3 Dimensionen bestehen, in der 4. Dimension hingegen fehlen. Dies sagt offenbar nichts weiter, als dass die 4. Dimension eine Eigenschaft nicht hat, welche die 3 ersten besitzen, d. h. dass sie begrifflich in diesen nicht enthalten ist. Um einen Widerspruch in ihrer Idee aufzuweisen, hätten 2 Betrachtungen zu unvereinbaren Resultaten führen müssen, und von solchen ist nirgends die Rede. Auch die Forderung der Anschaulichkeit, welche an andrer Stelle erhoben wird, ist in gleichem Falle; denn deren Bedingungen sind aus dem euklidischen Raum entnommen. Die obige Behauptung der Unmöglichkeit einer 4. Dimension ist demnach nicht einmal formell begründet. Im vorletzten Abschnitt der Schrift, wie hier noch nachzuholen ist, bestreitet der Verfasser das Recht die von Riemann ans Licht gestellten speciellen Eigenschaften des euklidischen Raumes als solche zu bezeichnen, welche aus der Erfahrung stammten, indem er auf die Unmöglichkeit hinweist durch Messung der Winkel eines

sehr grossen Dreiecks die Frage zu entscheiden, ob deren Summe 2 Rechte beträgt. Dies verbunden mit einer spätern Erklärung, dass nämlich Grössenvergleichung erst durch das Bewusstsein der Fähigkeit möglich sei, zeigt, dass der Verfasser die Rolle der Erfahrung noch gleicherweise verkennt wie die speculative Philosophie, die mit der inductiven Erkenntniss nichts anzufangen weiss. Dass seit Bako's Reform der Erkenntnisslehre die Naturwissenschaft den entgegengesetzten Forschungsweg verfolgt von dem des Descartes, welcher nur von einem sichern Anfang einen sichern Fortgang der Erkenntniss für möglich hielt, dass für die empirischen Wissenschaften vielmehr der Anfang ganz gleichgültig ist, und die Sicherheit allein in den Erfolgen liegt, scheint auf das Urteil des Verfassers unwirksam geblieben zu sein: er meint noch immer, die Erfahrung, welche die Quelle der geometrischen Grundbegriffe genannt werde, müsse eine präcise Beobachtung sein. Die roheste Erfahrung eines Kindes, welches Dinge so lange für gleich hält, bis es die Verschiedenheit gewahr wird, nötigt es zur Vergleichung noch lange ehe es von seiner Fähigkeit etwas weiss; eine ebenso rohe Erfahrung reicht hin den Vorzug der geraden Linie vor andern Linien zu bemerken, ohne dass es die Bedingungen der Geradheit kennt. Als eine zunächst unwissenschaftliche Idee wird die Gerade von Euklid aufgenommen, bildet die Grundlage eines wissenschaftlichen Systems und zeigt sich Jahrtausende lang als eine Errungenschaft; erst in neuster Zeit denkt man daran nach dem exacten Begriffe zu fragen. Ebenso beruhen die von Riemann genannten Eigenschaften des Raumes auf Erfahrungen, die ohne Wissenschaft gemacht werden, und deren Ursprung er nicht näher zu bestimmen braucht, weil nichts davon abhängt. Den dialektischen Kunstgriff, welchen Kant gebraucht um die Bakonische Erkenntnisslehre beiseite zu schieben und wieder auf die Cartesische einzulenken, ahmt der Verfasser nach: gleichwie Kant setzt er der Erfahrung angeborene Fähigkeiten entgegen. Die Nichtigkeit des Einwandes ist leicht genug zu enthüllen. Die Fähigkeit etwas zu tun unterscheidet sich vom Tun selbst allein durch die Willensfreiheit, (welche bekanntlich das Kind erst mit der Zeit gewinnt, so dass es keinen Sinn hat, wenn man die Fähigkeit angeboren nennt). Auf dieses Tun, d. i. auf die psychische Genesis, geht aber Kant grundsätzlich nie ein, er urteilt wie ein Prophet über ein Gebiet, das er nie betreten hat. Wie von Kant wird auch vom Verfasser die Bedeutung der Erfahrung, welche in Wirklichkeit die Erwerbung von Fähigkeiten in sich schliesst, willkürlich auf diejenige eingeschränkt, welche bei bewusster Forschung gemacht wird, weil Beide, vom Cartesischen Vorurteil beherrscht, nicht begreifen, wie unwissenschaftlich gefasste Ideen productiv für die Wissenschaft sein können. Neben der Sinnlichkeit als Quelle der Ideen eine ur-

sprüngliche Quelle im Geiste setzen wollen heisst nicht die Aufgabe des Nachweises der Entstehung der Ideen der Lösung näher führen, sondern die begonnene Untersuchung aufs neue unter die bornirte Meinung stellen. Hoppe.

Aesthetische Factoren der Raumanschauung. Von Theodor Lipps in Breslau. Hamburg und Leipzig 1891. Leopold Voss. 91 S.

Das Buch handelt von den Täuschungen des Gesichtssinnes Gleich im Anfang wird das Vorhandensein zweier Ansichten constatirt: Manche suchen den Grund der Täuschungen in unvollkommenen Functionen der Organe, Andere in Irrungen des Urteils. Wer beide Ansichten neben einander bestehen lässt, müsste wenigstens jede für einseitig erklären, weil sie den Fall, dass beide Gründe zusammen wirken, gar nicht in Betracht ziehen. Indessen zeigt sich bald, dass erstere Meinung in sich unklar ist, daher ganz ausser Betracht fällt. Der Gesichtseindruck ist eine psychische Tatsache, die, weil sie nichts aussagt, auch nichts irriges aussagen kann. Erst mit dem Denken beginnt die Gefahr des Irrens. Demnach verfährt der Verfasser ganz correct, welcher, ohne sich auf Bestreitung der erstern Ansicht einzulassen, sich einfach für letztere erklärt. Dagegen möchte es wol nicht gerechtfertigt sein, dass er mit Wahrnehmung den unmittelbaren, also subjectiven Sinnesact bezeichnet. Dem ausnahmlosen Wortgebrauche gemäss ist das Wahrgememene stets ein Objectives. Beide Bedeutungen klar zu unterscheiden ist in hohem Masse Grund. Denn die Beziehung der Wahrnehmung auf das Objective involvirt immer ein Urteil, und dieses kann irren, was beim reinen Sinneseindruck sinnlos ist. Indessen ist der vulgäre Begriff der Wahrnehmung wegen Inconsequenz überhaupt keines exacten Gebrauchs fähig; denn sobald das objectivirende Urteil und seine Begründung zum Bewusstsein kommt, wie z. B. bei der das Anschauen des Mondes begleitenden plastischen Vorstellung, nennt man die objective Anschauung nicht mehr Wahrnehmung, ihr Begriff beschränkt sich auf das Bereich des Unbewussten. Die hieraus entspringende Unklarheit erklärt einerseits die irrige Meinung von der Täuschung durch die Sinne, andrerseits die Veränderung des Begriffs der Wahrnehmung von Seiten des Verfassers, welcher denselben vielleicht dadurch exact zu gestalten hofft; im vorliegenden Falle lässt die nominelle Abweichung nichts missverständlich, weil gerade jene Täuschungen, welche aus der vulgären Auffassung des Wahrnehmens entspringen, Hauptgegenstand der Betrachtung sind. Der Verfasser stellt nach Vorgang von Helmholtz zu Anfang zwei

Regeln auf. Die erste setzt eine gewisse Uebung voraus die Gesichtseindrücke in die objective Gestaltung zu übersetzen. Die Täuschung besteht darin, dass wir die geübte Methode der Uebersetzung auch gewohnheitsmässig auf Fälle anwenden, wo der Grund dazu fehlt. Die zweite Regel spricht das Obenbemerkte aus: da der Act der Objectivirung ein unbewusster ist, da das in der Wahrnehmung enthaltene Urteil mit dem Sinneseindruck verschmilzt, so fehlt auch dem Geiste die Controle der objectiven Richtigkeit des Urteils, und es sind viele Irrungen möglich. Die genannten Gründe von Täuschungen mögen unbestritten bleiben; aber ein starker Fehler ist es doch, dass die bei der ersten Regel anerkannte und vorausgesetzte Fähigkeit des Geistes von da an durchweg ignorirt wird. Es ist klar, dass, wenn und soweit die Uebersetzung der Sinneseindrücke in die objective Gestaltung durch Erfahrung zur Gewohnheit wird, alle Gründe der Täuschung unwirksam sein müssen. Als Beleg dafür, dass der Verfasser diese Rectification unbeachtet lässt, sei angeführt, dass er von dem auf Seite 8 gezeichneten Quadrat behauptet, es scheine vertical gestreckt, während es doch, trotz aller Gründe der Täuschung, die wol statthaben mögen, beim ersten Anblick wie ein richtiges Quadrat aussieht. Gegen die völlige Unwirksamkeit der Täuschung könnte man noch einwenden, sie sei zu gering um bemerkt zu werden. Nehmen wir daher einen andern Fall hinzu, wo Uebung und Nichtübung zur Vergleichung dicht bei einander stehen. Blickt man innerhalb eines bedeckten Säulengangs von einen Ende zum andern, so scheinen längs des horizontalen Bodens beide Säulenreihen vollkommen parallel, an der Decke hingegen stark convergirend. Die Erklärung ist einfach. Unter uns auf dem ebenen Fussboden haben wir auf allen Wegen Anlass und Gelegenheit unsere Anschauung zu rectificiren, über uns ist freie Luft, die weder Anlass noch Gelegenheit bietet uns Uebung darin zu erwerben. Der Fall zeigt deutlich, dass der Einfluss der Uebung sehr gross ist. Dass der Verfasser ihn nirgends in Betracht zieht, mag wol mit seiner Erklärung in Zusammenhang stehen, ihn interessire vorzugsweise die zweite Regel; mit der ersten Regel wird dann die darin erwähnte Rectification vergessen. Die Folge ihrer Vernachlässigung ist natürlich, dass die auf Grund der vorgetragenen Lehren angesagten Erscheinungen in der Wirklichkeit bald zutreffen, bald nicht, dass man daher vor den Lehren wenig Achtung, an ihrer Anwendung wenig Interesse haben kann. Ein grosser Teil der Schrift behandelt die Anwendung auf die Kunst, namentlich auf die Architechtonik, bei der es teils auf Längen-, teils auf Winkelschätzung ankommt, der übrige Teil die Täuschungen bei der Kreislinie. Das Urteil des Beschauens wird aus dem gemeinsamen Princip interpretirt, dass derselbe der Linie eine Bewegung und dieser eine

Kraft oder Tendenz unterlegt. Da die möglichen Tendenzen häufig entgegengesetzte sind, daher die zur Erklärung angezogenen mehr und mehr als willkürliche erscheinen, so ist die Schlussbemerkung des Verfassers an ihrer Stelle, dass er nicht beabsichtigt habe erschöpfende Regeln für alle Fälle zu geben, sondern nur dahin zu wirken, dass Jeder sich die Gründe seiner Täuschungen bewusst werden könne. Offenbar ist dies an sich eine hinreichende Leistung. Sogar über die genannte Bestimmung hinaus würde auch die Kunst, nämlich für momentanen Effect in Aufführungen, Gebrauch davon machen können. Aber die Baukunst in Betreff ihrer Jahrhunderte unverändert dauernden Werke ist dadurch schlecht gerechtfertigt, wenn sie nach einseitiger Theorie vorgesehene Sehfehler durch angepasste eigene Fehler ausgleichen will. Es ziemt ihr nicht, vorkommenden Urteilsschwächen der Einen zu dienen und Andre zu gleichen Täuschungen zu zwingen, sondern für alle Zeiten geltende Muster zur Ausbildung des Urteils aufzustellen. Dieser Gesichtspunkt fehlt in dem Abschnitt „Anwendungen auf die Kunst", ganz entsprechend der Verschweigung der Rectification der Anschauung.

Hoppe.

Die Einheit der Naturkräfte. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Von P. Angelo Secchi, weiland Director der Sternwarte des Collegium Romanum. Autorisirte Uebersetzung von Professor Dr. L. Rud. Schultze. Zweite, revidirte Auflage. Mit 61 in den Text gedruckten Holzschnitten. Braunschweig 1891. Otto Salle. 333 + 379 S.

Das Buch handelt von den physikalischen Doctrinen der anorganischen Körper aus dem Gesichtspunkte, dass dieselben dahin ausgehen alle Kräfte auf Bewegung zurückzuführen, und zwar die 4 Bücher einzeln von der Theorie der Wärme, des Lichtes, der Elektricität und fernerer Untersuchungsgebiete. Voraus geht eine allgemeine Einleitung. Die Bedeutung dessen, was das Buch darbietet, kann man von mehr als einer Seite auffassen. Einerseits ist es ein eingehender Bericht über den heutigen Standpunkt der Lehren der soviel als nötig auch deren successiven Fortschritt darlegt, andrerseits eine populäre Einführung unkundiger Leser in das wissenschaftliche Gebiet und in das Wesen und Ziel der Forschung. Eine dritte Seite der Betrachtung ist die philosophische; eine vierte würde die Frage ergeben, welche Gedanken dem Verfasser eigentümlich sind, doch findet sich wenig Anhalt dafür, weil das Eigene nirgends vor dem Entlehnten hervorgehoben wird. Den ersten Gesichtspunkt und damit zugleich den gesamten doctrinären Stoff des

Buchs können wir übergehen; der Name des Verfassers bürgt für die materielle Richtigkeit. Seine Philosophie, wie wir im voraus bemerken, weil es auch den zweiten Gesichtspunkt, die Belehrung der Laien, berührt, steht durchaus auf dem Boden der empirischen Wissenschaften, aus denen die Logik, d. h. Begriffe und Schlüsse gewonnen sind. Der Metaphysik gegenüber hat der Verfasser die jetzt übliche Maxime adoptirt, sie von Zeit zu Zeit anzuführen und in respectvoller Entfernung an ihr vorbeizugehen. In einem Punkte jedoch bleibt er sich nicht treu. Von den Kräften geht das Ganze aus, und gerade der Begriff der Kraft bleibt in ein mystisches Dunkel gehüllt. Bei allen andern Begriffen wird die Bedeutung in der Wissenschaft klar geschieden von der nichts beitragenden Vorstellungsweise. Ebenso hätten auch die Kräfte, nach Abstreifung der bildlichen Vorstellung, die wir damit verbinden, rein aus der Rolle, wie sie in der Wissenschaft spielen, erklärt werden sollen. Diese ist überall dieselbe: ihr gemäss sind sie diejenigen constituirenden Elemente der Vorgänge, welche erkennbaren Gesetzen unterworfen sind. Statt dessen ist in der Einleitung nur von der Entstehung der Idee der Kraft etwas gesagt; das 1. und 2. Buch, welche mehr als die folgenden der Aufklärung der Unkundigen gewidmet sind, wenden das Wort oft an ohne je über den Sinn Auskunft zu geben; im 3. Buch wird bei Kritik einer Ansicht über die Elektricität als eine Kraft etc. geäussert, damit wäre nichts gesagt, mithin zugestanden, dass diesem Begriffe die Klarheit noch fehlt. Aus dem Vorstehenden lässt sich das Motiv nicht erraten, warum die Erklärung überall gemieden wird. Erst das 4. Buch scheint ein solches zu verraten. Zunächst ist es auffällig, dass unter den Zweigen der Physik, für welche der Verfasser sein Problem bereits gelöst vorfand, nicht die Mechanik vorangestellt wird. Im 4. Buche sieht man dann, dass er sie wirklich nicht dazu rechnet, sondern auf ihrer Seite grössere Schwierigkeiten statuirt. In der Tat nimmt er keine Notiz davon, dass man die Theorie der Wärme, des Lichtes u. s. w. so wie er sie gibt, die auf Mechanik zurückgeführte nennt. Dass er nicht gewusst haben sollte, dass sein Problem für Mechanik und zwar für sie zu allererst von jedermann als gelöst betrachtet wird, woraus hervorgeht, dass die Reduction auf Mechanik mit der Reduction auf Bewegung gleichbedeutend ist, lässt sich schwer glauben. Allein das 4. Buch bringt auch positive Aussagen, die das Unglaubliche bestätigen. Z. B. wird es (S. 270) eine doppelte Aufgabe genannt, den vorangehenden Zustand zu erklären und uns von der eingetretenen Aenderung Rechenschaft zu geben — als ob nicht ersterer durch eben jenes Gesetz der Aenderung erklärt würde wie der nachfolgende Zustand. Hierzu kommt noch, dass der Verfasser die einfachste Kraft, die Massenanziehung durch ihre gesamte Be-

deutung in der Wissenschaft für nicht erklärt ausgibt. Im Capitel „allgemeine Massenanziehung" entfaltet er in vortrefflicher Klarheit die ganze Genesis des Begriffs bis zu Newton's Theorie, fügt auch hinzu, dass derselbe für allen wissenschaftlichen Gebrauch zur Vollendung gelangt sei, beharrt aber, trotz seines Entschlusses sich nicht auf Metaphysik einlassen zu wollen, dennoch auf seiner Meinung, eben wegen jener Vollendung sei die Hauptfrage, nämlich nach Wesen und Ursache der Massenanziehung übergangen worden (auf seinen Versuch sie auf Bewegung zu reduciren gehen wir nicht ein, weil er schwer zu verstehen und im Grunde gegenstandslos ist). Das Letztgenannte führt mehr als alles andre zu der Auslegung, dass der Verfasser nicht gewagt hat der grossen Schar von Schriftstellern, die sich in neuster Zeit dadurch einen Ruf erworben haben, dass sie die Schwerkraft nicht begreifen können, entgegenzutreten und nur darum über dem Begriffe der Kraft ein solches Dunkel erhält wie über keinem andern. Behauptung liegt fern, nur vermögen wir keine andre Auslegung zu finden. Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 21. Bd. Jahrg. 1889. 2. Hft. Berlin, Georg Reimer. 8 Mk.

Weissenborn, H., zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & M. 3 Mk.

Methode und Principien.

Bergbohm, J., neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik. Wien, Selbstverlag. 60 Pf.

— neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- u. Numeralrechnung. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Galilei, G., Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische u. kopernikanische. Aus dem Ital. übers. u. erläutert v. E. Strauss. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Hertz, H., Untersuchungen üb. die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Möller, M., das räumliche Wirken u. Wesen der Elektrizität u. d. Magnetismus. Hannover-Linden, Manz & L. 3 Mk. 50 Pf.

Schwartze, Th., Elektrizität u. Schwerkraft im Lichte einheitlicher Naturanschauung. Berlin, Polytechn. Buchh. 1 Mk. 80 Pf.

Wolff, J., üb. Lotze's Metaphysik. Fulda, Fuldaer-Actien-Druckerei. 1 Mk. 75 Pf.

Lehrbücher.

Boymann, J. R., Lehrbuch der Mathematik f. Gymnasien, Realschulen, u andere höhere Lehranstalten. 2. u. 3. Tl. 8. Aufl; besorgt v. Vering. Düsseldorf, Schwann. 5 Mk. 25 Pf.; geb. 5 Mk. 85 Pf.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik, f. den Schulunterricht bearb. 1. Tl. Arithmetik u. Algebra. Asg. f. Gymnasien. Neu bearb. v. H. Langguth. 34. Afl. Breslau, Hirt. Geb. 1 Mk. 65 Pf.

— dasselbe. Planimetrie. 93.—95. Afl. Ebd. Geb. 1 Mk. 65 Pf.

— dasselbe. 3. Tl. Ebene u. sphärische Trigonometrie. Nebst Uebungsaufgaben. 21. Afl. Ebd. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Leitfaden der Elementar-Mathematik. 1. Tl.: Planimetrie. 8. Afl. 1 Mk. 80 Pf. 3. Tl.: Ebene Trigonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie, propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. 6. Afl. 1 Mk 50 Pf. Berlin, Simion.

Sammlungen.

Aufgabensammlung f. den Unterricht in der Buchstabenrechnung u. Algebra. Hrsg. v. der Gesellschaft der Freunde d. vaterländ. Schul- u. Erziehungswesens in Hamburg. 4. Afl. Hamburg, Boysen. 80 Pf.

Augsburger, J., Rechenbuch f. Vorschulen. (In 3 Hftn.) 3. Hft. 3. Afl. Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Borth, E. F, die geometrischen Konstruktionsaufgaben, f. den Schulgebrauch methodisch geordnet u. m. e. Anleitg. zum Auflösen derselben versehen. 7. Afl. Leipzig, Reisland. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Bothe, A., Rechenaufgaben f. höhere Schulen. Auflösungen zum 1.—3. Hft. (2. Afl.) Annaberg, Graser's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Gaydeczka, J., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra in den oberen Classen der Mittelschulen. Leipzig, Freytag. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Hartmann, B., u. J. Ruhsam, Rechenbuch f. Stadt- u. Landschulen. Ausg. f. das Königreich Preussen. Lehrerheft. 2. Hft. Für das 3. u. 4. Schuljahr verfasst. Frankfurt, Kesselring'sche Hofbuchh., Verl. 1 Mk. 75 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1098.—1127. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Locbnitz, G. Th., Rechenbuch f. Gymnasien, Realgymnasien, Oberreal- u. Realschulen. 1. Tl. 17. Afl. m. e. Nachtrage, enth. Aufgaben zu den Arbeiterversichergn. Hildesheim, Gerstenberg'sche Buchh. 1 Mk.; geb. 1 Mk. 25 Pf.

Löwe, M., u. F. Unger, Aufgaben f. das Zahlenrechnen f. höhere Schulen. Hft. A. f. Sexta. 4. Afl. Leipzig, Klinkhardt. 60 Pf.

Müller, G., Uebungsstoff f. das geometrische Zeichnen. Im Auftrage der königl. württemb. Centralstelle f. Gewerbe u. Handel bearb 10. Afl. Stuttgart, Metzler's Sort. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Tabellen.

Domke, F., nautische, astronomische u. logarithmische Tafeln, nebst Erklärung u. Gebrauchs-Anweisg f. die königl. preuss. Navigations-Schulen. Hrsg. im Auftrage d. königl. preuss. Ministeriums f. Handel u. Gewerbe. Berlin, v. Decker's Verl. 4 Mk. 50 Pf.; geb. 5 Mk. 25 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 36. Afl. Halle, Strien, Verl. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Müller, E. R., vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen u. trigonometrischen Zahlen nebst den erforderl. Hilfstabellen, f. den Schulgebrauch u. die allgemeine Praxis bearb. Stuttgart, Jul. Maier. 60 Pf.

Zimmermann, H., Rechentafel, nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerthe. Asg. 1891. 3.—5. Tausend. Berlin, Ernst & S. Geb. 5 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Heilermann, H., u. J. Diekmann, Lehr- u. Uebungsbuch f. den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. 1. Tl. Die 4 Grundrechngn. Die linearen Gleichgn. 5. Afl. Essen, Bädeker, Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Heilermann, H., Lehrbuch f. den Unterricht in der Algebra an gewerblichen Fortbildungsschulen. 3. Afl. Essen, Geck. Geb. 1 Mk.

Hočevar, F., Lehr- u. Uebungsbuch der Arithmetik f. die unteren Classen der Gymnasien u. verwandten Lehranstalten. Leipzig, Freytag. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Horstmann, A., üb. die Theorie der Lösungen. Heidelberg, C. Winter's Univ.-Buchh. 80 Pf.

Gmeiner, J. A., die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Gutzmer, A., Bemerkungen üb. die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen. (Auszug aus e. an Hrn. M. Lerch gerichteten Briefe.) Prag, Rivnáč, Verl. 12 Pf.

Rogel, F., arithmetische Relationen. Ebd. 60 Pf.

Schapira, H., Theorie allgemeiner Cofunctionen u. einige ihrer Anwendungen. 1. Bd. 2. Thl. 1. Hft. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Studnička, F. J., Beitrag zur Theorie der gemischten Reihen. Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Weierstrass, K., Formeln u. Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesgn. u. Aufzeichngn. bearb. v. H. A. Schwarz. 2. Asg. Berlin, Springer. 10 Mk.

Weltzien, C., üb. die Bedingungen, unter denen e. ganze rationale Function v. mehreren Veränderlichen die vollständige Potenz e. andern darstellt. Berlin, Gaertner's Verl. 1 Mk.

Geometrie.

Augschun, W., Grundzüge der Geometrie m. geometrischen Konstruktions- u. Rechenaufgaben. Berlin, Mittler & S. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Berger, G., Lehre der Perspektive in kurzer, leicht fasslicher Darstellung. Auf die einfachste Methode zurückgeführt f. Architekten, Bauhandwerker, Maler u. Dilettanten. 10. Afl. Leipzig, Scholtze. 2 Mk. 40 Pf.

Bongaertz, J., Vorschule zur Geometrie, nebst Flächen- u Körperberechnung, f. Präparanden, sowie zum Gebrauch in Volks-Fortbildungs- u. Mittelschulen. Freiburg, Herder. 1 Mk. 20 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Breuer, A., die goniometrischen Functionen complexer Winkel Eine Ergänzg. zur algebr. Analysis. Erfurt, Baemeister. 1 Mk.

— imaginäre Kegelschnitte. Eine geometrische Studie üb. das Wesen u. die katoptr. Deutg. d. Imaginären. Ebd. 1 Mk.

— die einfachste Lösung d apollonischen Fluctionsproblemes. Eine Anwendg. der neuen Theorie d. Imaginären. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— üb. Conographie. Ein Beitrag zur instructiven Geometrie der Kegelschnitte. Ebd. 1 Mk.

— die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung. Ein Beitrag zur algebr. Analysis. Ebd. 50 Pf.

Breusing, A., das Verebnen der Kugeloberfläche f. Gradnetzentwürfe. Ein Leitfaden f. den Unterricht. Leipzig, Wagner & D. 3 Mk.

Brockmann, F. J., Lehrbuch der elementaren Geometrie. Für Gymnasien u. Realschulen bearb. 2. Tl.: Die Stereometrie. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 80 Pf.

Brückner, J. M., das Ottojanonische Problem. Eine math.-histor. Studie. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk.

Dresch, H., Beitrag zur constructiven Theorie der windschiefen Kegelflächen m. 2 Leitgeraden u. 1 Leitkegelschnitt. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Erler, W., die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauch in der Gymnasialprima bearb. 4. Afl. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Falcke, A., Leitfaden der Geometrie. 12. Afl. Potsdam, Rentel's Verl. 50 Pf.; geb. 60 Pf.

Glinzer, E., Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Tl.: Planimetrie. 5. Afl. Dresden, Kühtmann. 2 Mk.

— Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 2. Tl.: Stereometrie. 2. Afl. Ebd. 2 Mk. 80 Pf.; geb. 3 Mk.

Heyden, R., elementare Einführung in die Lehre der harmonischen Bewegungen. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Kleiber, M., Katechismus der angewandten Perspektive. Nebst e. Anhg. üb. Schattenkonstruktion u. Spiegelbilder. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Kröger, M., Leitfaden f. den Geometrie-Unterricht in Mittelschulen u. gehobenen Volksschulen. 7. Afl. Hamburg, Meissner's Verl. 1 Mk.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Grundlagen v. den Koordinaten und den Kegelschnitten. Berlin, Simion. 50 Pf.

— propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. Pensum der Untersecunda. Ebd. 50 Pf.

Machovec, F., üb. den Zusammenhang der Krümmungshalbmesser der Parabeln u. Hyperbeln höherer Ordnung m. den Krümmungshalbmessern der Dreieckscurven. Prag, Rivnáč, Verl. 12 Pf.

Moecke, E., üb. zweiachsig-symmetrische Kurven 4. O. m. 2 Doppelpunkten. (Fortsetzung u. Schluss.) Gross-Strehlitz, Wilpert. 1 Mk. 20 Pf.

Müller, G., zeichnende Geometrie. Im Auftrage der königl. württemb. Centralstelle f. Gewerbe u. Handel bearb. 5. Afl. Stuttgart, Metzler's Sort. Geb. 2 Mk.

Nagel, v., Lehrbuch der Stereometrie zum Gebrauche in Gymnasien u. Realschulen. 5. Afl. v. Th. Schröder. Nürnberg, Korn'sche Buchh. 1 Mk. 80 Pf.

Panzerbieter, W., üb. einige Lösungen d. Trisektionsproblems mittelst fester Kegelschnitte. Berlin, Gaertner's Verl. 1 Mk.

Pick, G., üb. die conforme Abbildung e. Halbebene auf e. unendlich benachbarten Kreisbogenpolygon. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Rüefli, J., kleines Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst e. Sammlg. v. Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Mittelschulen bearb. 3. Afl. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. Kart. 80 Pf.

Rüefli, J., kleines Lehrbuch der Stereometrie, nebst e. Sammlg. v. Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Mittelschulen bearb. 2. Aufl. Ebd. Kart. 80 Pf.

Seeberger, C., Prinzipien der Perspektive u. deren Anwendung nach e. neuen Methode. 5. Aufl. München, Bassermann'sche Verlagsh. 2 Mk.

Thaer, A., Kennzeichen der Entartung einer Fläche 2. Ordnung Leipzig, Fock, Verl. 50 Pf.

Thörner, W., die Verwendung der optischen Projectionskunst im Anschauungs-Unterricht. 2 Experimental-Vorträge aus einigen Capiteln der Naturwissenschaft. 2. Aufl. Düsseldorf, Liesegang's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Wagner, W., Anleitung zur Lösung v. Aufgaben mittelst geometrischer Oerter. Heidelberg, vorm. Weiss'sche Univ.-Buchh. 1 Mk.

Waelsch, E., üb. die Isophoten e. Fläche bei centraler Beleuchtung. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Zindler, K., Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension im unteren Raume; lineare Complexe u. Strahlensysteme in denselben. Ebd. 1 Mk. 40 Pf.

Trigonometrie.

Focke, M., u. M. Krass, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien u. anderen höheren Lehranstalten. 6. Aufl. Münster, Coppenrath'sche Buchh., Verl. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Rechnungsvorschriften f. die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme. Formeln u. Tafeln zur Berechng. der geograph. Koordinaten aus den Richtgn. u. Längen der Dreiecksseiten 2. Ordnung. Neudr. Berlin, Mittler & S. 80 Pf.

Sprecher, A. v., Hand-Tabellen f. geometrische Aufnahmen u. Berechnungen f. Sexagesimal- u. Centesimaltheilung. Chur, Hitz'sche Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Verhandlungen der vom 8. bis 17. Octbr. 1891 zu Florenz abgeh. Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Red. v. A. Hirsch. Zugleich m. den Berichten üb. die Fortschritte der Erdmessg. in den einzelnen Ländern während des letzten Jahres, u. einigen anderen Abhandlgn. Berlin, Georg Reimer. 9 Mk.

Mechanik.

Seeliger, H., üb. allgemeine Probleme der Mechanik d. Himmels. Rede. München, Franz'scher Verl. 90 Pf.

Technik.

Adressbuch der Elektrotechnik u. verwandter Zweige. Enth. die einschläg. Adressen v. Oesterreich-Ungarn u. der Schweiz, nebst Verzeichniss der Telegraphen-Verwaltgn., techn. Hochschulen, Lehr- u. Versuchs-Anstalten, sowie der elektrotechnischen Fachpresse, Vereine etc. Frankfurt a./M., A. Balck. Geb. 5 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen d. internationalen Elektrotechniker-Congresses zu Frankfurt a. M. vom 7.—12. Septbr. 1891. Nach den stenograph. Aufzeichngn. hrsg. unter Mitwirkg. der Geschäftsführer d. Congresses u. der Schriftführer der Sectionen v. der elektrotechn. Gesellschaft zu Frankfurt a. M. 1. Hälfte. Bericht üb. die Hauptversammlgn. Frankfurt a. M., J. Alt. Für das ganze Werk 12 Mk.

Bibliothek, polytechnische. I. Tl. Magdeburg, Faber'sche Buchdruckerei, Verl. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Biscan, W., elektrotechnische Vorlagen-Sammlung konstruktiver Aufnahmen aus dem gesammten Gebiete der Elektrotechnik. 2 Lfg. Blitz-Schutz-Vorrichtgn., Ausschalter, Stromschlüssel, Zentralstation in Rom, Dynamomaschine. Leipzig, Gebhardt's Verl. In Mappe. 9 Mk.

Burstyn, M., elektrotechnischer Unterricht u. Anleitung zum Betriebe elektrischer Anlagen, insbesondere auf Kriegsschiffen. Lehrbuch f. Unteroffiziere. Mit Genehmigg. d. k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums, Marine-Section, hrsg. v. der Red. der Mittheilgn. aus dem Gebiete d. Seewesens. Wien, Gerold's S. 4 Mk.

Elektrizität, die. Zeitschrift zur Förderg. der elektrotechn. Industrie. Organ d. Leipziger Elektrotechniker-Vereins u. dessen Prüfungs- u. Revisions-Anstalt. Hrsg. u. red. v. O. Umbreit. 1. Jahrg. 1892. Nr. 7. Leipzig, Otto Umbreit. Vierteljährlich 2 Mk.

Haase, F. H., elektrische Beleuchtungs-Einrichtungen. Leichtfassliche Erläuterg. der Grundprincipien derselben, Erklärg. v. Ausführgn., Beschreibg. der dabei vorkomm. Herstellungsweise u. Anleitgn. zur Beurtheilg. zweckmäss. Einrichtgn. Berlin, Siemens. Geb. 2 Mk.

Hein, C., die Einrichtung elektrischer Erleuchtungsanlagen f. Gleichstrombetrieb. Leipzig, Leiner. 8 Mk.; geb. 9 Mk.

Kajetan, J., technisches Zeichnen f. das Kunstgewerbe. II. Die Projectionslehre. 2. Afl. Wien, Graeser. 3 Mk. 60 Pf.

Müller-Bertosa, J. A., Anleitung zum Rechnen m. dem logarithmischen Rechenschieber, durch Beispiele erläutert. Zürich, Meyer & Z. 1 Mk. 80 Pf.

Wüest, C., elektrische Ausstellung in Frankfurt a. M. Bericht. Aarau, Sauerländer's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Exner, K., üb. die polarisirende Wirkung der Lichtbeugung. (2. Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Jaumann, G., Notiz üb. e. Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. Ebd 20 Pf.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. die Spectren der Elemente. 5. Abschnitt. Berlin, Georg Reimer. Kart. 5 Mk.

Mach, L., üb. e. Interferenzfactometer. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Walter, B., I. Ueber die lichtverzögernde Kraft gelöster Salzmoleküle. II. Ein Verfahren zur genaueren Bestimmung v. Brechungsexponenten. Hamburg, Gräfe & S. 1 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Arbeiten, astronomische, d. k. k. Gradmessungs-Büreau, ausgeführt unter der Leitg. von Th. v. Oppolzer. Nach dessen Tode hrsg. v. E. Weiss u. R. Schram. III. Bd. Längenbestimmungen. Leipzig, Freytag. 16 Mk.

Bauer, C., Uebersichtstafel zur Vergleichung der Tageslängen u. Sonnenstände nach mitteleurop. u. Ortszeit f. das Gebiet zwischen 7° 30′ u. 8° 30′ östl. Länge. Speyer, Kleberger'sche Buchh. 40 Pf.

Beobachtungen, deutsche überseeische meteorologische. Gesammelt u. hrsg. v. der deutschen Seewarte. 3. u. 4. Hft. Hamburg, Friederichsen & Co. 14 Mk.

Hann, J., einige Resultate stündlicher meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel d. Fuji in Japan. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Holetschek, J., üb. den Kometen d. J. 1689. Ebd. 1 Mk.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astronomie, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Unter Mitwirkg. v. Fachmännern hrsg. v. H. J. Klein. II. Jahrg. 1891. Leipzig, Ed. Heinr. Mayer. Kart. 7 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1891. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse

der meteorolog. Beobachtn. im J. 1891. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co., Verl. 3 Mk.

Liznar, J., üb. die Bestimmung der bei den Variationen d. Erdmagnetismus auftretenden ablenkenden Kraft, nebst e. Beitrage zur 11jähr. Periode d. Erdmagnetismus. (Vorläufige Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 60 Pf.

— e. neue magnetische Aufnahme Oesterreichs. (III. Vorläufiger Bericht.) Ebd. 30 Pf.

Mazelle, E., Untersuchungen üb. den täglichen u. jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Triest. Ebd. 50 Pf.

Mittheilungen, astronomische, v. der königl. Sternwarte zu Göttingen. Hrsg. v. W. Schur. 2. Thl. Göttingen, Peppmüller. 7 Mk. 50 Pf.

Monatsberichte der deutschen Seewarte. Hrsg. v. der Direction. 1891. 1.—8. Hft. Hamburg, Friederichsen & Co. à 50 Pf.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 130. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke S. Für den Band 15 Mk.

Niemeyer, J., die heissen Winde der Wüstengebiete. Meldorf, Bremer. 1 Mk. 50 Pf.

Niesel, G. v., Bahnbestimmung d. grossen Meteors vom 2. April 1891. Leipzig, Freytag. 90 Pf.

Publicationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 29. 8. Bds. 3. Stück. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Repertorium f. Meteorologie. Hrsg. v. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. XV. Bd. Nr. 1. Leipzig, Voss' Sort. 5 Mk. 65 Pf.

Sammlung populärer Schriften, hrsg, v. der Gesellschaft Urania zu Berlin, Nr. 10 u 11. Berlin, Herm. Paetel. 2 Mk.

dass. Nr. 12. Ebd. 1 Mk. 40 Pf.

Schmidt, A., theoretische Verwertung der Königsberger Bodentemperatur-Beobachtungen. Gekrönte Preisschrift. Königsberg, Koch. 2 Mk. 20 Pf.

Singer, K., Wolkentafeln. In Verbindung m. mehreren Fachmännern hrsg. München, Th. Ackermann, Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Trabert, W., der tägliche Gang der Temperatur u. d. Sonnenscheins auf dem Sonnblickgipfel. Leipzig, Freytag. 4 Mk.

Unterweger, J.. üb. die Beziehungen der Kometen u. Meteorströme zu den Erscheinungen der Sonne. Ebd. 4 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 1. Hft. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 feine lith. Tafeln nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. Jedermann. 2. Afl. 14. u. 15. Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

Wolf, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte u. Literatur. (In 2 Bdn.) 3 Halbbd. Zürich, Schulthess. 8 Mk.

Nautik.

Verzeichniss der Leuchtfeuer u. Nebelsignalstationen aller Meere. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt d. Reichs Marine-Amts. 8 Hfte. Asg. April 1892. Berlin, Mittler & S. 6 Mk.; Einbde. à 50 Pf.

Physik.

Bertram, A., physikalisches Praktikum. Berlin, Nicolai'sche Buchh. 1 Mk. 50 Mk.

Götz, H., Lehrbuch der Physik zum Gebrauche an Realschulen u. verwandten Lehranstalten. München, Franz'scher Verl. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Hoppe, E., Akkumulatoren f. Elektricität. 2. Afl. Berlin, Springer. 7 Mk.; geb. 8 Mk.

Jaumann, G., absolutes Elektrometer m. Kuppelsuspension. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 50 Pf.

Klemenčič, J., üb. e. Methode zur Bestimmung der elektromagnetischen Strahlung. Ebd. 30 Pf.

Kohlrausch, F., Leitfaden der praktischen Physik m. e. Anh. das absolute Mass-System. 7. Afl. Leipzig, Teubner. Geb. 6 Mk. 60 Pf.

Koppe, K., Anfangsgründe der Physik m. Einschluss der Chemie u. mathematischen Geographie f. den Unterricht in höheren Lehranstalten, sowie zur Selbstbelehrg. 18. Afl. v. H. Koppe. Essen, Bädeker, Verl. 4 Mk. 80 Pf.; geb. 5 Mk. 40 Pf.

Poincaré, H., Elektricität u. Optik. Vorlesungen. Red v. B. Bruhnes. Autoris. deutsche Asg. v. W. Jäger. u. E. Gumlich. 2. Bd. Die Theorie v. Ampère u. Weber. Die Theorie v. Helmholtz u. die Versuche v. Hertz. Berlin, Springer. 7 Mk.

Revue, physikalische. Hrsg. v. L. Graetz. I. Jahrg. 1892. 4. Hft. Stuttgart, Engelhorn. Vierteljährlich 8 Mk.

Sahulka, J., üb. Wechselstrom-Motoren m. magnetischem Dreh-

felde (Drehstrom-Motoren). Vortrag. Wien, Deuticke, Verl. 1 Mk. 40 Pf.

Sattler, A., Leitfaden der Physik u. Chemie m. Berücksicht. der Mineralogie. Für die oberen Klassen v. Bürgerschulen, höheren Töchterschulen u. anderen höheren Lehranstalten in 2 Kursen bearb. Braunschweig, Vieweg & S. 80 Pf.

Schwartze, Th., E. Japing u. A. Wilke, die Elektricität. Eine kurze u. verständl. Darstellg. der Grundgesetze, sowie der Anwendgn. der Elektricität zur Kraftübertragg., Beleuchtg., Galvanoplastik, Telegraphie u. Telephonie. Für Jedermann geschildert. 4. Afl., bearb. v. A. Ritter v. Urbanitzky. Wien, Hartleben. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Wallentin, J. G., Einleitung in das Studium der modernen Elektricitätslehre. Stuttgart, Enke. 12 Mk.

Winter, W., Grundriss der Mechanik u. Physik, f. Gymnasien bearb. München, Th. Ackermann, Verl. 3 Mk. 20 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften. Aus dem J. 1891. Daraus einzeln: Physikalische. Berlin, Georg Reimer. Kart. 27 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 40. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Für den Band 20 Mk.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. v. J. Fröhlich. 9. Bd. Octbr. 1890 — Octbr. 1891. 2. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1892. I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Burckhardt, W., mathematische Unterrichts-Briefe. Für das Selbst-Studium Erwachsener. Mit besond. Berücksicht. der angewandten Mathematik bearb. 2. Afl. I. Kurs. (Brief 1 — 26. — Lektion 1—51.) Gera, Griesbach's Verl. In Mappe u. Futteral 15 Mk. 60 Pf.

Mittheilungen aus dem Markscheiderwesen. Vereinsschrift d. rheinisch-westfäl. Markscheider-Vereins. Hrsg. v. H. Werneke. 6. Hft. Freiberg, Craz & G. 3 Mk.

Mittheilungen d. mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg, hrsg. v. O. Böklen. 5. Bd. 2 Hfte. (1. Hft.) Stuttgart, Metzler'sche Buch., Verl. Für den Band 3 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche. Abth. II. a. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 100. Bd. 8. — 10. Hft. Leipzig, Freytag. 8 Mk. 90 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1891. 3. Hft. u. 1892. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. à 1 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. unter der Red. v. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 37. Jahrg. 1892. (6 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Jährlich 18 Mk.

Zeitschrift f. mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht. Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 23. Jahrg. 1892. (8 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Jährlich 12 Mk.

g. 2.

de

Ki

Taf. VIII.

e

R

m Kegel.

nie.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Zwölfter Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1894.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Zwölfter Teil. Zweites Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1893.

Bereits eingeführt

an der **Thomasschule** in **Leipzig**, an den Gymnasien zu **Bautzen, Chemnitz, Eisenberg, Gotha, Rostock**, an den Realgymnasien zu **Zittau, Gotha, Rostock, Augsburg**, an der höh. Handelsschule in **Gotha**, an der Vorbereitungsschule zu **Neu Schönsee**, an den Landwirtschaftsschulen zu **Dahme** (Mark) u. **Marienburg**, in Gebrauch in Ratibor, Troppau, Wohlau, Leobschütz, Oldenburg etc. ist das

Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra,

enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine grosse Anzahl von Fragen und Aufgaben. Für höhere Lehranstalten bearbeitet von

Dr. E. Wrobel,

I. Lehrer d. Math. am Gymn. zu Rostock.

Den neuen Lehrplänen angepasst!

I. Teil: Pensum der Tertia und Unter - II. 2. Aufl. 1892. 2,60 M. (enthält auch Quadrat. Gleichungen mit Ueb.)

II. Teil: Pensum d. Ober - II. u. Prima d. Gymnasii. 1891. 1,40 M.

II. Teil mit Anhang: Pensum d. Ober - II u. Prima höherer realistischer Lehranstalten. 1892. 2,20 M. **Anhang apart** für Oberprima 0,80 M.

Die **Resultatreste** (zu I. 1 M., II. 1,25 M., zum Anhang 0,60 M.) werden nur an Lehrer direkt abgegeben. Prospekt gratis.

☛ „Ich habe Wrobels Übungsbuch sowohl in Privat- als auch im öffentlichen Unterricht erprobt und in jeder Hinsicht als vorzüglich geeignet befunden. Schwachbegabten Schülern ist diese Aufgabensammlung geradezu unentbehrlich". Prof. Dr. Sch. in Tr.

Rostock. **Wilh. Werther's Verlag.**

P. von Zech

Aufgaben aus der theoretischen Mechanik

nebst **Auflösungen**, mit 175 Figuren im Text.
Zweite Auflage unter Mithilfe von
Dr. C. Cranz.
Preis M. 4.20.

„Zechs Mechanik" ist der guten Auswahl ihrer aus dem Leben gegriffenen Aufgaben wegen längst vorteilhaft bekannt und weitverbreitet, und wird in der neuen, mit Figuren und Auflösungen versehenen Auflage gewiss noch weitere Freunde gewinnen.

J. B. Metzlerscher Verlag in **Stuttgart.**

Lager-Catalog No. 59:

Mathematik-Astronomie

(viele wertvolle wissenschaftliche Werke enthaltend)
soeben erschienen und gratis von
Anheisser's Antiquariat, Stuttgart.

Inhalts-Verzeichniss

des zwölften Teils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
IV.	Ableitungen arithmetischer Reihen. Von Franz Rogel	I	37
XIX.	Die Gauss'sche Darstellung complexer Zahlen im geometrischen Lichte. Von Adalbert Breuer.	IV	337
XXI.	Ueber eine Analogie des Laplace'schen Determinantensatzes. Von Ernst Liers	IV	352
XXVI.	Zur Zahlentheorie. Art. II. Von G. Speckmann	IV	431
XXVII.	Ueber die Factoren der Zahlen. Von G. Speckmann	IV	435
XXVIII.	Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. Von G. Speckmann	IV	439
XXIX.	Zur Zahlentheorie. Art. III. Von G. Speckmann	IV	445
	Integralrechnung.		
I.	Neues Verfahren der Fourierschen Entwickelung der doppelperiodischen Functionen. Von G. Mohrmann	I	1

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
VIII.	Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen zweiter Art. Von Ulrich Bigler . . .	II	113
XIV.	Fortsetzung	III	225
XIII.	Ueber die Transformation eines Integrals. Von T. Brodén	II	223

Geometrie der Ebene.

III.	Geometrische Oerter bei Curvensystemen. Von H. Ekama	I	23
XI.	Teilung eines beliebigen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile mit Hülfe von Modellen. Von Arthur Strauss	II	177
XVI.	Ueber eine neue Construction der Lemniskate. Von Ernst Schultz	III	318
XXIII.	Ueber geradlinige Asymptoten algebraischer Curven. Von A. Himstedt	IV	357
XXIV.	Ueber die Trisection des Winkels mittelst beliebiger fester Kegelschnitte Von Stefan Glaser.	IV	367
XXV.	Analytische Entwickelung von Gleichungen über drei in demselben Punkte sich schneidende Transversalen eines Dreiecks. Von Josef Kiechl . .	IV	411
XXIX.	Projective Lösung einer geometrischen Aufgabe. Von Wilhelm Rulf	IV.	442
XXIX.	Beliebig weit angenäherte π-Construction. Von J. E. Böttcher	IV	444
XXIX.	Das Dreieck bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen. Von R. Hoppe	IV	547

Geometrie des Raumes.

II.	Ueber einige Sätze aus der elementaren Raumgeometrie. Von Heinrich Seipp	I	16
VI.	Osculirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n Dimensionen. Von R. Hoppe	I	96
VII.	Eine räumliche Betrachtung der Dreieckspunkte. Von Franz Chladek	I	109

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
IX.	Zur Complanation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Coordinaten. Von Ferd. Jos. Obenrauch	II	155
X.	Osculirende Parabel. Von R. Hoppe	II	168
XII.	Ueber das Problem eine Fläche zweiten Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden. Von M. Krewer .	II	185
XIII.	Aufgabe. Von Leman	II	224
XVII.	Gleichseitiges Tetraeder. Von R. Hoppe . . .	III	327
XVIII.	Beweis des Satzes von Leman Von F. W. Fischer	III	335
XX.	Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders. Von Ernst Liers	IV	344
XXII.	Ueber eine Schar von Curven auf einer Tangentenfläche. Von R. Hoppe	IV	354

Mechanik.

VII.	Ueber gewisse Gleichungen und Constanten der mechanischen Quadratur und der Mechanik ebener Figuren. Von Rudolf Skutsch	I	111

Erd- und Himmelskunde.

XV.	Zur Mechanik der atmosphärischen Bewegungen. Von Emil Oekinghaus	III	274

Physik.

V	Ueber die durch dielektrische und magnetische Polarisation hervorgerufenen Volum- und Formänderungen. Von F. Pockels	I	57

Litterarische Berichte.

XLV. M. Cantor (Gesch. d. Math. II.) Weissenborn (Gerbert). Netoliczka (Gesch. d. Phys.) Gerlach (Gesch. d. Phys.)

Rudio (Anteil d. Math. an d. Cult.). H. Weber (W. Weber). Fel. Müller (Schellbach). Laisant (Aufg.). Schwering (Aufg.) Reidt (plan. Aufg.) Madel (Drksaufg) Geerling (Rechenb.) Roese (Aufg.) Zech (Aufg. aus Mech.) Fliedner (Aufg. aus Ph. — Lös.) Wrobel (Ueb. Ar. Alg. — Res.) Jüdt (Aufg. aus Ster. u. Trig.)

XLVI. W. Neumann (Ar. u. Alg.) Moreira (ar.) Sickenberger (Ar. — Alg.) Recknagel (eb. G.) Zetzsche (eb. u. räuml. G.) E. Fischer (Geom.) Seeger (Geom.) Bensemann (eb. G.). Glinzer (Geom.) Lieber u. Lühmann (Trig. u. Ster.) Hribar (eb. Trig.) Jentzen (eb. Trig.) Nagel (Ster.) Martus (Rauml. II. Trig. Ster.) Lange (Kegschn.)

XLVII. Obenrauch (Integr.). Krug (Diffgl. 3. O.) Saalschütz (bern. Z.) Breuer (Log. u. gon. Fct Complex.) Scheffler (qudr. Zerf. Primz.) Haentzschl (Potentialgl.) Tannery u. Molk (ell. Fct.) Picard (Fct. Compl.) Breuer (Apoll. Probl. in imag. Kegschn. — Konogr.) d'Ocagne (pt. le pl. prob.) Stahl (Flächth.) Suhle (imag, P.) Kraft (geom. Calc.) Reye (Geom. d. Lage II. III.)

XLVIII. Michelsen (Gl. 1, biz 4. Gr.) Olbricht (Rechenreg.) Hercher (anal. G. — Geom.) Leonhard (Trig. — Ster.) Hauck (Ster.) Sellentin (Geom.) Schwering (Ar. Trig.)

Berichtigungen

im 11. Teile:

Seite	117	Zeile	15 v. u.	statt	den den	setze	den
	123		12 v. o.	„	F	„	7
	„		10, 8, 7 v. u.	„	ξ	„	ζ
	124		11 v. o.	„	Punkt	„	Punkt 4
	„		12 „	streiche 4 vor der Klammer			
	129		12 „	statt III		setze V	
	„		11 v. u.	„	von	„	von CB“
	„		10 „	streiche CB“ vor der Klammer			
	„		9 „	am Ende der Zeile setze ein Komma.			

I.

Neues Verfahren der Fourierschen Entwickelung der doppelperiodischen Functionen.

Von

Herrn Dr. G. Mohrmann

in Friedland.

Mit den Fourierschen Entwicklungen der doppelperiodischen Functionen dritter Art hat Herr Krause und eine Anzahl seiner Schüler sich eingehend beschäftigt. Die Hauptresultate dieser Untersuchungen finden sich in einer Reihe von Abhandlungen in den „Mathem. Annalen" niedergelegt [1]). Wenn der Verfasser dieses, gleichfalls ein Schüler des Herrn Prof. Krause, hier noch einmal auf das Problem zurückkommt, so geschieht es, um zu zeigen, dass die Rnsultate, welche bereits gefunden sind, auch auf einem anderen Wege gefunden werden können. U. z. dürfte dieser Weg sich besonders deshalb empfehlen, weil die Entwicklung der Reihen so nur die Hälfte der Rechnungen erfordert, welche in den erwähnten Arbeiten nötig sind. Nämlich in den Arbeiten des Herrn Krause wird das ganze Problem zurückgeführt auf die Behandlung zweier Functionen, nämlich der Functionen

$$\text{(1a)} \qquad \frac{\vartheta_0(mv+ma,\ m\tau)}{\vartheta_0(v)} \quad \text{und}$$

$$\text{(1b)} \qquad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\,\vartheta_0(mv,\ m\tau)}$$

1) Vgl. „Mathem. Annalen" Band 30, pag. 425 ff. und pag. 516 ff.; Band 32, pag. 331 ff.; Band 33, pag. 108 ff.; Band 35, pag. 577 ff.

Jede dieser Primfunctionen wird nun für sich, die eine ganz unabhängig von der anderen, in eine trigonometrische Reihe entwickelt. Es soll jetzt im folgenden gezeigt werden, dass bei Zugrundelegung zweier andern Primfunctionen die Doppelarbeit nicht nötig ist, sondern dass die für die eine Function gefundenen Resultate durch ein einfaches Verfahren direct auf die zweite übertragen werden können, dass also „die trigonometrischen Entwickelungen aller doppel-„periodischen Functionen dritter Art auf die Betrachtung einer „einzigen Primfunction zurückgeführt werden können." Diese letztere Primfunction in mannigfaltigst möglicher Weise zu entwickeln, wird nicht unwichtig sein mit Rücksicht auf die mannigfachen Formen, in denen die trigonometrischen Reihen unserer Functionen in praxi gebraucht werden, z. B. bei zahlentheoretischen Untersuchungen.

I. Ableitung der Primfunctionen.

Es müssen hier einige Bemerkungen über doppelperiodische Functionen zweiter Art vorausgeschickt werden. Eine jede solche Function kann bekanntlich dargestellt werden in der Form

$$(2)\quad F(z) = \frac{\vartheta_0(z-\alpha_1)\,\vartheta_0(z-\alpha_2)\,.\,.\,.\,\vartheta_0(z-\alpha_m)}{\vartheta_0(z-\beta_1)\,\vartheta_0(z-\beta_2)\,.\,.\,.\,\vartheta_0(z-\beta_m)}$$

Man erweitere jetzt diesen Bruch mit der Grösse

$$\prod_{\sigma=1}^{m}\vartheta_0\left(z-\frac{1}{\lambda}-\beta_\sigma\right).\vartheta_0\left(z-\frac{2}{\lambda}-\beta_\sigma\right).\,.\,.\,\vartheta_0\left(z-\frac{\lambda-1}{\lambda}-\beta_\sigma\right)$$

wobei λ eine ganz beliebige ganze Zahl bedeutet.

Dann wird der Nenner von $F(z)$ die Gestalt annehmen:

$$k^m\,.\,\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_1,\lambda\tau)\,.\,\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_2,\lambda\tau)\,.\,.\,.\,\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_m,\lambda\tau)$$

wo k jene Constante bedeutet, die in der Formel

$$\vartheta_0(z-\beta_\sigma)\,.\,\vartheta_0\left(z-\frac{1}{\lambda}-\beta_\sigma\right).\,.\,.\,\vartheta_0\left(z-\frac{\lambda-1}{\lambda}-\beta_\sigma\right) = k\,.\,\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_{\sigma_2},\lambda\tau)$$

auftritt. Der Zähler von $F(z)$ hat durch die vorgenommene Operation die Gestalt angenommen

$$\prod_{\sigma=1}^{m}\vartheta_0(z-\alpha_\sigma)\,.\,\vartheta_0\left(z-\frac{1}{\lambda}-\beta_\sigma\right).\,.\,.\,\vartheta_0\left(z-\frac{\lambda-1}{\lambda}-\beta_\sigma\right)$$

Aber jedes einzelne Teilproduct, welches unter dem Zeichen Π vorkommt, ist eine ganze Thetafunction vom Grade λ und kann mit leichter Mühe verwandelt werden in

$$\sum_{k=0}^{\lambda-1} c_k^{(\sigma)} \cdot e^{-2\pi i k s} \cdot \vartheta_0(\lambda z + \lambda a_\sigma - k\tau, \lambda\tau)$$

wobei a_σ eine aus den Grössen α_σ und β_σ linear zusammengesetzte Grösse ist und die Bestimmung der $c_k^{(\sigma)}$ sich mit leichtester Mühe bewerkstelligen lässt[1]). Jedenfalls ergiebt sich aus dem bisherigen ohne weiteres, dass die Function $F(z)$, von unwesentlichen Factoren abgesehen gleichwertig ist einer Summe von $m \cdot \lambda$ Functionen $\varphi(z)$ von der Form

$$\varphi(z) = \frac{\vartheta_0(\lambda z + \lambda A_1, \lambda\tau) \cdot \vartheta_0(\lambda z + \lambda A_2, \lambda\tau) \cdot \ldots \vartheta_0(\lambda z + \lambda A_m, \lambda\tau)}{k^m \vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_1, \lambda\tau) \cdot \vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_2, \lambda\tau) \cdot \ldots \vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_m, \lambda\tau)}$$

wo die A leicht zu bestimmende Constante sind. Andererseits aber kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass eine Function $\varphi(z)$, wie schon Hermite gefunden hat, unter der Voraussetzung, dass alle β im Nenner von einander verschieden sind, sich durch eine Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sigma\, C_\alpha \frac{\vartheta_0(\lambda z - \lambda B_\sigma, \lambda\tau)}{\vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_\sigma, \lambda\tau)}$$

darstellen lässt, wobei die C_σ und B_σ in einfachster Weise zu bestimmen sind. Hiermit ergiebt sich folgendes Schlussresultat:

„Die Function $F(z)$ in (2) kann, von unwesentlichen Factoren „wiederum abgesehen, durch eine Summe von Functionen

$$\frac{\vartheta_0(\lambda z - \lambda B_\sigma, \lambda\tau)}{\vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_\sigma, \lambda\tau)} \cdot \ldots \tag{3}$$

„dargestellt werden."

Wie die Bestimmung der Factoren, mit denen die einzelnen Summanden (3) behaftet sind, sich am praktischsten ausführen lässt, und wie die Anzahl der Summanden (3) durch Zusammenfassung einzelner sich verringern lässt, sind Fragen, die von Interesse sind, weil sie über die praktische Anwendbarkeit der unten folgenden Methode entscheiden. Aber über den Rahmen dieser Arbeit würde die ausführliche Beantwortung dieser Fragen hinausgehen.

---

1) Vergl. „Math. Annalen" XXX, pag. 518.

Wenden wir uns jetzt den doppelperiodischen Functionen dritter Art zu, so können die sämtlichen Functionen dieser Art bekanntlich als Quotienten zweier Producte von Thetafunctionen dargestellt werden [1]), haben also die Form: (von einem unwesentlichen Factor abgesehen)

$$(4) \quad F(z) = \frac{\vartheta_0(z-\alpha_1)\,\vartheta_0(z-\alpha_2)\,\ldots\,\vartheta_0(z-\alpha_p)}{\vartheta_0(z-\beta_1)\,\vartheta_0(z-\beta_2)\,\ldots\,\vartheta_0(z-\beta_{p+\mu})}$$

wobei $\mu \gtrless 0$ sein kann, d. h., wo die Zahl der Nullstellen in einem Periodenparallelogramm $\gtrless$ die Zahl der Pole sein kann. Es soll ferner, wie in den Krause'schen Arbeiten, noch angenommen werden, dass die β im Nenner von $F(z)$ sämtlich von einander verschieden sind, indem für den entgegengesetzten Fall auf eine Arbeit des Herrn Appell [2]) verwiesen wird.

1) $\mu > 0$, oder $\mu = m$,

wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet.

Es werde statt der in Rede stehenden Function $F(z)$ die Function

$$\psi(z) = F(z)\,.\,\vartheta_0(mz - m\beta,\ m\tau)$$

betrachtet, wo β eine ganz beliebig gewählte Constante bedeutet. Die Function $\psi(z)$ ist, wie man ohne weiteres einsieht, eine doppelperiodische Function zweiter Art, kann also nach dem obigen, wenn die beliebige Zahl $\lambda = m$ angenommen wird, ersetzt werden durch eine Reihe von Summanden von der Form

$$C_\sigma \cdot \frac{\vartheta_0(mz - mB_\sigma,\ m\tau)}{\vartheta_0(mz - m\beta_\sigma,\ m\tau)}$$

Hieraus folgt, dass die Function $F(z)$ linear in eine Summe von Primfunctionen zerlegt werden kann von der Form

$$\frac{\vartheta_0(mz - mB_\sigma,\ m\tau)}{\vartheta_0(mz - m\beta_\sigma,\ m\tau)\,.\,\vartheta_0(mz - m\beta,\ m\tau)}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft: In dem Falle $\mu > 0$ kann unser ganzes Problem darauf reducirt werden, die Function

---

1) Vgl. z. B. Appell „Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce." Annales de l'Ecole Norm. Supér. IIIème série, tomes I. II, oder die Doctordissertation des Verfassers, Rostock 1889, pag. 10.

2) Vgl. Appell a. a. O.

$$(5a) \qquad P_1(z) = \frac{\vartheta_0(z-a)}{\vartheta_0(z-b)\,.\,\vartheta_0(z)}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Daher soll die Function $P_1(z)$ die erste Primfunction genannt werden.

2) $\mu < 0$, oder $\mu = -m$.

In diesem Falle möge statt der Function $F(z)$ in (4) die Function

$$F(z)\,.\,\frac{1}{\vartheta_0(mz-m\beta,\ m\tau)}$$

betrachtet werden. Dieselbe ist wieder eine doppelperiodische Function zweiter Art. Ebenso, wie vorhin, ergiebt sich, dass $F(z)$ in eine Summe von Functionen zerlegt werden kann von der Gestalt

$$\frac{\vartheta_0(mz-m\,B_\sigma,\ m\tau)\,.\,\vartheta_0(mz-m\beta,\ m\tau)}{\vartheta_0(mz-m\beta_\sigma,\ m\tau)}$$

Hieraus folgt leicht, dass als zweite Primfunction die Function

$$(5b) \qquad P_2(z) = \frac{\vartheta_0(z-a)\,.\,\vartheta_0(z-b)}{\vartheta_0(z)}$$

angesehen werden kann. Es soll jetzt von den beiden Primfunctionen in (5a) und (5b), die etwas einfacher sind, als die in (1a) und (1b) angegebenen Krause'schen, zuerst die Function $P_1(z)$ behandelt werden und dann gezeigt werden, dass die Entwickelung von $P_2(z)$ sich auf diejenige von $P_1(z)$ zurückführen lässt.

II. Erste trigonometrische Entwickelung von $P_1(z)$.

Weil die Function $P_1(z)$ nur ein Specialfall der Krause'schen Primfunction (1b) ist, so müssen natürlich alle Resultate, die Herr Krause für seine Primfunction gefunden hat [1]), auf $P_1(z)$ sich durch Specialisirung ohne weiteres übertragen lassen. Es soll hier die trigonometrische Entwickelung von $P_1(z)$ nach einer Methode gegeben werden, die sich in den Krause'schen Arbeiten noch nicht findet. Diese Methode beruht auf den Untersuchungen von Herrn Appell am mehrfach angegebenen Orte, dürfte sich aber vor jenen Untersuchungen durch grössere Allgemeinheit auszeichnen.

In der Ebene einer Variablen x denke man sich ein Paralle-

1) Vgl. „Math. Annalen" XXXV, pag. 577 ff.

logramm construirt auf folgende Weise: Man ziehe die Linie $(0, \tau)$, [wobei τ, wie schon vorhin, nach Jacobischer Bezeichnung den Parameter der Thetafunctionen bedeutet] und zu dieser Linie zwei Parallele durch die Punkte $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$; ferner ziehe man durch die Punkte $+n\tau$ und $-n\tau$ (n eine ganze Zahl) Parallele zur reellen Axe der x-Ebene. z möge jetzt ein ganz beliebiger, aber fester Punkt im Innern des eben definirten Parallelogramms sein, während x_0 einen beliebigen, aber festen Punkt der Linie $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ bezeichnen möge. Endlich möge noch angenommen werden, worin eine wesentliche Beschränkung nicht besteht, dass auf den durch $-nt$ und $+n\tau$ gezogenen Parallelen ein singulärer Punkt von $P_1(z-x)$ nicht liegt. Nach diesen Festsetzungen bilde man sich jetzt eine Function $R(x)$, die folgende Eigentümlichkeiten besitzt:

1) $R(x+1) = R(x)$.

2) $x = 0$ sei für $R(x)$ eine ausserwesentliche Singularität erster Ordnung, R_0 sei das Residuum von $R(x)$ für $x = 0$.

3) Ausser $x = 0$ habe $R(x)$ im Innern unseres Parallelogrammes keinen weiteren singulären Punkt.

4) $R(x_0 \pm n\tau)$ möge, wenn n über alle Grenzen hinaus wächst dem absoluten Betrage nach immer unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, oder es möge doch wenigstens

$$e^{2n\pi i(a-b+z-x_0)} \cdot q^{n^2} \cdot R(x_0 \pm n\tau)$$

mit wachsendem n unendlich klein werden.

Nach erfolgter Auswahl einer solchen Function $R(x)$ bilde man

$$\int P_1(z-x) \cdot R(x) \cdot dx \tag{6}$$

erstreckt über den Umfang unseres Parallelogramms. Da $P_1(z-x) \cdot R(x)$, wie sofort zu ersehen, die Periode 1 hat, so werden sich die Integrale längs der beiden Seiten $(-\frac{1}{2} - n\tau, -\frac{1}{2} + n\tau)$ und $(+\frac{1}{2} - n\tau, +\frac{1}{2} + n\tau)$ gegenseitig fortheben. Ferner wird die Function $P_1(z-x) \cdot R(x)$ in dem Punkte $x_0 - n\tau$ den Wert annehmen

$$\frac{\vartheta_0(z - x_0 + n\tau - a)}{\vartheta_0(z - x_0 + n\tau - b) \cdot \vartheta_0(z - x_0 + n\tau)} \cdot R(x_0 - n\tau) \tag{7}$$

$$= \frac{(-1)^n}{i} \cdot e^{2n\pi i(a-b+z-x_0)} \cdot q^{n^2} \cdot P_1(z - x_0) \cdot R(x_0 - n\tau)$$

Aber dieser Ausdruck wird vermöge der vierten Voraussetzung über $R(x)$ mit wachsendem n dem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig kleine Grösse gemacht werden können. Da der Ausdruck (7) aber nichts anderes ist, als ein Element des Integrals (6) längs der Seite $(-\frac{1}{2}-n\tau, +\frac{1}{2}-n\tau)$, so folgt, dass mit unendlich grossem n das Integral längs dieser Seite unendlich klein wird. Ganz dasselbe gilt von der Seite $(-\frac{1}{2}+n\tau, +\frac{1}{2}+n\tau)$. Es ergiebt sich, dass das ganze Integral (6) mit unendlich grossem n sich der Null beliebig nähert.

Dasselbe Integral ist aber auch gleich $2\pi i$mal der Summe der Residuen von $P_1(z-x)$. $R(x)$ in Bezug auf alle Pole im Innern des Parallelogramms. Also muss die Summe dieser Residuen auch gleich null sein. Wir haben nun folgende Pole zu betrachten:

1) $x = 0$. Das Residuum von $R(x)$ ist hier R_0, also das gesamte Residuum

$$R_0 \cdot P_1(z) \tag{8}$$

2) $x = z-(n+\frac{1}{2})\tau \qquad [n = -\infty \ldots +\infty]$

Das Residuum von $P_1(z-x)$ in Bezug auf diesen Punkt wird

$$-\frac{\vartheta_0(-a+(n+\frac{1}{2})\tau)}{\vartheta_0(-b+(n+\frac{1}{2})\tau)\cdot i\cdot(-1)^n\cdot q^{-(n+\frac{1}{2})^2}\cdot\vartheta_1'}$$

$$= i(-1)^n\cdot e^{(2n+1)\pi i(a-b)}\cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1(b)\cdot\vartheta_1'} \tag{9}$$

Also wird das Residuum von $P_1(z-x)\cdot R(x)$:

$$\frac{i\cdot(-1)^n\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'\cdot\vartheta_1(b)}\cdot e^{(2n+1)\pi i(a-b)}\cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cdot R(z-(n+\tfrac{1}{2})\tau) \tag{10}$$

3) $x = z-b-(n+\frac{1}{2})\tau \qquad [n = -\infty \ldots +\infty]$

In Bezug auf diesen Pol wird das Residuum von $P_1(z-x)$

$$-\frac{\vartheta_0(b-a+(n+\frac{1}{2})\tau)}{i(-1)^n q^{-(n+\frac{1}{2})^2}\vartheta_1'\cdot\vartheta_0(b+(n+\frac{1}{2})\tau)}$$

$$=\frac{i(-1)^{n-1}\vartheta_1(a-b)\cdot e^{(2n+1)a\pi i}\cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2}}{\vartheta_1'\cdot\vartheta_1(b)} \tag{11}$$

Also wird das Residuum von $P_1(z-x)\cdot R(x)$

$$\frac{i(-1)^{n-1}}{\vartheta_1'}\cdot\frac{\vartheta_1(a-b)}{\vartheta_1(b)}\cdot e^{(2n+1)a\pi i}\cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cdot R(z-b-(n+\tfrac{1}{2})\tau) \tag{12}$$

Indem jetzt die Summe der Ausdrücke (8), (10), (12) gleich 0 gesetzt wird, ergiebt sich das Resultat

$$-R_0 \cdot P_1(z) = \frac{i}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(b)} \cdot$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vartheta_1(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{(2n-1)\pi i(a-b)} \cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cdot R(z-(n+\frac{1}{2})\tau) \\ + \vartheta_1(a-b) \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot e^{(2n+1)\pi i a} \cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cdot \\ \qquad \cdot R(z-b-(n+\frac{1}{2})\tau) \end{array}\right\} \quad (13)$$

Hiermit wäre eine trigonometrische Entwickelung für die Function $P_1(z)$ gefunden, wenn es gelingen sollte, wirklich trigonometrische Functionen $R(x)$ aufzufinden, die den oben angegebenen Bedingungen genügen. Man sieht aber leicht, dass eine ganze Reihe von Functionen den Bedingungen genügt, z. B. die Functionen

$$\frac{1}{1-e^{2\pi ix}}, \quad \frac{e^{3\pi ix}}{1-e^{2\pi ix}}, \quad \frac{e^{2\pi ix}}{1-e^{2\pi ix}} \quad \text{u. s. w.}$$

Um z. B. mit den Resultaten des Herrn Krause in Uebereinstimmung zu kommen [1]), wähle man

$$R(x) = \frac{e^{2\pi ix}}{1-e^{2\pi ix}}; \quad R_0 = \frac{1}{-2\pi i}$$

Zugleich aber sieht man, dass die eingeführte Function $R(x)$ nichts anders ist, als das Functionselement, aus dem die sogenannten „Restfunctionen“ [2]) des Herrn Krause sich in einfacher Weise herleiten lassen. Endlich lehren die obigen Betrachtungen, dass es auf die mannigfachste Weise möglich ist, eine Function $R(x)$ zu wählen, also auch trigonometrische Entwickelungen von $P_1(z)$ zu geben.

III. Zweite trigonometrische Entwickelung von $P_1(z)$.

Man weiss aus der Theorie der bestimmten Integrale, dass man ansetzen darf:

---

1) Vgl. „Mathem. Annalen“ XXXV, pag. 378 ff.

2) Vgl. „Mathem. Annalen“ XXX, pag. 520, § 2.

$$P_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{2n} \cdot e^{2n\pi i z}$$

wo dann

$$b_{2n} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

ist. Letzteres Integral wird folgendermassen gelöst: Man bilde das Integral

$$\int P_1(z) e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

erstreckt über den Umfang des Parallelogramms

$$(-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2} - r\tau, -\tfrac{1}{2} - r\tau)$$

Das Integral längs der Seite $(+\frac{1}{2} - r\tau, -\frac{1}{2} - r\tau)$ geht durch die Substitution $z - r\tau$ an Stelle von z über in

$$\int_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} q^{2nr} \cdot P_1(z - r\tau) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

$$- \int_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^r}{i} \cdot e^{-2r\pi i(a+z-b)} \cdot q^{r^2+2nr} \cdot P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

D. h. die Function unter dem Integralzeichen wird mit wachsendem r dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden können. Es folgt genau, wie oben, dass das ganze Integral

$$\int P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

für $r = \infty$ den Wert

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

annimmt, also gleich b_{2n} wird. Andererseits aber ist dasselbe Integral gleich der Summe der Residuen von $P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z}$, multiplicirt mit $-2\pi i$ (das Minuszeichen wegen der Richtung, in der die

Kreisintegrale um die Pole zu nehmen sind). Nun sind die Residuen von $P_1(z)$ bereits bekannt. Vgl. die Ausdrücke (9) und (11). Folglich wird das geschlossene Integral

$$\int P_1(z) \cdot e^{-2n\pi iz}\, dz$$

um den Pol

$$z = -(r + \tfrac{1}{2})\tau$$

$$(14) \quad 2\pi \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1' \vartheta_1(b)} (-1)^r \cdot e^{-(2r+1)(a-b)\pi i} \cdot q^{(r+\frac{1}{2})^2} \cdot q^{(2r+1)n}$$

Für den Pol

$$z = b - (r + \tfrac{1}{2})\tau$$

wird unser Integral genau so gefunden, und zwar

$$(15) \quad 2\pi \frac{\vartheta_1(b-a)}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(b)} \cdot (-1)^r \cdot e^{-(2r+1)a\pi i} \cdot q^{(r+\frac{1}{2})^2} \cdot q^{(2r+1)n} \cdot e^{-2n\pi ib}$$

Indem man über die Ausdrücke (14) und (15) die Summe nach r von 0 bis $+\infty$ nimmt, erhält man die gesuchte Formel für unsere Coefficienten:

$$(16) \quad b_{2n} = \frac{2\pi}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(b)} \cdot$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1(a) \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r e^{-(2r+1)(a-b)\pi i} \cdot q^{(r+\frac{1}{2})^2 + (2r+1)n} \\ \\ + \vartheta_1(b-a) \sum_{0}^{\infty} (-1)^r \cdot e^{-(2r+1)a\pi i} \cdot q^{(r+\frac{1}{2})^2 + (2r+1)n} \cdot e^{-2n\pi ib} \end{array} \right\}$$

Für $b = \frac{1}{2}$ ergiebt sich hieraus genau dieselbe Formel, die Herr Krause gefunden hat [1]).

Es ist übrigens leicht zu zeigen, dass die so gefundene trigonometrische Entwickeluug auf die obige in (13) gefundene ohne Mühe zurückgeführt werden kann.

---

1) Vgl. „Mathem. Annalen" XXXV, pag. 585, Formel (7), worin sich jedoch ein Druckfehler findet, indem rechts vom Gleichheitszeichen $\frac{2i}{m\,\vartheta_1'}$ statt $2i$ zu setzen ist.

IV. Trigonometrische Entwickelung von $P_2(z)$.

Indem man in (13) die Function

$$R(x) = \frac{e^{2\pi i x}}{1 - e^{2\pi i x}}, \quad \text{also} \quad R_0 = -\frac{1}{2\pi i}$$

annimmt, erhält man folgende Formel, wenn noch beide Seiten der Gleichung mit $\vartheta_1(b)$ multiplicirt werden:

$$(17)\quad \frac{\vartheta_0(z-a)\,.\,\vartheta_1(b)}{\vartheta_0(z-b)\,.\,\vartheta_0(z)} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'}\,.$$
$$\left\{\begin{array}{l} \vartheta_1(a)\,.\,\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,(-1)^n\,.\,\dfrac{e^{(2n+1)\pi i(a-b)}\,.\,q^{(n+\frac{1}{2})^2}\,.\,e^{2\pi i z}}{q^{2n+1}-e^{2\pi i z}} \\ \\ +\vartheta_1(b-a)\,.\,\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,(-1)^n\,.\,\dfrac{e^{(2n+1)\pi i a}\,.\,q^{(n+\frac{1}{2})^2}\,.\,e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i b}\,.\,q^{2n+1}-e^{2\pi i z}} \end{array}\right\}$$

Wenn in dieser Formel die Constante $b = z - \beta$ angenommen wird, was ohne weiteres erlaubt ist, und wenn ferner der Symmetrie wegen für a noch α geschrieben wird, so erhält man folgende Formel:

$$(18)\quad \frac{\vartheta_0(z-\alpha)\,.\,\vartheta_1(z-\beta)}{\vartheta_0(\beta)\,.\,\vartheta_0(z)} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'}\,.$$
$$\left\{\begin{array}{l} \vartheta_1(\alpha)\,.\,\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,(-1)^n\,.\,\dfrac{e^{(2n+1)\pi i(\alpha+\beta)}\,.\,q^{(n+\frac{1}{2})^2}\,.\,e^{-(2n-1)\pi i z}}{q^{2n+1}-e^{2\pi i z}} \\ \\ +\vartheta_1(z-\alpha-\beta)\,\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,(-1)^n\,.\,\dfrac{e^{(2n+1)\pi i\alpha}\,.\,q^{(n+\frac{1}{2})^2}}{e^{-2\pi i\beta}\,.\,q^{2n+1}-1} \end{array}\right\}$$

Aber aus dieser Gleichung wird sich unmittelbar die Entwicklung von $P_2(z)$ ergeben, wenn man nur $b - \frac{\tau}{2}$ an Stelle von β setzt. Das Resultat wirklich hierherzusetzen, ist wenig von Interesse. Hiermit ist denn auch die Entwickelung von $P_2(z)$ gefunden, u. zw. ohne dass irgend welche neuen Rechnungen nötig gewesen wären. Zugleich aber zeigt die Formel (18), dass die zweite $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n$ einen von z ganz unabhängigen Wert hat, also eine Constante ist, wie es nach den Untersuchungen von Herrn Krause auch der Fall sein muss. Nach dieser Methode haben wir aber für diese Constante gleich eine Darstellung und zwar die Form

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^{(2n+1)\pi i\alpha} \cdot q^{(2n+1)^2}}{e^{-2\pi i\beta} \cdot q^{2n+1} - 1}$$

gefunden, während bei Herrn Krause die Bestimmung der Constante noch eine neue Rechnung erfordert.

Es verdient übrigens noch bemerkt zu werden, dass man bei Zugrundelegung der Formel (16) für die Coefficienten der trigonometrischen Entwicklung von $P_1(z)$ zu einer andern, wenigstens der Form nach von Gleichung (18) verschiedenen trigonometrischen Entwicklung von

$$\frac{\vartheta_0(z-\alpha) \cdot \vartheta_1(z-\beta)}{\vartheta_0(\beta)\,\vartheta_0(z)}$$

gekommen wäre, die sich jedoch sehr leicht auf die Form in (18) zurückführen lässt.

V. Schlussbemerkung, betreffend die doppelperiodischen Functionen zweiter und erster Art.

Es kann nicht verhehlt werden, dass die Zugrundelegung der beiden Primfunctionen (4a) und (1b), möge sie auch im übrigen nicht so praktisch sein, wie die oben entwickelte Methode, doch den einen Vorteil bietet, dass aus der Entwicklung der Function (1a), wenn $m = 1$ gesetzt wird, direct die Entwicklung der Primfunction der doppelperiodischen Functionen zweiter Art gewonnen werden kann, was bei Zugrundelegung der Primfunctionen $P_1(z)$ und $P_2(z)$ dem Verfasser nicht gelungen ist, auch wol schwerlich angeht. Indessen sind die doppelperiodischen Functionen zweiter Art, oder, worauf es hier nur ankommt, deren Primfunctionen

$$\frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)}$$

auf sehr einfache Weise trigonometrisch zu entwickeln. Es möge hier eine Methode ihrer Entwicklung gegeben werden, welche sich auch unmittelbar auf die gemeinen elliptischen Functionen anwenden lässt und vor den gewöhnlich in den Lehrbüchern der Theorie der elliptischen Functionen [9]) gegebenen Methoden sich durch grosse Kürze auszeichnet.

---

1) So z. B. in den Lehrbüchern von Königsberger und von Briot und Bouquet, die dem Verfasser momentan allein zur Hand sind.

Man kann ansetzen

$$\frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} n\, e_m \,.\, e^{2m\pi iz}$$

wobei

$$a_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(z'+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \,.\, e^{-2mix} \,.\, dz$$

ist. Zur Berechnung dieses Integrals bilde man das Integral

$$\int \frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \,.\, e^{-2m\pi iz} \,.\, dz \tag{19}$$

erstreckt über den Umfang des Parallelogramms

$$(-\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{2}+\tau,\ -\tfrac{1}{2}+\tau)$$

„aber nicht, wie es gewöhnlich geschieht, über den Umfang eines „unendlich langen Parallelogramms erstreckt". Das Integral (19) zerfällt in 4 Teile, entrprechend den 4 Parallelogrammseiten. Man sieht sofort, dass die den Seiten

$$(+\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{2}+\tau) \quad \text{und} \quad (-\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}+\tau)$$

entsprechenden Teilintegrale sich gegenseitig zerstören. Also wird das gesamte Integral gleich

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \,.\, e^{-2m\pi iz} \,.\, dz + \int_{+\frac{1}{2}+\tau}^{-\frac{1}{2}+\tau} \frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \,.\, e^{-2m\pi iz} \,.\, dz \tag{20}$$

In dem letzten Integral möge $z = y+\tau$ gesetzt werden; dann geht es über in

$$\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(y+\alpha+\tau)}{\vartheta_0(y+\tau)} \,.\, e^{-2m\pi iy} \,.\, e^{-2m\pi i\tau} \,.\, dy$$

$$= e^{-2\pi i(\alpha+m\tau)} \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(y+\alpha)}{\vartheta_0(y)} \,.\, e^{-2m\pi iy} \,.\, dy$$

$$= -e^{-2\pi i(\alpha+m\tau)} \,.\, a_m$$

Der ganze Ausdruck (20) geht also über in

$$[1 - e^{-2m\pi i(\alpha+m\tau)}]\, a_m \tag{21}$$

Andererseits ist aber das Integral (19) gleich dem geschlossenen Integrale um den Punkt $\frac{\tau}{2}$, den einzigen Unstetigkeitspunkt von

$$\frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \cdot e^{-2m\pi iz}$$

in dem Parallelogramm. Nun ist aber, wie man leicht sieht, das Residuum unserer Function im Punkte $z = \frac{\tau}{2}$ gleich

$$\frac{\vartheta_0\left(a+\frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-m\pi i\tau}}{\vartheta_0'\left(\frac{\tau}{2}\right)} \tag{22}$$

Aber aus der Relation

$$\vartheta_0\left(u+\frac{\tau}{2}\right) = i\vartheta_1(u) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(2u+\frac{\tau}{2}\right)\pi i}$$

ergiebt sich zunächst, dass

$$\vartheta_0\left(a+\frac{\tau}{2}\right) = i\vartheta_1(a) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(2a+\frac{\tau}{2}\right)\pi i}$$

ist, und dann durch Differentiation

$$\vartheta_0'\left(u+\frac{\tau}{2}\right) = ie^{-\frac{1}{2}\left(2u+\frac{\tau}{2}\right)\pi i} \cdot [\vartheta_1'(u) - \pi i\vartheta_1(u)]$$

also

$$\vartheta_0'\left(\frac{\tau}{2}\right) = i \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{2}\pi i} \cdot \vartheta_1'$$

Der Ausdruck (22) kann also auch geschrieben werden

$$\frac{i\vartheta_1(a) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(2a+\frac{\tau}{2}\right)\pi i} \cdot e^{-m\pi i\tau}}{i\vartheta_1' \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{2}\pi i}} = \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot e^{-(a+m\tau)\pi i}$$

Folglich wird das gesuchte geschlossene Integral um den Punkt $\frac{\tau}{2}$

$$2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot e^{-(a+m\tau)\pi i}$$

Und dieser Ausdruck muss gleich (21) sein, d. h. für a_m selbst findet sich

$$a_m = 2\pi i \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot \frac{e^{-(a+m\tau)\pi i}}{1-e^{-2(a+m\tau)\pi i}} = \pi \cdot \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot \frac{1}{\sin\pi(a+m\tau)}$$

Es ergiebt sich also

$$\frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} = \pi \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \cdot \frac{e^{2m\pi is}}{\sin\pi(a+m\tau)}$$

II.

Ueber einige Sätze aus der elementaren Raumgeometrie.

Von

Heinrich Selpp

in Nienburg a. d. Weser.

Da die im folgenden (unter II. und III.) angestellten raumgeometrischen Betrachtungen sich auf gewisse entsprechende planimetrische Sätze stützen, so sind diese den ersteren (unter I.) vorausgeschickt.

Definitionen. Unter einem convexen ebenen Vieleck wird ein solches verstanden, welches nur concave oder ausspringende Winkel hat. — Als convexe Ecke wird eine solche bezeichnet, welche nur concave oder ausspringende Flächenwinkel und ebensolche Kantenwinkel hat, oder welche mit einer jeden, sämtliche Kanten treffenden, Ebene als Schnittfigur ein convexes Vieleck ergibt. — Ein convexes Polyeder heisse ein solches, welches nur convexe Ecken und demgemäss nur convexe Vielecke als Begrenzungsflächen besitzt, oder welches mit irgend einer, nicht bloss einen Eckpunkt enthaltenden, Ebene als Schnittfigur ein convexes Vieleck (unter Umständen auch ein Dreieck) ergibt.

I.

Es seien in der Figur: a, b, c, d, e, f und a', b', c', d', e', f', g', h' die Seiten zweier convexen Vielecke $ABCDEF$ oder i und $A'B'C'D'E'F'G'H'$ oder a, von welchen das letztere das

erstere vollständig umschliesst, so dass also keinerlei Ueberschneidungen von Seiten der beiden Polygone noch auch der fortgesetzt gedachten Seiten eines und desselben Vielecks stattfinden. Man verlängere die Seiten des umschlossenen oder „inneren" Vielecks i einseitig (jede über den mit der folgenden Seite gemeinsamen Eckpunkte hinaus) bis zum Schnitt mit dem Umfang des „äusseren" Polygons a. Die dabei sich ergebenden Verlängerungsstrecken der Seiten a, b, c, d, e, f seien bezüglich a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1. Durch ihre Endpunkte L, M, N, P, Q, R werden die Seiten a', b', c', e', g', h' des äusseren Vielecks a in Teilstrecken zerlegt, welche der Reihe nach mit a_1' und a_2', b_1' und b_2', c_1' und c_2', e_1' und e_2', g_1' nnd g_2', h_1' und h_2' bezeichnet sein mögen. Der von den beiden Vielecken begrenzte ringartige Teil der Ebene wird durch die beschriebene Construction in ebensoviele convexe Vielecke geteilt, als das innere Polygon Seiten hat (im vorliegenden Beispiel in 6) und es lässt sich auf jedes dieser Teilvielecke der bekannte Satz (1) anwenden: „Eine Seite eines jeden (nicht nur eines convexen Vielecks, auch die grösste Seite, ist stets kleiner als die Summe der übrigen Seiten". Mithin ergeben sich die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
f_1 + a_2' + b_1' &> a + a_1 \\
a_1 + b_2' + c_1' &> b + b_1 \\
b_1 + c_2' + d' + e_1' &> c + c_1 \\
c_1 + e_2' + f' + g_1' &> d + d_1 \\
d_1 + g_2' + h_1' &> e + e_1 \\
e_1 + h_2' + a_1' &> f + f_1
\end{aligned}$$

Werden dieselben addirt und im Ergebniss die gleichen Grössen (a_1, b_1, c_1 . . . f_1) beiderseits des Zeichens $>$ gestrichen, die zu Seiten (a', b', c' . . . h') des äusseren Vielecks sich ergänzenden Grössen (a_1' und a_2', b_1' und b_2', c_1' und c_2' . . . h_1' und h_2') vereinigt, so folgt

$$a' + b' + c' + d' + e' + f' + g' + h' > a + b + c + d + e + f$$

oder in symbolischer Schreibweise für die Vielecksseitensummen:

$$1) \qquad \Sigma l_a > \Sigma l_i$$

Es ist leicht ersichtlich, dass das vorstehende Verfahren zur Vergleichung der Grössen Σl_a und Σl_i unabhängig ist von der sonstigen Beschaffenheit der beiden Vielecke, dass es auch dann ungeändert Anwendung finden kann, wenn die Seitenzahl von i = derjenigen von a ist oder dieselbe übertrifft. Immer lässt sich in ähnlicher

Weise wie oben eine Zerlegung der von den beiden Polygonen eingeschlossenen ringartigen Fläche in Teilvielecke vornehmen, derart, dass bei der Addition der entsprechenden Ungleichungen stets diejenigen Seiten jener Teilpolygone ganz aus der Rechnung verschwinden, welche weder dem einen noch dem andern der gegebenen Vielecksumfänge angehören. Die Formel 1) gilt also — unter den eingangs gemachten Voraussetzungen — ganz allgemein. Da ferner eine in sich zurücklaufende, nach aussen oder convex- und stetig gekrümmte Linie oder eine geschlossene convexe Curve als Grenzfall eines convexen Vielecksumfangs aufgefasst werden kann, so gilt der

Satz 2: „Von zwei einander völlig umschliessenden, convexen Vielecksumfängen (gebrochenen in sich zurücklaufenden Linien) sowie auch von zwei sich umschliessenden, convex- und stetig gekrümmten geschlossenen Curven hat stets der äussere Vielecksumfang oder die umschliessende Curve die grössere Länge."

Der vorstehende Satz bleibt auch dann noch bestehen, wenn eine Ecke oder eine Seite des inneren Vielecks mit einer Ecke oder Seite des äusseren zusammenfällt. Denn der Umstand, dass z. B. die Seiten b und c' sich decken, also in den obigen Ungleichungen $a_1 = 0$, $b_2' = 0$, $b_1' = b'$ und $b_1 = 0$, $c_2' = 0$, $c_1' = c'$ ist, hat auf das Endergebniss keinen Einfluss. Ebenso können auch mehrere Ecken oder Seiten der beiden Vielecke zusammenfallen.

Mithin kann man u. a. auch noch den folgenden Satz aussprechen, von welchen sich ein besonderer, scharfsinniger Beweis bei Legendre (9ter Satz im 4ten Buch der „Elemente der Geometrie") findet.

Satz 3: „Von zwei convexen, gebrochenen oder auch von zwei convexen, stetig gekrümmten Linien, welche dieselbe zweiseitig begrenzte Gerade oder Strecke überspannen, so dass also die eine die andere vollkommen umschliesst, ist die „umschliessende oder äussere Linie die grössere".

Da nun die überspannte Strecke selbst von allen übrigen zwischen ihren Endpunkten möglichen gebrochenen oder stetig gekrümmten Linien umschlossen wird, so ist sie hiernach die kürzeste von allen Verbindungslinien zwischen jenen beiden Punkten und man ist somit wiederum bei dem Ausgangspunkt der obigen Ableitung, nämlich bei dem Satz 1 angelangt, von welchem das soeben erhaltene Ergebniss sich eigentlich nur der Fassung nach unterscheidet.

II.

Projicirt man die der Ableitung der Formel 1) in I. zu Grunde gelegte ebene Figur von irgend einem Punkte p des Raumes aus, so entstehen zwei convexe vielkantige Ecken $p(ABCDEF)$ oder i' und $p(A'B'C'D'E'F'G'H')$ oder a' mit gemeinsamer Spitze (p), von welchen die letztere die erstere vollständig umschliesst, so dass irgend welche Ueberschneidungen von Eckenseiten nicht vorkommen. [Ausserdem erscheint der Raum zwischen den beiden Ecken in den obigen Teilvielecken entsprechende convexe Teilecken $p(ALB'M)$, $p(BMC'N)$, $p(CND'E'P)$ u. s. w. zerlegt]. Da nun zu einem jeden Punkte einer jeden projicirten Vielecksseite ein projicirender Strahl gehört, und die Gesamtheit der projicirenden Strahlen einer jeden Vielecksseite den entsprechenden ebenen Winkel oder die entsprechende Seite der betreffenden Ecke bildet, so muss das über die Mengen der Elemente oder Punkte der Vielecksumfänge a und i, d. h. über die Grösse der letzteren Bewiesene ganz ebenso von den Mengen der die beiden Eckenseitensummen $\Sigma\beta_a$ und $\Sigma\beta_i$ bildenden Strahlen, d. h. von jenen Seitensummen selbst gelten. Folglich besteht die Ungleichung:

$$2) \qquad \Sigma\beta_a > \Sigma\beta_i$$

welche auch noch in dem Falle gilt, dass die Zahl der Eckenseiten eine unbegrenzte ist, also ihre Gesamtheit eine konische Fläche bildet. Der Formel 2) entnimmt man die folgenden Sätze:

Satz 4: „Von den einander völlig umschliessenden, gebrochenen bzhw. stetig gekrümmten Begrenzungsflächen zweier convexen Ecken oder convexen kegelförmigen Halbräumen mit gemeinsamer Spitze hat die umschliessende Fläche die grössere Seitensumme bzhw. ergibt nach der Abwickelung den grösseren ebenen Winkel".

Satz 5: Haben zwei convexe Ecken eine Seite und folglich auch ihre Spitze gemein, so dass die Umfangsfläche der einen die der andern im übrigen völlig umschliesst, so besitzt die umschliessende Fläche die grössere Seitensumme

oder:

Von irgend zwei convexen, gebrochenen (spitzenförmigen) oder auch convex-konischen Fächen, welche, einander umschliessend, denselben ebenen (concaven) Winkel überspannen, ergibt stets die umschliessende oder äussere den grösseren ebenen Abwickelungswinkel".

Auch folgt sogleich weiter der

Satz 6: „Der von zwei sich schneidenden Geraden eingeschlosssene ebene (concave) Winkel ist die kleinste von allen zwischen den beiden Geraden möglichen Verbindungsflächen

oder:

Eine Seite einer jeden convexen Ecke (auch einer solchen mit zum Teil einspringenden Winkeln), ist stets kleiner als die Summe der übrigen Eckenseiten".

Für den besonderen Fall, dass der Projectionsmittelpunkt p ins Unendliche rückt, also an Stelle der Ecke bezhw. des konischen Raumes der prismatische bzhw. cylindrische Raum tritt, ist der Wortlaut der Sätze 4, 5 und 6 entsprechend abzuändern.

Die Sätze 4, 5 und 6 entsprechen den Sätzen 2, 3 und 1 für die Ebene vollständig. Bei der Ableitung der Sätze 4 und 5 hätte man auch von Satz 6 ausgehen können (— einen andern, selbständigen Beweis desselben siehe unter IV —), in ähnlicher Weise wie oben der Beweis von Satz 2 auf Satz 1 gestützt worden war. Denn der Satz 6 lässt sich auf jede einzelne der eingangs dieses Abschnittes (II) erwähnten Teilecken anwenden und führt genau zu den unter I aufgestellten Ungleichungen, in welchen jetzt aber die Buchstaben a, b, c . . . f sowie a_1', a_2', b_1', b_2' u. s. w. nicht Vieleckseiten bzhw. Teile derselben, sondern ebene Winkel, nämlich Eckenseiten bzhw. Teile von solchen bezeichnen.

Endlich ist die Herleitung der Sätze 4, 5, 6 noch auf eine dritte (dem Cavalierischen Verfahren zur Vergleichung von Körpervolumen nachgebildete) Art möglich, wobei man von den entsprechenden Sätzen 2, 3, 1 ausgeht. Man denke sich nämlich die beiden convexen Ecken durch eine unbegrenzte Zahl von unendlich benachbarten Parallelebenen in Schichten zerlegt, welche man näherungsweise als Prismen betrachten darf. Dann ist das Verhältniss der Mantelflächen zweier solchen auf derselben Schnittebene ruhenden gleichhohen Teilprismen der beiden Ecken dasselbe wie das Verhältniss der Umfänge der Schnittpolygone jener Ebene mit den Umfangsflächen der beiden Ecken. Aus der vorausgesetzten Beschaffenheit der letzteren folgt nun die Convexität je zweier solchen zu derselben Parallelebene gehörigen Schnittpolygone, sowie das völlige Umschlossensein des einen derselben von dem andern. Mithin gilt für sie und folglich auch für die zugehörigen beiden Prismenmäntel die Formel 1) und da die unendlichen Summen aller der letzteren die Umfangsflächen der beiden Ecken darstellen, so folgt auch für diese die entsprechende Aussage, d. h. also die Formel 2).

III.

Es seien $ABCD \ldots$ oder i'' und $A'B'C'D' \ldots$ oder a'' zwei convexe Polyeder, von welchen das letztere das erstere vollständig umschliesst. Durch das am Schlusse von Abschnitt II. erörterte Verfahren werden die Oberflächen der beiden Vielflache in Zonen zerlegt, von denen — je zwei zu derselben schneidenden Parallelebene gehörige – ihrer verschwindend kleinen Höhe wegen — mit grosser Annäherung dasselbe Grössenverhältniss aufweisen wie die Umfänge der beiden Schnittpolygone der betreffenden Ebene mit den Polyedern. Diese Schnittvielecke sind aber convex und da, der Voraussetzung gemäss, die Oberfläche des Vielflächners i'' an keiner Stelle diejenige des Polyeders a'' durchdringen soll, so muss auch das zu a'' gehörige Schnittpolygon (a) das dem Vielflächner i'' angehörige (i) vollständig umschliessen.

In Bezug auf beide Vielecke a und i und folglich auch in Bezug auf die zugehörigen beiden Polyederzonen gilt also die Fomel 1) und da ein Gleiches hinsichtlich aller übrigen Paare von Schnittpolygonen der Parallelebenen mit den Polyedern, sowie hinsichtlich deren zugehörigen Zonen der Fall ist, so trifft es auch für die Summen der letzteren, d. h aber für die beiden Polyederoberflächen Σf_a und Σf_i selbst zu und es ist somit die Formel

3) $$\Sigma f_a > \Sigma f_i$$

bewiesen. Zieht man noch den Sonderfall in Betracht, dass eine der Begrenzungsflächen des einen Vielflächners mit einer solchen des andern zusammenfällt und geht man weiterhin auch zu dem Grenzfall unendlich vieler unendlich kleiner Begrenzungsflächen der Polyeder über, so kann man die folgenden Sätze aussprechen:

Satz 7: „Von zwei convexen, einander völlig umschliessenden polyedrischen oder auch stetig gekrümmten geschlossenen Flächen ist die umschliessende oder äussere die grössere".

Satz 8: „Von irgend zwei convexen gebrochenen (polyedrischen) oder auch convex- und stetig gekrümmten Flächen, welche dasselbe ebene (convexe) Vieleck überspannen, ist die umschliessende oder äussere die grössere".

Satz 9: „Die ebene Fläche eines jeden convexen Vielecks ist die kleinste von allen zwischen seiner Umgrenzung möglichen Flächen".

Die Sätze 7, 8, 9 finden sich, jedoch in anderer Ableitung, bei Legendre im VIII. Buch a. a. O.

Ein sehr einfacher, selbständiger, auf demselben Princip beruhender Beweis der Sätze 3, 6 und 9 ergibt sich, wenn man die convex-gebrochene bzhw. stetig gekrümmte Linie oder Fläche, welche eine Strecke, einen ebenen (concaven) Winkel oder ein ebenes convexes Vieleck überspannt, mit ihrer orthogonalen Projection auf die Gerade jener Strecke bzhw, die Ebene jenes Winkels oder Vielecks vergleicht und noch berücksichtigt, dass jeder der Bestandteile (Strecken, ebenen Winkel, Vielecksflächen) der betreffenden zu projicirenden Raumgrösse im allgemeinen grösser ist als seine Projection, mindestens aber gleich derselben.

Von ganz speciellen, aus dem Vorstehenden sich ergebenden Sätzen sollen noch hervorgehoben werden der bekannte

Satz (10): „Die Summe zweier Seiten einer dreikantigen convexen Ecke ist stets grösser als die dritte Seite" sowie der

Satz 11: „Die Summe dreier Flächen eines Tetraeders ist stets grösser als seine vierte Begrenzungsfläche". Der letztere Satz enthält die Bedingung dafür, dass ein Punkt (der Gegeneckpunkt der vierten Tetraederfläche ausserhalb der Ebene eines gegebenen Dreiecks (der Ebene der vierten Tetraederfläche) sich befindet, ebenso wie ein Punkt auserhalb der Geraden einer gegebenen Strecke gelegen ist, wenn die Summe seiner Entfernungen von den Streckenendpunkten grösser ist als die Strecke selbst (Vgl. Satz I. im § 9 der Planimetrie von Baltzer und die Zeichenregel im § 9, 7 daselbst).

III.

Geometrische Oerter bei Curvensystemen.

Von

H. Ekama.

Wenn man in der Gleichung einer Curve einen der Parameter ändert, so bekommt man ein Curvensystem. Dieses kann man andeuten durch die Formel

$$F(x, y) = a$$

in welcher a der Parameter ist, welcher alle Werte haben kann.

Durch Differentiation finden wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{1}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ist der geometrische Ort der Gipfel in Bezug auf die X Achse, (d. h. der Punkte, in welchen y ein Maximum oder ein Minimum erreicht) für Curven, welche zum System gehören, und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ist der geometrische Ort der Gipfel in Bezug auf die Y-Achse.

Nehmen wir zum Beispiel ein System von Lemniskaten, deren Brennpunkte zusammenfallen; so ist dieses angedeutet durch die Formel

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = p^4$$

in welcher p sich ändert.

Für die Gipfel in Bezug auf die X Achse haben wir also:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2+y^2) - 4a^2x = 0$$

folglich $x = 0$ und $x^2+y^2 = a^2$; die geometrischen Oerter sind also die Y Achse und ein Kreis mit dem Radius a.

Für die Gipfel in Bezug auf die Y Achse ist:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2+y^2)+4a^2y = 0$$

$y = 0$ ist die X Achse und die Curve $x^2+y^2+a^2 = 0$ ist imaginär.

Ist das System in der Form $f(x, y, a) = 0$ gegeben, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (2)$$

und für jeden Gipfel in Bezug auf die X Achse muss $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und für jeden in Bezug auf die Y Achse $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sein. Eliminirt man mittelst

$$f(x, y, a) = 0$$

den Parameter a aus diesen Formeln, so findet man die gesuchten geometrischen Oerter.

Ein System von Kreisen, welche einander in einem Punkte berühren, wird gegeben durch

$$x^2 - 2xa + y^2 = 0$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-a)$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Die letzte Formel giebt sogleich $y = 0$, das ist die X Achse und die erste nach Elimination

$$x^2 - 2x^2 + y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm y$$

folglich die geraden Linien, welche die Winkel zwischen den Achsen in zwei Hälften teilen.

Ist das System in Polarcoordinaten

$$F(r\,.\,\varphi) = a$$

gegeben, so ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\frac{\partial F}{\partial r}}$$

$\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ ist der geometrische Ort aller Punkte, in welchen die Tangente senkrecht zum Radiusvector steht, und $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ ist der geometrische Ort der Punkte, bei welchen die Tangente durch den Coordinatenanfangspunkt geht.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi} = -\frac{-\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi}{\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi + r\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi}$$

Für den geometrischen Ort der Gipfel in Bezug auf die X Achse muss der Zähler $= 0$ sein, für denjenigen in Bezug auf die Y Achse der Nenner $= 0$. Uebereinstimmende Formeln bekommt man, wenn das System in der Form

$$f(r,\ \varphi,\ a) = 0$$

gegeben ist. Man findet dann für die Gipfel in Bezug auf die X Achse

$$-\frac{\partial f}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\frac{\partial f}{\partial r}\cos\varphi = 0$$

und in Bezug auf die Y Achse

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cos\varphi + r\frac{\partial f}{\partial r}\sin\varphi = 0$$

aus welchen Formeln der Parameter a mittels

$$f(r,\ \varphi,\ a) = 0$$

eliminirt werden muss, um die geometrischen Oerter zu finden.

Mittels (1) haben wir nun den geometrischen Ort der Wendepunkte zu bestimmen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial F}{\partial x}\right\}$$

folglich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right\}$$

Wenn nicht $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ist, so ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (3)$$

der geometrische Ort der Wendepunkte des gegebenen Systems.

Ist das System in der Form

$$f(x,\ y,\ a) = 0$$

gegeben, so hat man in gleicher Weise für einen Wendepunkt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

und findet durch Elimination des Parameters a mittels

$$f_1(x,\ y,\ a) = 0$$

den gesuchten geometrischen Ort.

Für beide Fälle werden wir ein Beispiel geben. Für ein System von Lemniskaten mit denselben Brennpunkten ist:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = p^4 - a^4$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x\{x^2+y^2-a^2\} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2+y^2+a^2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4(3x^2+y^2-a^2) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 8xy \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4(x^2+3y^2+a^2)$$

durch Substitution dieser Werte in die Formel (3):

$$64\,y^2\{x^2+y^2+a^2\}^2\{3x^2+y^2-a^2\} - 256\,x^2y^2\{(x^2+y^2)^2 - a^4\} + 64\,x^2(x^2+y^2-a^2)^2(x^2+3y^2+a^2) = 0$$

$$2x^2y^2\{(x^2+y^2+a^2)^2 - 2\{(x^2+y^2)^2 - a^4\} + (x^2+y^2-a^2)^2\} + \{(x^2+y^2+a^2)(x^2+y^2-a^2)\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)\} = 0$$

$$8a^4x^2y^2 + \{(x^2+y^2)^2 - a^4\}\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)\} = 0$$

$$(x^2+y^2)^2\{(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)\}+8a^4x^2y^2-2a^2(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)$$
$$-2a^4(x^2+y^2)^2+a^4\{(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)=0$$

also

$$\{(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)\}\{(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4\}=0$$
$$(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)=0$$

giebt für den geometrischen Ort die Lemniskate von Bernoulli.

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4=0$$

können wir in der Form schreiben:

$$(x^2-y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4=-4x^2y^2$$

und folglich ist dieser geometrische Ort imaginär.

Als zweites Beispiel suchen wir den geometrischen Ort der Wendepunkte eines Systems gleichförmiger Lemniskaten; bei diesen ist also $a'p=1/n$ constant. Die Gleichung ist:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=(n^4-1)a^4$$

der Formel (4) zufolge finden wir:

$$8a^4x^2y^2+\{(x^2+y^2)^2-a^4\}\{(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)\}=0$$

und mittels der gegebenen Gleichung

$$8a^4x^2y^2+\{(n^4-1)a^4+2a^2(x^2-y^2)-a^4\}\,.$$
$$.\,\{(n^4-1)a^4+a^2(x^2-y^2)\}=0$$

$$8x^2y^2+(n^4-2)(n^4-1)a^4+(3n^4-4)(x^2-y^2)a^2+2(x^2-y^2)^2=0$$

$$(n^4-2)(x^2+y^2)^2-(n^4-2)2a^2(x^2-y^2)+2(x^2+y^2)^2$$
$$+(3n^4-4)(x^2-y^2)a^2=0$$

folglich

$$(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)=0$$

oder

$$a^2=-\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$$

also nach Substitution in die gegebene Gleichung

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)^2=(n^4-1)\frac{(x^2+y^2)^4}{(x^2-y^2)^2}$$

$$3(x^2+y^2)^2=(n^4-1)(x^2+y^2)^2$$

oder

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{n^4 - 1}{3}}$$

und in Polarcoordinaten

$$\cos 2\varphi = \sqrt{\frac{n^4 - 1}{3}}$$

Der geometrische Ort sind also gerade Linien, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen. Er wird imaginär für $n^4 < 1$ und $n^4 > 4$ und also reell für $1 < n < \sqrt{2}$, wie zu erwarten war. In diesem Falle wäre es kürzer gewesen erstens mittels (2) $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen, darauf mittels $f(x, y, a) = 0$ a zu eliminiren und endlich $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu suchen.

Wir wollen das Curvensystem bestimmen, welches die Curven eines gegebenen Systems immer unter einen gegebenen Winkel α schneiden. Nennen wir den Winkel, welchen die Tangente in einem Punkte der Curve des einen Systemes mit der X Achse macht, τ, und den Winkel, welchen die Tangente in diesem Punkte der Curve des anderen Systemes mit jener Achse macht τ', so muss immer $\tau' = \alpha + \tau$ sein,

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \tau}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \tau}$$

oder

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{dy_1}{dx_1}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \frac{dy_1}{dx_1}} \tag{5}$$

In vielen Fällen ist die Form in Polarcoordinaten einfacher in der Anwendung.

$$\cot(\tau - \varphi_1) = 1/r_1 \frac{dr_1}{\partial \varphi_1} \quad \text{und} \quad \cot(\tau' - \varphi_2) = 1/r_2 \frac{dr_2}{d\varphi_2}$$

Jetzt muss $\alpha = \tau' - \tau$ sein oder $\alpha = (\tau' - \varphi_1) - (\tau - \varphi_2)$; denn im Schnittpunkte ist $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$, folglich:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1/r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1} - 1/r_2 \frac{dr_2}{d\varphi_2}}{1 + \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} \frac{dr_1}{d\varphi_1} \frac{dr_2}{d\varphi_2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \frac{1/r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1} - \operatorname{tg}\alpha}{1 - 1/r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1}\operatorname{tg}\alpha} \tag{6}$$

Ein System gerader Linien, welche einander in einem Punkte schneiden, ist gegeben durch $\varphi_1 = A$, also

$$d\varphi_1 = 0 \;\therefore\; \frac{r_1\, d\varphi_1}{dr_1} = 0$$

folglich:

$$\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \operatorname{cotg}\alpha$$

nach Integration

$$r_2 = Ce^{\varphi_2 \operatorname{cotg}\alpha}$$

Für ein System concentrischer Kreise ist $r_1 = a$, also

$$dr_1 = 0 \;\therefore\; 1/r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\operatorname{tg}\alpha$$

und wir finden

$$r_2 = Ce^{-\varphi_2 \operatorname{tg}\alpha}$$

oder wenn wir φ in entgegengesetzter Richtung zählen,

$$r_2 = Ce^{\varphi_2 \operatorname{tg}\alpha}$$

Für beide Fälle finden wir übereinstimmende Systeme, welche ganz zusammenfallen, wenn die gegebenen Winkel α einander Complemente sind. Dieses muss auch so sein, weil das System gerader Linien durch das System concentrischer Kreise senkrecht geschnitten wird.

Ist $\alpha = 90^0$, so werden die Formeln (5) und (6)

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{dx_1}{dy_1} \quad \text{und} \quad 1/r_2 \frac{dr_2}{d\varphi_2} = -\frac{r_1\, d\varphi_1}{dr_1} \tag{7}$$

Nehmen wir ein System von Ellipsen oder Hyperbeln, bei welchen die Proportion zwischen den Achsen gleich $\operatorname{tg}\eta$ ist. Die Systeme sind gegeben durch

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{a^2 \operatorname{tg}^2\eta} = C$$

folglich

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \mp \frac{x_1}{y_1}\operatorname{tg}^2\eta$$

In den Schneidepunkten ist $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ und folglich für die Systeme, welche die gegebenen unter rechten Winkeln schneiden:

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \pm \frac{y_2}{x_2} \operatorname{cotg}^2\eta \quad \text{oder} \quad \frac{dx_2}{x_2} = \pm \frac{dy_2}{y_2} \operatorname{tg}^2\eta$$

durch Integration finden wir für das zu den Ellipsen gehörende System

$$x = C y^{\operatorname{tg}^2\eta}$$

und für das bei den Hyperbeln

$$x y^{\operatorname{tg}^2\eta} = C$$

Ist im ersten Systeme $\operatorname{tg}^2\eta$ rational, so besteht das System aus Parabeln von höherem Grade.

Sei ein System von Cissoiden, welche dieselben Achsen und dieselbe Spitze haben, gegeben.

$$r_1 = 2a \sin\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1$$

$$\frac{dr_1}{d\varphi_1} = 2a \sin\varphi_1 \frac{1+\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_1}$$

Durch Elimination von a finden wir:

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} = \operatorname{cotg}\varphi_1 \frac{1+\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{1+\cos^2\varphi_1}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}$$

und folglich für das gewünschte System:

$$\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = -\frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{1+\cos^2\varphi_2}$$

also nach der Integration:

$$r_2^2 = c^2(1+\cos^2\varphi_2)$$

oder in rechtwinkelige Coordinaten übergebracht

$$(x^2+y^2)^2 = c^2(2x^2+y^2)$$

Diese Curve ist vom vierten Grade und symmetrisch in Bezug auf die Achsen.

Für $\varphi = 0^0$ ist

$$r = c\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi = 90^0 \therefore r = c$$

$\varphi = 30^0 \therefore r = {}^1/_2 c\sqrt{7}$: $\varphi = 45^0 \therefore r = {}^1/_2 c\sqrt{3}$ und
$\varphi = 60^0 \therefore r = {}^1/_2 c\sqrt{5}$

Die Curve ist also leicht zu construiren. Wendepunkte hat sie nicht. Die Oberfläche O ist gleich vier mal $\frac{1}{2}\int_0^{1/2\pi} r^2 d\varphi$.

$$\int_0^{1/2\pi} r^2 d\varphi = c^2 \int_0^{1/2\pi} (1+\cos^2\varphi)\, d\varphi = c^2 \left| {}^3/_2\varphi \right|_0^{1/2\pi} = \tfrac{3}{4}\pi c^2$$

und also

$$O = {}^3/_2\pi c^2$$

Im allgemeinen giebt diese Untersuchung Curven, welche wenig bekannt sind, z. B. zu

$y_1^2 = 2px_1 - (1-\varepsilon^2)x_1^2$ {ε veränderlich}

gehört $y_2^2 x_2^2 = ax_2^3 + b^4$ {b veränderlich}

$r_1 = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi_1}$ {ε veränderlich}

gehört $b e^{r_2/p} = r_2 \sin\varphi_2$ {b veränderlich}

$r_1 = a\varphi_1$ {a veränderlich{

gehört $r_2 e^{1/2\varphi_2^2} = b$ {b veränderlich}

$r_1\varphi_1 = a$ {a veränderlich}

gehört $r_2 = b e^{1/2\varphi_2^2}$ {b veränderlich}

In vielen Fällen ist die Integration nicht ausführbar.

Das Folgende möge etwas ausführlicher betrachtet werden. Das gegebene System besteht aus Kreisen mit demselben Radius p beschrieben und deren Mittelpunkte auf einer geraden Linie liegen; also

$$y_1^2 + (x_1 - a)^2 = p^2 \qquad y_1 \frac{dy_1}{dx_1} + (x_1 - a) = 0$$

folglich

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\sqrt{p^2 - y_1^2}}{y_1}$$

also

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{y_2}{\sqrt{p^2 - y_2^2}}$$

oder

$$dx_2 = -\frac{\sqrt{p^2 - y_2^2}}{y_2}\, dy_2$$

Sei $y_2 = p \sin\psi$, so ist

$$dy_2 = p\cos\psi\, d\psi \quad \text{und} \quad dx_2 = -p\frac{\cos^2\psi}{\sin\psi}\, d\psi$$

die Integration giebt

$$\frac{x_2 + c}{p} = -\log\mathrm{tg}\,{}^1/_2\psi - \cos\psi$$

Bei der Untersuchung dieser Curve können wir das Zeichen ändern und die Constante weglassen, denn diese giebt nur eine Verschiebung in der Richtung der X Achse.

$$y = 0 \quad \text{für} \quad \sin\psi = 0, \quad \text{so ist} \quad x = \infty$$
$$y = p \quad \text{für} \quad \sin\psi = 1, \quad \text{so ist} \quad x = 0$$

Die Linie der Mittelpunkte ist eine Asymptote und die Curve hat eine Spitze auf der gemeinsamen Tangente der Kreise. Die Oberfläche zwischen der Curve und der Asymptote ist gleich

$$\int y\, dx = 2p^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos^2\psi\, d\psi = {}^1/_2\pi\, p^2$$

folglich der halben Oberfläche eines der Kreise gleich.

Die Form der Gleichungen lässt erwarten, dass die Curve eine cycloidische Curve, entstanden bei der Wälzung einer Curve die Linie der Mittelpunkte entlang, sein wird. Der Teil der Normale zwischen der Curve und der Directrix ist

$$r = p\,\mathrm{tg}\,\psi$$

und

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\mathrm{tg}\,\psi = {}^1/_r\frac{dr}{d\varphi}$$

folglich

$$-p\frac{dr}{r^2} = d\varphi$$

also

$$p = r\varphi$$

Die Curve, welche also die gerade Linie entlang wälzen muss, ist die hyperbolische Spirale, und der Coordinatenanfangspunkt ist der beschreibende Punkt. Der Punkt auf der Tangente wird bei einer endlichen Geschwindigkeit in unendlich grosser Zeit erreicht werden.

Sind die Gleichungen von zwei Systemen, welche einander senkrecht schneiden

$$F(x_1 y_1) = a \quad \text{und} \quad F'(x_2 y_2) = b$$

so ist

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial y_1} \quad \text{und} \quad \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{\partial F'}{\partial x_2} : \frac{\partial F'}{\partial y_2}$$

Nun soll (7) zufolge

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dx_2}{dy_2}$$

ein, also

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial y_1} = -\frac{\partial F'}{\partial y_2} : \frac{\partial F'}{\partial x_2} \tag{8}$$

Ist jetzt

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \text{so ist auch} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0$$

und für

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \quad \text{ist} \quad \frac{\partial F'}{\partial x_2} = 0$$

was uns lehrt, dass der geometrische Ort der Gipfel in Bezug auf die X Achse in dem einen Systeme bei dem anderen der geometrische Ort für die Gipfel in Bezug auf die Y Achse ist.

Wenn wir (8) nach x_1 differentiiren, finden wir

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 = -\frac{dy_2}{dx_1}\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial y_2^2}\frac{\partial F'}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right) : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2$$

und nach y_1

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 = -\frac{dx_2}{dy_1}\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x_2^2}\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right) : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2$$

Multipliciren wir die obenstehende Formel mit $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ und die untenstehende mit $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ und zählen wir sie zusammen,

$$\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2\right\} : \left\{\frac{\partial F}{\partial y_1}\right\}^3 =$$

$$\frac{dy_2}{dx_1}\left\{\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial x_2}\frac{\partial F'}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2^2}\left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2\right\} : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^3$$

Bei dieser Ableitung ist (8) gebraucht und weiter ist doch

$$\frac{dy_2}{dx_1} = -\frac{dx_2}{dy_1}$$

Aus dieser Formel ersieht man, dass wenn es für das eine System einen geometrischen Ort für die Wendepunkte giebt, dieser auch der geometrische Ort für die Wendepunkte des anderen Systems ist.

Indem wir die Formel (7) gebrauchen, können wir auf einfache Weise beweisen, dass wenn das eine System die Formel

$$r_1^n = a^n \cos n\varphi_1$$

hat, dieses System unter einem Winkel α geschnitten wird durch ein gleiches System, wenn die Achsen beider Systeme einen Winkel $1/n\alpha$ mit einander machen [1]).

$$1/r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\operatorname{tg} n\varphi_1$$

und weil in den Schneidepunkten $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ ist:

$$1/r_2 \frac{dr_2}{d\varphi_2} = -\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(n\varphi_2 + \alpha)$$

$$n\frac{dr_2}{r_2} = -\frac{dn\varphi_2}{\operatorname{cotg}(n\varphi_2 + \alpha)}$$

also

$$r_2^n = c^n \cos(n\varphi_2 + \alpha)$$

n kann alle Werte haben. Die meist bekannten Curven sind:

$n = 1$ Kreise, welche einander in einem Punkte berühren;
$n = -1$ parallele gerade Linien;
$n = 2$ Lemniskaten von Bernoulli mit demselben Coordinatenanfangspunkt;
$n = -2$ gleichseitige Hyperbeln mit denselben Asymptoten;
$n = 1/2$ Kardioiden und
$n = -1/2$ Parabeln mit demselben Brennpunkte.

Die Formeln (5) und (6) helfen uns, wenn zwei Curvensysteme gegeben sind, den geometrischen Ort der Punkte, in welchen das Schneiden unter einem bestimmten Winkel stattfindet, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Formeln in die Form

---

1) Muurling. Dissertatie. Groningen 1870. p. 81.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy_2}{dx_2}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_2}{dx_2}} = -\frac{\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} - \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2}}{1 + \frac{1}{r_1}\frac{1}{r_2}\frac{dr_1}{d\varphi_1}\frac{dr_2}{d\varphi_2}}$$

Wir nehmen z. B. zwei Systeme gerader Linien, welche einander in einem Punkte schneiden. Die Entfernung der beiden Schneidepunkte sei $2b$; so ist das eine System

$$y_1 = A(x_1 + b)$$

und das andere

$$y_2 = B(x_2 - b)$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = A = \frac{y_1}{x_1 + b} \quad \text{und} \quad \frac{dy_2}{dx_2} = B = \frac{y_2}{x_2 - b}$$

Im geometrischen Orte ist

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2by}{x^2 - b^2 + y^2}$$

oder

$$x^2 + y^2 - b^2 = 2by\operatorname{cotg}\alpha$$

Diese geometrischen Oerter sind, wie zu erwarten war, Kreise, welche durch die Schneidepunkte gehen.

Als zweites Beispiel dienen zwei Systeme confocaler Lemniskaten, welche denselben Coordinatenanfangspunkt haben, doch bei denen die Linien, welche durch die Brennpunkte gehen, senkrecht zu einander stehen.

Für das eine ist

$$r_1^4 - 2a^2 r_1^2 \cos 2\varphi_1 = p_1^4 - a^4$$

für das andere ist

$$r_2^4 + 2a^2 r_2^2 \cos 2\varphi_2 = p_2^4 - a^4$$

also

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\frac{a^2 \sin 2\varphi_1}{r_1^2 - a^2\cos 2\varphi_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \frac{a^2 \sin 2\varphi_2}{r_2^2 + a^2\cos 2\varphi_2}$$

Im Schneidepunkte ist wieder

$$r_1 = r_2 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a^2 r^2 \sin 2\varphi}{r^4 - a^4}$$

oder

$$r^4 - 2a^2 r^2 \operatorname{cotg}\alpha \sin 2\varphi = a^4$$

Diese geometrischen Oerter sind Lemniskaten, doch die Achsen machen mit den ursprünglichen Winkel von 45°.

Für das eine System können wir ein System gerader Linien, welche durch einen Punkt mit den Coordinaten a, b gehen, nehmen, und den geometrischen Ort der Punkte, in welchen die Curven eines anderen Systems unter dem Winkel α geschnitten werden, suchen Das System gerader Linien ist gegeben durch die Gleichung

$$(x_1 - a)\,\mathrm{tg}\,A = y_1 - b$$

also

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

und wir finden also

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{(y-b) - (x-a)\frac{dy_2}{dx_2}}{(x-a) + (y-b)\frac{dy_2}{dx_2}}$$

Ist $\alpha = 90°$: d. h. die geraden Linien sind Normalen der Curven, so muss

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy_2}{dx_2} = 0$$

sein. Für $\alpha = 0°$ berühren die Geraden die Curven des Systems. und ist

$$(y-b) - (x-a)\frac{dy_2}{dx_2} = 0$$

Aus beiden Formeln sieht man, dass ihnen genügt wird durch $x = a$ und $y = b$, folglich geht der geometrische Ort immer durch den gegebenen Punkt. Von Schlömilch [1]) sind diese geometrischen Oerter für die Kegelschnitte untersucht.

Hat man zwei Systeme, welche einander senkrecht schneiden, und einen Punkt, durch welchen die geraden Linien gehen, so ist naturgemäss der geometrische Ort für die Normalpunkte des einen Systems auch der geometrische Ort für die Berührungspunkte des anderen Systems.

---

1) Schlömilch Zeitschrift. Bd. XXIII. S. 337—339.

IV.

Ableitungen arithmetischer Reihen.

Von

Franz Rogel.

Vom Verfasser wurden in seinem Aufsatze „Ueber eine besondere Art von Reihen“ (Archiv 2. Reihe, Tom. VII., 1889. p. 372) aus Potenzreihen neue gebildet, deren Coefficienten Functionen der Teiler der Stellenvariabelen sind.

Das hiebei eingeschlagene Verfahren ist einer Verallgemeinerung fähig und insbesonders auf trigonometrische Reihen anwendbar.

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^n f(n\varphi) = F(\varrho, \varphi), \quad \varrho^2 < 1 \tag{1}$$

eine unendliche Reihe, welche gleichzeitig nach aufsteigenden Potenzen des Modul ϱ und nach den $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}$, (hier abkürzungsweise mit „f“ bezeichnet), der Vielfachen der Amplitude φ fortschreitet, die entweder für jeden Wert, oder wenigstens für nicht negative Werte von φ convergirt, so lässt sich aus derselben eine neue Reihe derselben Art ableiten, wenn in die Stammreihe (1) $r\varphi$, ϱ^r für φ, ϱ gesetzt und das Resultat mit einer noch unbestimmten Function $g(r)$, über welche später verfügt werden wird, multiplicirt wird. Setzt man nun der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots$, addirt und ordnet die Glieder wieder nach aufsteigenden Potenzen von ϱ und Vielfachen von φ, so ergiebt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} a_{nr}\, g(r)\, \varrho^{nr} f(nr\varphi) =$$
$$a_1 g(1)\,\varrho f(\varphi) + (a_1 g(2) + a_2 g(1))\,\varrho^2 f(2\varphi) + (a_1 g(3) + a_3 y_1))\varrho^3 f(3\varphi)$$
$$+(a_1 g(4) + a_2 g(2) + a_4 g(1))\varrho^4 f(4\varphi) + (a_1 g(5) + a_5 g(1))\,\varrho^5 (5\varphi)$$
$$+(a_1 g(6) + a_2 g(3) + a_3 (g(2) + a_6 g(1))\varrho^6 f(6\varphi)$$
$$+(a_1 g(7) + a_7 g(1))\,\varrho^7\,(7\varphi) + \ldots \qquad (2)$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{t=n} a_t\, g\binom{n}{t}\,\varrho^n f(n\varphi) = \sum_{r=1}^{\infty} g(r)\, F(\varrho^r,\ r\varphi) \qquad (3)$$

wo sich die zweite Summe rechter Hand auf alle Teiler t des Stellenzeigers n bezieht.

Bezeichne $\Omega(\varrho,\ \varphi,\ g)$ die hier mit der Stammreihe (1) vorgenommene Operation, so kann für den linksseitigen Ausdruck in (3) symbolisch auch

$$\Omega(\varrho,\ \varphi,\ g)\,\Sigma a_n \varrho^n f(n\varphi)$$

geschrieben werden.

Wenn nur solche arithmetische Reihen entwickelt werden sollen, welche eine angebbare Summe besitzen, d. h. wo

$$\Sigma g(r) F(\varrho^r,\ r\varphi)$$

summirbar ist, so dürfen nur derartige Reihen als Stammreihen verwendet werden, bei welchen der Ausdruck F für ihre Summe die hiezu geeignete Form hat. Dies ist zwar bei keiner der bekannten summirbaren trigonometrischen Reihen (in ihrer gewöhnlichen Form) der Fall, kann aber durch Multiplication derselben mit einer schicklich gewälten Function erzielt werden.

In besonders einfacher Weise lassen sich die folgenden, aus der geometrischen Reihe entstandenen trigonometrischen Reihen zu Stammreihen umgestalten.

$$\Sigma \varrho^n \cos n\varphi = \frac{\cos\varphi - \varrho}{\Delta(\varphi)},\quad \Delta(\varphi) = 1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2 \qquad (4)$$

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi = \varrho\,\frac{\sin\varphi}{\Delta(\varphi)} \qquad (5)$$

$$\Sigma n\,\varrho^n \cos n\varphi = \varrho\,\frac{(1+\varrho^2)\cos\varphi - 2\varrho}{\Delta^2(\varphi)} \qquad (6)$$

$$\Sigma n\,\varrho^n \sin n\varphi = \varrho\,(1-\varrho^2)\,\frac{\sin\varphi}{\Delta^2(\varphi)} \qquad (7)$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \cos n\varphi = \varrho \frac{1-\varrho^2}{\Delta'(\varphi)} \cos\varphi, \quad \Delta'(\varphi) = 1-2\varrho^2\cos 2\varphi+\varrho^4 \quad (8)$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi = \varrho \frac{1+\varrho^2}{\Delta'(\varphi)} \sin\varphi \quad (9)$$

$$\left(\begin{matrix}\varrho^2 < 1 \\ \varphi \text{ beliebig}\end{matrix}\right)$$

Wird in diesen Ausdrücken der die Summirung hindernde Nenner $\Delta(\varphi)$, $\Delta'(\varphi)$ . . . auf die linke Seite geschafft, indem man Glied für Glied mit demselben multiplicirt, so können sofort aus den so vorbereiteten Reihen summirbare Reihen der angegebenen Art abgeleitet werden.

Selbstverständlich wird bei den Reihen in (4) und (6), deren Summen ein von $\left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\}$ freies Glied enthalten die specielle Operation Ω (φ, g) nicht angewendet werden dürfen. Ferner sind bei den Reihen in (8) und (9) nur ungerade Vielfache von φ zu substituiren.

Je nach der Art der, an den auf die nahe liegendste Weise zu transformirenden Reihen (4) . . . (9) vorzunehmenden Operationen $\Omega(\varrho, \varphi, g)$, welche, wenn kein Zweifel obwaltet, abkürzungsweise mit Ω bezeichnet werden mögen, werden die nachstehenden einfachsten Fälle zu verzeichnen sein.

1. $\Omega(\varrho, \varphi, 1)$. Es entsteht aus

(4) . . . $\Omega\Sigma\varrho^n\cos n\varphi \cdot \Delta(\varphi) = \Sigma_1 \varrho^n \cos n\psi - \Sigma\varrho^{2n}$

mit Benutzung derselben Formel (4) die neue Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{t=n} \Delta(\varrho^t, t\varphi) \cdot \varrho^n \cos n\varphi = \varrho \frac{\cos\varphi - \varrho}{\Delta(\varphi)} - \frac{\varrho^2}{1-\varrho^2} \quad (10)$$

Für $\varphi = 0$ ist

$$\Delta(\varrho^t, 0) = (1-\varrho^t)^2$$

daher

$$\sum_{n=1} \sum_{t=1}^{n} (1-\varrho^t)^2 \varrho^n = \frac{\varrho}{1-\varrho^2} \quad (11)$$

(5) . . . $\Omega\Sigma\varrho^n \sin n\varphi \cdot \Delta(\varphi) = \Sigma\varrho^n \sin n\varphi$

$$\Sigma\Sigma\Delta(\varrho^t, t\varphi)\varrho^n \sin n\varphi = \frac{\varrho\sin\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad (12)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist bei ungeradem t

$$\Delta\left(\varrho^t, t\frac{\pi}{2}\right) = 1+\varrho^{2t}$$

somit

$$\sum_{1.3.5\ldots}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \Sigma(1+\varrho^{2t}) = \frac{\varrho}{1+\varrho^2} \tag{13}$$

(6) . . . $\Omega\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) = \Sigma\varrho^n \cos n\varphi + \Sigma\varrho^{3n}\cos n\varphi - 2\Sigma\varrho^{2n}$

$$\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Sigma\frac{1}{t}\Delta^2(\varrho^t, t\varphi) = \varrho\,\frac{\cos\varphi-\varrho}{\Delta(\varphi)} + \varrho^3\frac{\cos\varphi-\varrho^3}{\Delta(\varrho^3, \varphi)} - 2\,\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2} \tag{14}$$

$\varphi = 0$

$$\Sigma n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}(1-\varrho^t)^4 = \frac{\varrho}{1-\varrho} - \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^2} + \frac{\varrho^3}{1-\varrho^3} \tag{15}$$

$\varphi = \pi$

$$\sum_{2.4.6\ldots}(-1)^n n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}\left[1+(-1)^{t-1}\varrho^t\right]^4 = -\frac{\varrho}{1+\varrho} - 2\,\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2} - \frac{\varrho^3}{1-\varrho^3} \tag{16}$$

(7) . . . $\Omega\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\,\Delta^2(\varphi) = \Sigma\varrho^n \sin n\varphi - \Sigma\varrho^{3n}\sin n\varphi$

$$\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\,\Sigma\frac{1}{t}\Delta^2(\varrho^t, t\varphi) = \varrho\,\frac{\sin\varphi}{\Delta(\varphi)} - \varrho^3\,\frac{\sin\varphi}{\Delta(\varrho^3, \varphi)} \tag{17}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sum_{1.3.5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}} n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}(1+\varrho^{2t})^2 = \varrho\,\frac{(1-\varrho^2)^2}{1+\varrho^6} \tag{18}$$

(8) . . . $\Omega \sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n \cos n\varphi\,\Delta'(\varphi) = \sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n\cos n\varphi - \sum_{1.3.5\ldots}\varrho^{3n}\cos n\varphi$

$$\sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n \cos n\varphi\,\Sigma\Delta'(\varrho^t, t\varphi) = \varrho\cos\varphi\left[\frac{1-\varrho^2}{\Delta'\varphi} - \frac{1-\varrho^6}{\Delta'(\varrho^3, \varphi)}\,\varrho^2\right] \tag{19}$$

$\varphi = 0$

$$\sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n \Sigma(1-\varrho^{2t})^2 = \varrho\,\frac{1+\varrho^4}{1-\varrho^6} \tag{20}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \varrho^n \Sigma[1-(-1)^t \varrho^{2t}]^2 = 0 \tag{21}$$

$$(9)\ \ldots\ \Omega \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta'(\varphi) = \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi + \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^{3n} \sin n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi \, \Sigma \Delta'(\varrho^t,\ t\varphi) = \varrho \sin\varphi \left[\frac{1+\varrho^2}{\Delta'(\varphi)} + \varrho^2 \frac{1+\varrho^6}{\Delta'(\varrho^3,\ \varphi)}\right] \tag{22}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \Sigma(1+\varrho^{2t})^2 = \varrho\, \frac{1+\varrho^4}{1+\varrho^6} \tag{23}$$

2. Allgemeinere Ergebnisse werden durch die Operation

$$\Omega(\varrho,\ \varphi,\ n^r),$$

wo r eine positive ganze Zal bedeutet, hervorgebracht.

Es entstehen Reihen, welche sich durch r malige Differentiation von

$$z = \frac{1}{1-\varrho x}, \quad x = e^{i\varphi}$$

nach φ ergeben.

Nach Hoppe's Theorie ist

$$D_\varphi{}^r z = i^r D_{i\varphi} z = i^r \left[\frac{E_1}{1!} x F'(x) + \frac{E_2}{2!} x^2 F''(x) \ldots + \frac{E_r}{r!} x^r F^{(r)}(x)\right]$$

wo

$$F(x) = \frac{1}{1-\varrho x} \quad \text{und} \quad F^{(k)} = \frac{k!\ \varrho^k}{(1-\varrho x)^{k+1}}$$

$$E_p = \{D_\varphi{}^r (e^\varphi - 1)^p\}_0 = \binom{p}{0} p^r - \binom{p}{1} (p-1)^r + \binom{p}{2} (p-2)^r \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} 1^r$$

daher

$$D_\varphi{}^r z = i^r \left[E_1 \frac{\varrho x}{(1-\varrho x)^2} + E_2 \frac{\varrho^2 x^2}{(1-\varrho x)^3} + \ldots + E_r \frac{\varrho^r x^r}{(1-\varrho x)^{r+1}} \right]$$
$$= i^r [1^r \varphi x + 2^r \varrho^2 x^2 + \ldots]$$

somit, nach Trennung des Imaginären vom Reellen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r \varrho^n \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} n\varphi = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\varrho^k}{[\Delta(\varphi)]^{\frac{k+1}{2}}} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(k\varphi + k+1 \operatorname{arctg} \frac{\varrho \sin \varphi}{1 - \varrho \cos \varphi} \right) \qquad (24)$$

Auf die Reihe (5) angewandt findet sich

$$\Omega \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \cdot \Delta(\varphi) = \Sigma n^r \varrho^n \sin n\varphi$$

daher

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi \, \Sigma t^r \Delta(\varrho^t, t\varphi) =$$
$$\sum_{k=1}^{k=r} \frac{\varrho^k}{[\Delta(\varphi)]^{\frac{k+1}{2}}} \sin \left(k\varphi + k+1 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\varrho \sin \varphi}{1 - \varrho \cos \varphi} \right) \right) \qquad (25)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \Sigma t^r (1 + \varrho^{2t}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\varrho^k}{(1+\varrho^2)^{\frac{k+1}{2}}} \sin \left(k\frac{\pi}{2} + k+1 \operatorname{arc\,tg} \varrho \right) \qquad (26)$$

3. Durch die Operation $\Omega \left(\varphi, \frac{1}{n^p} \right)$, wobei ϱ ungeändert bleibt, entstehen Reihen, welche mit Hilfe der Bernoulli'schen Function

$$\beta(z, m) = z^m - \tfrac{1}{2} m z^{m-1} + \binom{m}{2} B_1 z^{m-2} - \binom{m}{4} B_2 z^{m-4} \ldots$$
$$\ldots + \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{m-2} B_{\frac{m-2}{2}} z^2 & m \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\ldots + \begin{cases} (-1)^{\frac{m+1}{2}} B_{\frac{m-1}{2}} z & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

summirt werden können; es ist

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2\nu}} \cos n\varphi = \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!}\left[B_\nu + (-1)^{\nu+1}\beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu\right)\right] \qquad (27)$$

$$\nu > 0$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2\nu+1}} \sin n\varphi = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!}\beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu+1\right) \qquad (28)$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

Die aus den Reihen (4) bis (9) durch Ω entstehenden Beziehungen, welche die in der Gleichung (3) ausgesprochene Form besitzen, werden für jeden Wert von φ Giltigkeit haben; es steht daher frei, dieselbe nur für jenen Wertbereich von φ in Anspruch zu nehmen, für welchen $\Sigma \frac{1}{n^\nu} F(\varrho^n, n\varphi)$ summirbar wird, nämlich für

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

$$(5) \ldots \Omega\left(\varphi, \frac{1}{n^{2\nu+1}}\right) \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \varrho \Sigma \frac{1}{n^{2\nu+1}} \sin n\varphi$$

$$\sum_1 \sin n\varphi \sum^{n} \frac{\varrho^t}{t^{2\nu+1}} \Delta(t\varphi) = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!} \varrho\beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu+1\right) \qquad (29)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist

$$\Delta\left(t\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \varrho^2$$

diesen gemeinsamen Factor auf die rechte Seite gebracht, ist dann

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum^{n} \frac{\varrho^t}{t^{2\nu+1}} = \frac{\varrho}{1+\varrho^2} U_{2\nu+1} \qquad (30)$$

$$U_{2\nu+1} = \sum_{1.3.5\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{2\nu+1}} = \frac{\tau^{2\nu}\pi^{2\nu+1}}{2^{2\nu+2}(2\nu)!}$$

wo $\tau_{2\nu}$ der νte Secanten-Coefficient ist,

$$(7)\ \ldots\ \Omega\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\ .\ \Delta^2(\varphi) = \varrho(1-\varrho^2)\sum_1 \frac{1}{n^{2\nu+1}} \sin n\varphi$$

$$\sum_1 n \sin n\varphi \sum \frac{\overset{n}{\overset{-}{t}}}{t^{2\nu+2}} \Delta^2(t\varphi) = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!}\, \varrho(1-\varrho^2) \times \beta\left(\frac{\varphi}{2\pi},\ 2\nu+1\right) \qquad (31)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\quad \Delta^2\left(t\,\frac{\pi}{2}\right) = (1+\varrho^2)^2$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\Sigma \frac{\overset{n}{\overset{-}{t}}}{t^{2\nu+2}} = \varrho\,\frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2}\, U_{2\nu+1} \qquad (32)$$

$$(8)\ \ldots\ \Omega\left(\varphi,\ \frac{1}{n^{2\nu}}\right) \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \cos n\varphi\ .\ \Delta'(\varphi) = \varrho(1-\varrho^2) \sum_{1.3.5\ldots} \frac{1}{n^{2\nu}} \cos n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \cos n\varphi \sum \frac{\overset{n}{\overset{-}{t}}}{t^{2\nu}} \Delta'(t\varphi) = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!}\, \varrho(1-\varrho^2) \left[\left(1-\frac{1}{2^{2\nu}}\right) B_\nu + \beta\left(\frac{\varphi}{2\pi},\ 2\nu\right) - \frac{1}{2^{2\nu}}\, \beta\left(\frac{\varphi}{\pi},\ 2\nu\right)\right] \qquad (33)$$

$$\varphi = 0,\quad \Delta'(t\varphi) = (1-\varrho^2)^2$$

$$\sum_{n=1.3.5\ldots} \Sigma \frac{\overset{n}{\overset{-}{t}}}{t^{2\nu}} = \frac{\varrho}{1-\varrho^2}\, T_{2\nu} \qquad (34)$$

$$T_{2\nu} = \sum_{1.3.5\ldots} \frac{1}{n^{2\nu}} = \frac{(2^{2\nu}-1)\,B_\nu}{2(2\nu)!}\,\pi^{2\nu}$$

Sämtliche Reihen von (29) bis (34) sind giltig für $\varrho^2 < 1$ und $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

4. Die durch $\Omega\left(\varrho,\ \varphi,\ \frac{1}{n}\right)$ erzeugten Reihen werden summirt mittels der Formeln

$$\sum_{1.2.3\ldots} \frac{1}{n} \varrho^n \cos n\varphi = -\tfrac{1}{2}\log(1-2\varrho\cos\varphi+\varrho^2) = -\tfrac{1}{4}\log\Delta(\varphi) \quad (35)$$

$$\sum_{1.2.3\ldots} \frac{1}{n} \varrho^n \sin n\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) \quad (36)$$

$$\varrho^2 < 1, \quad \varphi \text{ beliebig}$$

(4) . . . $\Omega\, \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{1}{n} \varrho^n \cos n\varphi - \Sigma \frac{1}{n} \varrho^{2n}$

$$\Sigma \varrho^n \cos n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t} \Delta(t\varphi,\ \varrho^t) = \tfrac{1}{2}\log\frac{(1-\varrho^2)^2}{\Delta(\varphi)} \quad (37)$$

$$\varphi = 0, \quad \Delta(0,\ \varrho^t) = (1-\varrho^t)^2, \quad \Delta(0) = (1-\varrho)^2$$

$$\Sigma \varrho^n \Sigma \frac{1}{t} (1-\varrho^t)^2 = \log(1+\varrho) \quad (38)$$

$$\varphi = \pi, \quad \Delta(t\pi,\ \varrho^t) = (1-(-1)^t\varrho^t)^2, \quad \Delta(\pi) = (1+\varrho)^2$$

$$\sum_{2.4\ldots} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t} (1-(-1)^t\varrho^t)^2 - \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \Sigma \frac{1+\varrho^{2t}}{t} = \log(1-\varrho) \quad (39)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \ \Delta\left(t\frac{\pi}{2},\ \varrho^t\right) = \left(1-(-1)^{\frac{t}{2}}\varrho^t\right)^2 \quad (t \text{ gerade}),$$

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+\varrho^2$$

$$\sum_{2.4\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t}\left(1-(-1)^{\frac{t}{2}}\varrho^t\right)^2 = \tfrac{1}{2}\log\frac{(1-\varrho^2)^2}{1+\varrho^2} \quad (40)$$

(5) . . . $\Omega\, \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{1}{n} \varrho^n \sin n\varphi$

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t} \Delta(\varrho^t,\ t\varphi) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) \quad (41)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\left(\varrho,\ t\frac{\pi}{2}\right) = 1+\varrho^{2t}, \ t \text{ ungerade}$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \Sigma \frac{1+\varrho^{2t}}{t} = \operatorname{arc\,tg}\varrho \quad (42)$$

(6) . . . $\Omega \Sigma n \varrho^n \cos n\varphi \cdot \Delta^2(\varphi) =$

$$\Sigma \frac{1}{n} \varrho^n \cos n\varphi + \Sigma \frac{1}{n} \varrho^{3n} \cos n\varphi - 2\Sigma \frac{1}{n} \varrho^{2n}$$

$$\Sigma n \varrho^n \cos n\varphi \; \Sigma \frac{1}{t^2} \Delta^2(\varrho^t, t\varphi) = \tfrac{1}{2} \log \frac{(1-\varrho^2)^4}{\Delta(\varrho, \varphi) \cdot \Delta(\varrho^3, \varphi)} \tag{43}$$

$$\varphi = 0, \quad \Delta^2(\varrho^t, 0) = (1-\varrho^t)^4, \quad \Delta(0) = (1-\varrho)^2$$

$$\Sigma n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t^2} (1-\varrho^t)^4 = \log \frac{(1+\varrho)^2}{1+\varrho+\varrho^2} \tag{44}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta^2\left(\varrho^t, t\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 - (-1)^{\frac{t}{2}} \varrho^t\right)^4$$

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+\varrho^2$$

$$\sum_{2.4\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t^2} \left(1 - (-1)^{\frac{t}{2}} \varrho^t\right)^4 = \tfrac{1}{2} \log \frac{(1-\varrho^2)^4}{(1+\varrho^2)(1+\varrho^6)} \tag{45}$$

$$\varphi = \pi, \quad \Delta^2(\varrho^t, t\pi) = (1-(-1^t \varrho^t)^4, \quad \Delta(\pi) = (1+\varrho)^2$$

$$\sum_{1.2\ldots} (-1)^n n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t^2} (1-(-1)^t \varrho^t)^4 = \log \frac{(1-\varrho)^2}{1-\varrho+\varrho^2} \tag{44'}$$

Diese Formel geht übrigens auch aus (44) durch Vertauschung von ϱ mit $-\varrho$ hervor.

(7) . . . $\Omega \Sigma n \varrho^n \sin n\varphi \cdot \Delta^2(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^n}{n} \sin n\varphi - \Sigma \frac{\varrho^{3n}}{n} \sin n\varphi$

$$\Sigma n \varrho^n \sin n\varphi \; \Sigma \frac{1}{t^2} \Delta^2(t\varphi, \varrho^t) =$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho \sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho^3 \sin\varphi}{1-\varrho^3\cos\varphi}\right) \tag{46}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta^2\left(t\frac{\pi}{2}\right) = (1+\varrho^{2t}) \quad (t \text{ ungerade})$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)\, n \varrho^n \Sigma \frac{(1+\varrho^{2t})^2}{t^2} = \operatorname{arc\,tg}\varrho - \operatorname{arc\,tg}\varrho^3 \tag{47}$$

(8) . . . $\Omega \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \cos n\varphi \cdot \Delta'(\varphi) =$

$$\sum_{1.6.5\ldots} \frac{\varrho^n}{n} \cos n\varphi - \sum_{1.3.5\ldots} \frac{\varrho^{3n}}{n} \cos n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \cos n\varphi \, \Sigma \frac{1}{t} \Delta'(t\varphi,\ \varrho^t) = \tfrac{1}{4} \log \frac{\Delta'(\varrho,\ \varphi)}{\Delta^2(\varphi,\ \varrho)} \cdot \frac{\Delta^2(\varphi,\ \varrho^3)}{\Delta'(\varphi,\ \varrho^3)} \tag{48}$$

$$\varphi = 0, \quad \Delta'(t\varphi) = (1-\varrho^t)^2$$

$$\sum_{1.3.4\ldots} \varrho^n \, \Sigma \frac{(1-\varrho^t)^2}{t} = \tfrac{1}{2} \log \frac{(1+\varrho+\varrho^2)^2}{1+\varrho^2+\varrho^4} \tag{49}$$

$$(9) \ldots \Omega \sum_{1.3.5\ldots,} \varrho^n \sin n\varphi \cdot \Delta'(\varphi) =$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \frac{1}{n} \varrho^n \sin n\varphi + \sum_{1.3.5,\ldots} \frac{1}{n} \varrho^{3n} \sin n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi \, \Sigma \frac{1}{t} \Delta'(t\varphi,\ \varrho^t) =$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho \sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho^2 \sin 2\varphi}{1-\varrho^2\cos 2\varphi}\right)$$

$$+ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho^3 \sin\varphi}{1-\varrho^3\cos\varphi}\right) - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho^6 \sin 2\varphi}{1-\varrho^6\cos 2\varphi}\right) \tag{50}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta'\left(t\frac{\pi}{2},\ \varrho^t\right) = (1-(-1)^t\,\varrho^{2t})^2$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \, \Sigma \frac{1}{t} (1-(-1)^t\,\varrho^{2t})^2 = \operatorname{arc\,tg}\varrho + \operatorname{arc\,tg}\varrho^3 \tag{51}$$

Die Formeln von (37) bis (51) gelten bei beliebigem φ für $\varrho^2 < 1$.

Mit Beachtung des Umstandes, dass die Reihe $\frac{\Sigma \varrho^n \cos n\varphi}{n}$ für $0 \leqq \varphi < \pi$ noch für $\varrho = \pm 1$ convergent ist, während $\Sigma \frac{\varrho^{2n}}{n}$ für diese Werte divergirt, kann man in der Formel (48), in welcher letztere Reihe nicht erscheint,

$$\varrho = +1$$

setzen und erhält

$$\sum_{1.3.5\ldots} \cos n\varphi \, \Sigma \frac{1}{t} \sin^2 t\varphi = 0 \tag{52}$$

$$0 \leqq \varphi \leqq \pi$$

hieraus folgt für

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{1.35\ldots} (-1)^{\frac{n+(-1)}{4}} \sum \frac{1}{t} = 0 \tag{53}$$

oder

$$\sum_{1:5.9\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{4}} \sum \frac{1}{t} = \sum_{n=3.7.11\ldots} (-1)^{\frac{n-3}{4}} \sum \frac{1}{t} \tag{53'}$$

5. Nimmt man die Operation Ω so vor, dass man die aus den Stammreihen durch die Einsetzungen ϱ^r, $r\varphi$ erhaltenen Reihen vorerst mit dem Vorzeichen $(-1)^r$ versieht und dann so verfährt wie früher, so entstehen aus den Reihen (4) und (6) Resultate, welche für $\varrho = \pm 1$ noch richtig bleiben, wenn die Amplitude φ der Bedingung

$$0 < \varphi < \pi$$

genügt.

$$(4) \ldots \Omega' \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma(-2)^r \frac{\varrho^r}{r} \cos r\varphi - \Sigma(-1)^r \frac{\varrho^{2r}}{r}$$

$$\Sigma \varrho^n \cos n\varphi \, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \Delta(t\varphi, \varphi^t) = -\tfrac{1}{2} \log \frac{\Delta(\varphi)}{\Delta'(\varphi)} + \log(1+\varrho^2) \tag{54}$$

$$\varrho = +1, \quad \Delta(t\varphi) = 4 \sin^2 \frac{t\varphi}{2}$$

$$\sum_{1.2.3\ldots} \cos n\varphi \, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \sin^2 \frac{t\varphi}{2} = \tfrac{1}{4} \log 4 \cos \frac{\varphi}{2} \tag{55}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \sin^2 \frac{t\pi}{4} = \tfrac{3}{8} \log 2 \tag{56}$$

$$\varrho = -1, \quad \Delta(t\varphi) = 4 \cos^2 \frac{t\varphi}{2}$$

$$\Sigma(-1)^n \cos n\varphi \, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \cos^2 \frac{t\varphi}{2} = \tfrac{1}{4} \log \left(4 \sin \frac{\varphi}{2}\right) \tag{57}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}\sum(-1)^t\frac{1}{t}\cos^2\frac{t\pi}{4}=\frac{1}{8}\lg 2 \tag{58}$$

$$(6)\ \ldots\ \Omega'\sum n\varrho^n\cos n\varphi\ .\ \Delta^2(\varphi)=\sum(-1)^r\frac{\varrho^r}{r}\cos r\varphi$$
$$+\sum(-1)^r\frac{\varphi^{2r}}{r}\cos r\varphi-2\sum(-1)^r\frac{\varrho^r}{n}$$

$$\sum n\varrho^n\cos n\varphi\sum(-1)^t\frac{1}{t^2}\Delta^2(t\varphi)=$$
$$-\frac{1}{2}\lg\frac{\Delta(\varrho,\ \varphi)}{\Delta(\varrho^2,\ 2\varphi)}\frac{\Delta(\varrho^2,\ \varphi)}{\Delta(\varrho^4,\ 2\varphi)}+2\lg(1+\varrho^2) \tag{59}$$

$$\varrho=\pm 1,\quad \Delta(t\varphi)=\begin{cases}4\sin\dfrac{2t\varphi}{2}\\[2ex] 4\cos^2\dfrac{t\varphi}{2}\end{cases}$$

$$\sum n\cos n\varphi\sum(-1)^t\frac{1}{t^2}\sin^4\frac{t\varphi}{2}=\frac{1}{8}\lg 4\cos\frac{\varphi}{2} \tag{60}$$

$$\sum(-1)^n n\cos n\varphi\sum(-1)^t\frac{1}{t^2}\cos^4\frac{t\varphi}{2}=\frac{1}{8}\lg 4\sin\frac{\varphi}{2} \tag{61}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4.6\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}\sum(-1)^t\frac{1}{t^2}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}^4\frac{t\pi}{4}=\frac{3}{16}\lg 2 \tag{62}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\sum_{2.4.6\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}n\left[\sum_{2.6\ldots}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\sum_{1.3.5\ldots}\frac{1}{t^2}\right]\\ \sum_{2.4.6\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}n\left[\sum_{4.8\ldots}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\sum_{1.3.5\ldots}\frac{1}{t^2}\right]\end{aligned}\right\}=\frac{3}{16}\lg 2 \tag{62'}$$

hieraus folgt noch

$$\sum_{2\ .4.6\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}n\sum_{2.6\ldots}\frac{1}{t^2}=\sum_{2[4.8\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}n\sum_{4.8\ldots}\frac{1}{t^2} \tag{62''}$$

6. Aus $\Omega\left(\varrho,\ \varphi,\ \frac{1}{n!}\right)$ gehen nachstehende Reihen hervor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n!} \cos n\varphi = e^{\varrho\cos\varphi} \cos(\varrho \sin\varphi) \tag{63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varrho^n \sin n\varphi = e^{\varrho\cos\varphi} \sin(\varrho \sin\varphi) \tag{64}$$

die gelten für jedes ϱ und φ.

(4) . . . $\Omega \Sigma_\varrho{}^n \cos n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^r}{r!} \cos r\varphi - \Sigma \frac{\varrho^{2r}}{r!}$

$$\Sigma \varrho^n \cos n\tau \; \Sigma \frac{1}{t!} \Delta(t\varphi,\ \varrho^t) = e^{\varrho\cos\varphi} \cos(\varrho \sin\varphi) - e^{\varrho^2} \tag{65}$$

$$\varphi = 0; \qquad \sum_{1.2.3\ldots} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t!} (1-\varrho^t)^2 = e^{\varrho} - e^{\varrho^2} \tag{66}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\sum_{2.4\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t!} \left(1 - 2\varrho^t \cos\frac{t\pi}{2} + \varrho^{2t}\right) = \cos\varrho - e^{\varrho^2} \tag{67}$$

$$\varphi = \pi; \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t!} (1-(-1)^t \varrho^t) = e^{-\varrho} - e^{\varrho^2} \tag{68}$$

(5) . . . $\Omega 2\varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^r}{r!} \sin r\varphi$

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi \; \Sigma \frac{1}{t!} \Delta(\varrho^t,\ t\psi) = e^{\varrho\cos\varphi} \sin(\varrho \sin\varphi) \tag{69}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \qquad \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t!} (1+\varrho^{2t}) = \sin\varrho \tag{70}$$

(6) . . . $\Omega \Sigma n\varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) =$

$$\Sigma \frac{\varrho^r}{r!} \cos r\varphi + \Sigma \frac{\varrho^{3r}}{r!} \cos r\varphi - 2\Sigma \frac{\varrho^{2r}}{r!}$$

$$\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Sigma \frac{1}{t!\,t} \Delta^2(\varrho^t,\, t\varphi) = e^{\varrho\cos\varphi}\cos(\varrho\sin\varphi) + e^{\varrho^3\cos\varphi}\cos(\varrho^3\sin\varphi) - 2e^{\varrho^3} \tag{71}$$

$$\varphi = 0; \qquad \Sigma n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t!\,t}(1-\varrho^t)^4 = e^{\varrho} - 2e^{\varrho^3} + e^{\varrho^3} \tag{72}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\sum_{n=1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t!\,t}(1+\varrho^{2t})^2 = \cos\varrho + \cos\varrho^3 - 2e^{\varrho^3} \tag{73}$$

$$\varphi = \pi;$$

$$\Sigma(-1)^n n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t!\,t}(1-(-1)^t\varrho^t)^4 = e^{-\varrho} - 2e^{\varrho^3} + e^{-\varrho^3} \tag{74}$$

$$(7)\ .\ .\ .\ \Omega\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^r}{r!}\sin r\varphi - \Sigma \frac{\varrho^{3r}}{r!}\sin r\varphi$$

$$\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t!\,t}\Delta^2(\varrho^t,\, t\varphi) = e^{\varrho\cos\varphi}\sin(\varrho\sin\varphi) - e^{\varrho^3\cos\varphi}\sin(\varrho^3\sin\varphi) \tag{75}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\sum_{1,3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t!\,t}(1+\varrho^{2t})^2 = \sin\varrho - \sin\varrho^3 \tag{76}$$

Sämtliche Reihen gelten bei beliebigem φ für $\varrho^2 < 1$.

7. Mittelst $\Omega\left(\varrho,\ \varphi,\ \binom{m}{n}\right)$, wo m ein Bruch oder eine negative ganze Zal ist, gelangt man zu

$$1+\Sigma\binom{m}{n}\varrho^n\cos n\varphi = \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi)\cos\left(m\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$1+\Sigma\binom{m}{n}\varrho^n\sin n\varphi = \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi)\sin\left(m\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$\Delta_1(\varphi) = 1 + 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2$$

$$(4) \ldots \Omega\Sigma\varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta_1(\varphi) = \Sigma\binom{m}{n}\varrho^n \cos n\varphi - \Sigma\binom{m}{n}\varrho^{2n}$$

$$\Sigma\varrho^n \cos n\varphi\, \Sigma\binom{m}{t}\Delta_1(t\varphi,\ \varrho^t) = -(1+\varrho^2)^m + \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi)\cos\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$\varphi = 0; \quad \sum_{1.2.3\ldots}\varrho^n \Sigma\binom{m}{t}(1-\varrho^t)^2 = (1+\varrho)^m - (1+\varrho^2)^m \qquad (77)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sum_{2.4.6\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}\varrho^n\ \Sigma\binom{m}{t}\left(1 - 2\varrho^t\cos\frac{t\pi}{2} + \varrho^{2t}\right)$$

$$= -(1+\varrho^2) + (1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}}\cos(m \operatorname{arc\,tg}\varrho) \qquad (78)$$

$$\varphi = \pi;\ \Sigma(-1)^n\varrho^n\Sigma\binom{m}{t}[1-(-1)^t\varrho^t]^2 = (1-\varrho)^m - (1+\varrho^2)^m \qquad (79)$$

$$(5) \ldots \Omega\Sigma\varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma\binom{m}{n}\varrho^n \sin n\varphi$$

$$\Sigma\varrho^n \sin n\varphi\ \Sigma\binom{m}{t}\Delta(\varrho^t,\ \varphi t) =$$

$$= -1 + \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi)\sin\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right) \qquad (80)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sum_{1.3.5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\varrho^n\ \Sigma\binom{m}{t}(1+\varrho^{2t}) =$$

$$-1 + (1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}}\sin(m \operatorname{arc\,tg}\varrho) \qquad (81)$$

$$(6)\ \ldots\ \Omega\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi \cdot \Delta^2(\varphi) = \Sigma\binom{m}{n}\varrho^n \cos n\varphi + \Sigma\binom{m}{n}\varrho^{3n}\cos n\varphi - 2\Sigma\binom{m}{u}\varrho^{2n}$$

$$\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi\, \Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}\Delta^2(\varrho^t,\ t\varphi) =$$

$$\Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi,\ \varrho)\cos\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$+\Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varrho^2,\varphi)\cos\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho^2\sin\varphi}{1+\varrho^2\cos\varphi}\right) - (1+\varrho^2)^m \qquad (82$$

$$\varphi = 0;$$

$$\Sigma n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}(1-\varrho^t)^4 = (1+\varrho)^m + (1+\varrho^2)^m - (1+\varrho^2)^m \qquad (83)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};\quad \underset{2.4\ \ldots}{\Sigma}\ (-1)^{\frac{n}{2}} n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}\left(1-2\varrho^t\cos\frac{t\pi}{2}+\varrho^{2t}\right)^2$$

$$-(1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}}\cos(m\operatorname{arc\,tg}\varrho) + (1+\varrho^6)^{\frac{m}{2}}\cos(m\operatorname{arc\,tg}\varrho^3) - (1+\varrho^2)^m \qquad (84)$$

$$\varphi=\pi;\ \Sigma(-1)^n n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}(1-(-1)^t\varrho^t)^4 = (1-\varrho)^m - (1+\varrho^2)^m + (1-\varrho^2)^m \qquad (85)$$

$$(7)\ \ldots\ \Omega\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi \cdot \Delta^2(\varphi) = \Sigma\binom{m}{n}\varrho^n \sin n\varphi - \Sigma\binom{m}{n}\varrho^{3n}\sin n\varphi$$

$$\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}\Delta^2(\varrho^t,\ t\varphi) =$$

$$\Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi,\ \varrho)\sin\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$-\Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varrho^3,\ \varphi)\sin\left(m\operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho^3\sin\varphi}{1+\varrho^3\cos\varphi}\right) \tag{86}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2};\quad \sum_{1.3.5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\varrho^n\Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}(1+\varrho^{2t})^2=$$

$$(1+\varrho^3)^{\frac{m}{2}}\sin(m\operatorname{arc\,tg}\varrho)-(1+\varrho^6)^{\frac{m}{2}}\sin(m\operatorname{arc\,tg}\varrho^3) \tag{87}$$

8. Die Operation $\Omega\left(\varrho,\ \varphi,\ \frac{\mu}{n^2-\mu^2}\right)$ führt zu

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\mu\cos n\varphi}{n^2-\mu^2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi}+\frac{1}{2\mu} \tag{88}$$

wo μ keine ganze Zal ist, und φ der Bedingüng

$$0\leq\varphi\leq 2\pi$$

unterworfen ist.

Da dieselbe ϱ ungeändert lässt, so kann sie auch nur auf die Reihe (8), welche kein von $\cos\varphi$ freies Glied im Zäler enthält, angewendet werden; man erhält, wenn nur ungerade Vielfache von φ genommen werden,

$$(8)\ \ldots\ \Omega\Sigma\varrho^n\cos n\varphi\ \Delta'(\varphi)=\varrho(1-\varrho^2)\sum_{n=1.3.\ldots}\frac{\mu}{n^2-\mu^2}\cos n\varphi$$

$$0\leq\varphi\leq\pi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots}\cos n\varphi\,\Sigma\frac{\varrho}{t^2-\mu^2}^{\frac{n}{t}}\Delta'(t\varphi)=$$

$$\frac{\pi}{4\mu}\varrho(1-\varrho^2)\left(\frac{\cos\frac{\mu}{2}(\pi-2\varphi)}{\sin\frac{\mu\pi}{2}}-2\frac{\cos\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi}\right) \tag{89}$$

$$\varphi=0;\ \sum_{n=1.3.5\ldots} \Sigma_{t}^{n} \frac{\varrho}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{4\mu}\,\varrho\,\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^4}\left(\cot\frac{\mu\pi}{2} - 2\cot\mu\pi\right) \tag{90}$$

$$\mu = \tfrac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1.2.5\ldots} \Sigma_{t}^{n} \varrho^{t}\,\frac{1}{4t^2-1} = \frac{\pi}{8}\,\varrho\,\frac{1-\varrho^2}{1-\varrho^4} \tag{90'}$$

$$\varrho^2 < 1$$

9. Die Operation $\Omega\left(\varphi, \frac{n}{n^2-\mu^2}\right)$, wo μ keine ganze Zal ist, erzeugt mit Benutzung von

$$\Sigma \frac{n\sin n\varphi}{n^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi}$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

aus (5) . . . $\Omega\Sigma\varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \varrho\,\Sigma\frac{n\sin n\varphi}{n^2-\mu^2}$

die Identität

$$\Sigma n\sin n\varphi\,\Sigma_{t}^{1}\varrho^{t}\,\frac{\Delta(t\varphi)}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2}\,\varrho\,\frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} \tag{91}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};\quad \sum_{1.3.5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n\Sigma_{t}^{1}\frac{\varrho^{t}}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{\varrho}{1+\varrho^2}\,\frac{1}{\cos\frac{\mu\pi}{2}} \tag{92}$$

$$(7)\ .\ .\ .\ \Omega\Sigma n\varrho^n\sin n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) = \varrho(1-\varrho^2)\,\Sigma\frac{n\sin n\varphi}{n^2-\mu^2}$$

$$\Sigma n\sin n\varphi\,\Sigma_{t}^{n}\varrho^{t}\,\frac{\Delta^2(t\varphi)}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2}\,\varrho(1-\varrho^2)\,\frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} \tag{93}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2} \varrho \frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2} \frac{1}{\cos\frac{\mu\pi}{2}} \quad (94)$$

Wenn wieder nur ungerade Vielfache von φ substituirt werden, kommt aus

$$(9) \ldots \Omega \quad \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \cdot \Delta'(\varphi) = \varrho(1+\varrho^2) \Sigma \frac{n \sin n\varphi}{n^2-\mu^2}$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} n \sin n\varphi \, \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t} \frac{\Delta'(t\varphi)}{t^2-\mu^2} =$$

$$\frac{\pi}{4} \varrho(1+\varrho^2) \left[2 \frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} - \frac{\sin\frac{\mu}{2}(\pi-2\varphi)}{\sin\frac{\mu\pi}{2}} \right]$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \quad (95)$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ ergiebt sich noch aus

$$(92) \ldots \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \Sigma \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{4t^2-1} \cdot \varrho^{\frac{n}{t}} = \frac{\pi}{16} \sqrt{2} \frac{\varrho}{1+\varrho^2} \quad (92')$$

$$(94) \ldots \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \Sigma \frac{1}{4t^2-1} \cdot \varrho^{\frac{n}{t}} = \frac{\pi}{8} \sqrt{2} \cdot \varrho \frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2} \quad (94')$$

10. Wird die im Absatz (5) angegebene Modification auch bei den anderen Operationen angenommen, so ergeben sich Formeln, welche sich von den hier entwickelten nur dadurch unterscheiden. dass der Ausdruck unter dem zweiten Summenzeichen linker Hand das Vorzeichen $(-1)^t$ besitzt, während in dem rechtsseitigen Teile $-\varrho$ für $+\varrho$ steht.

Brünn, August 1891.

V.

Ueber die durch dielektrische und magnetische Polarisation hervorgerufenen Volum- und Formänderungen (Elektrostriction und Magnetostriction).

Von

Dr. **F. Pockels.**

Schon Volta hat im Jahre 1776 die Aufmerksamkeit auf die Tatsache gelenkt, dass sich das innere Volum einer Leydener Flasche bei deren Ladung vergrössert, und hat auch bereits richtig vermutet, dass der Grund jener Ausdehnung in der gegenseitigen Anziehung der Belegungen zu suchen sei.

Die erwähnte Erscheinung gerieth dann, wie es scheint, in Vergessenheit, bis sie 1864 von Govi [1]) wieder aufgefunden wurde doch erst 1878 wurde sie von Duter [2]) näher untersucht, welcher glaubte, es mit einer ganz neuen rätselhaften Wirkung der Elektricität zu tun zu haben. Der Arbeit Duter's folgten bald zahlreiche experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Volum- und Formänderung dielektrischer Körper im elektrischen Felde. Das erhöhte Interesse, welches die Physiker seit 1879 diesem Gebiete

1) Govi, Nuovo Cimento XXI—XXII, p. 18—26, 1865—66; Atti della R. Accad. delle Scienze diTorino, I, 206—220, 1866; ferner auch Compt. rend. LXXXVII, p. 857, 1878.

2) Duter, Compt. rend. LXXXVII, p. 828, 960, 1036, 1878; LXXXVIII, 1260, 1879; auch Journ. de phys. VIII, p. 82, 1879.

der sogenannten Elektrostriction zuwandten, erklärt sich wol zum Teil durch die zunehmende Verbreitung der von Faraday begründeten und von Maxwell weiter durchgeführten Anschauung, nach welcher die elektrostatischen und magnetischen Kräfte nicht auf unvermittelter Fernwirkung, sondern auf einem gewissen Spannungszustande des Mediums, welches die scheinbar auf einander wirkenden Körper trennt, beruhen sollen. Denn es lag nahe, zu vermuten, dass jene Spannungen von Deformationen des Zwischenmediums begleitet sein würden, und durch einen experimentellen Nachweis solcher Deformationen eine Bestätigung der Maxwell'schen Theorie zu suchen.

Wir wollen nun im Folgenden sehen, ob die Erscheinungen der Elektrostriction und die analogen der Magnetostriction, d. h. die Volum- und Formänderungen elektrisch oder magnetisch polarisirter Körper, zu einer solchen Bestätigung überhaupt führen können oder aber sich nach der alten Theorie ebensogut erklären lassen. Wenn dabei zumeist nur von den Erscheinungen im elektrischen Felde die Rede seinwird, so sei im Voraus bemerkt, dass Alles auf die entsprechenden magnetischen Wirkungen übertragbar ist, indem man die elektrische Kraft mit der magnetischen, die Dielektricitätsconstante mit der Magnetisirungsconstante (magnetischen Permeabilität) vertauscht und das absolute magnetische Maasssystem statt des elektrischen benutzt.

Die Maxwell'sche Theorie für isotrope Medien.

Nach der Theorie Maxwell's besteht in einem isotropen dielektrischen Medium, welches irgendwelche elektrisch geladene Körper umgiebt, ein Spannungszustand von der besonderen Art, dass sich das Medium parallel den elektrischen Kraftlinien zusammenzuziehen und in allen Richtungen senkrecht gegen dieselben mit einer gleich grossen Kraft auszudehnen strebt; dieser Zug parallel den Kraftlinien und Druck senkrecht dazu ist der absoluten Grösse nach gleich $\frac{K}{8\pi}.R^2$, wo K die Dielektricitätsconstante des Mediums, R die in absolutem elektrostatischen Maasse gemessene elektrische Kraft nach der „polaren Definition" (also gleich dem Potentialgefälle) ist. Für den freien Aether hat K den Wert 1, auch dort sind also nach Maxwell solche Spannungen vorhanden. Nach der in der Elasticitätstheorie gebräuchlichen Bezeichnungsweise würde das erwähnte Spannungssystem in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem X, Y, Z die Componenten besitzen:

1)
$$
\left|\begin{aligned}
A_x &= -\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\\
B_y &= -\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right\}\\
C_z &= -\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}\\
B_z = C_y &= -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\
A_z = C_x &= -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\
A_y = B_x &= -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}
\end{aligned}\right.
$$

wobei φ das (gesamte) elektrische Potential bedeutet.

Aus den bekannten Eigenschaften des letzteren lässt sich leicht ableiten, (wie es für den Fall $K = 1$ schon 1843 durch W. Thomson geschehen ist) dass das vorstehende Spannungssystem vollständig äquivalent ist den Kraftcomponenten, welche sich aus dem Coulomb'schen Gesetze ergeben, und in der Tat ist Maxwell zu den Gleichungen 1) durch eine blosse mathematische Umformung der bekannten Ausdrücke für jene Kraftcomponenten gelangt. Gegen diese Ableitung ist der Einwand erhoben worden [1]), dass sie willkürlich sei, da man unendlich viele andere Spannungssysteme angeben könne, welche ebenfalls den bekannten elektrostatischen Kräften aequivalent seien. In der Tat bleibt die auf geladene Conductoren ausgeübte Kraft die gleiche, wenn man die Drucke senkrecht zu den Kraftlinien beliebig ändert, weil ja die Conductoroberflächen von den Kraftlinien stets senkrecht getroffen werden. „Aber nur die Max-„well'schen Spannungen genügen der unerlässlichen Bedingung, dass „sie sich an jedem Volumelement des Dielektricums, welches keine „elektrische Ladung enthält, das Gleichgewicht halten" [2]).

---

1) Vergl. z. B. Poincaré, Electricité et optique, I, p. 86; ferner A. Seydler, Sitzungsber. der böhmischen Ges. der Wissensch. Prag 1882, Beiblätter VII, p. 551; Adler, Sitzungsber. der Wiener Akademie 89, (2) p. 594, 1884.

2) Dass dies in der Tat der Fall ist, erkennt man sofort, indem man aus den Gl. 1) die Kraftcomponenten

In Folge dieser Eigenschaft nun kommen die betrachteten Spannungen im Inneren eines (keine freie Elektricität enthaltenden) Dielektricums überhaupt nicht zur Geltung: es verhält sich so, als ob sie dort gar nicht existirten, und nur auf die Oberfläche des Dielektricums Kräfte ausgeübt würden. An den „Grenzflächen gegen Conductoren" gelangt der Zug parallel den Kraftlinien voll zur Wirkung, sofern also nicht aus mechanischen Ursachen, z. B. der Elasticität des Conductors, noch andere Kräfte auf diese Grenzflächen hinzukommen, ist das Resultat dasselbe, als ob daselbst auf das Dielektricum von aussen ein „normaler Druck" $\frac{K}{8\pi} R^2$ ausgeübt würde. Auf eine „Grenzfläche gegen ein anderes Dielektricum" wirkt die Resultirende derjenigen Kräfte, welche sich nach der aus der Elasticitätstheorie bekannten Regel aus den im Inneren eines jeden Dielektricums vorhandenen Spannungen ergeben, und deren X-Componenten also sind:

$-A_n = -A_x \cos(n, x) - A_y \cos(n, y) - A_z \cos(n, z)$ im ersten,
$+A_n' = +A_x' \cos(n, x) + A_y' \cos(n, y) + A_z' \cos(n, z)$ im zweiten Dielektricum, wenn n die Richtung der in das erste Medium hineinführenden Normale der Grenzfläche bezeichnet. Die Spannungen $A_x', A_y', A_z' \ldots$ sind durch die Formeln 1) gegeben, wenn darin K durch die Dielektricitätsconstante K' des zweiten Mediums ersetzt wird. Dabei ist aber zu beachten, dass die zur Grenzfläche senkrechten Componenten der polar definirten elektrischen Kraft beiderseits nicht gleich sind, sondern sich umgekehrt verhalten wie die Dielektricitätsconstanten, so dass also die Relation besteht:

$$A = -\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

. . . . . .

berechnet; man findet z. B.

$$A = -\frac{K}{4\pi} \Delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{und} \quad \Delta\varphi \text{ ist } = 0$$

wo keine freie Elektricität vorhanden ist. Wolbemerkt gilt dies aber nur für den bei unserer Betrachtung immer vorausgesetzten Fall der Gleichgewichtsverteilung der elektrischen Kraft. Bei nicht stationären Zuständen, z. B. bei elektrischen Schwingungen, würden auch die Maxwell'schen Spannungen das Innere der Dielektrica nicht in Ruhe verharren lassen; jedoch würden unter den bei unsern Versuchen herstellbaren Verhältnissen daraus beobachtbare Bewegungen der Materie nicht hervorgehen. (Vergl. Hertz, Wied. Ann. 41, p. 398; 1891). Einen einfachen Beweis, dass die Gleichgewichtsbedingung notwendig auf die Maxwell'schen Spannungen führt, gab auch Vaschy. Compt. rend. CIII, p. 1186.

$$K\frac{\partial\varphi}{\partial n} = K'\left(\frac{\partial_T}{\partial n}\right)$$

Mit Rücksicht auf diese findet man als Componenten der resultirenden Kraft an der Grenzfläche:

2.

$$\left|\begin{aligned}
\overline{A} = A_n' - A_n &= \frac{K'-K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{K-K'}{K'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right\}\cos(n,\ x)\\
\overline{B} = B_n' - B_n &= \frac{K'-K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{K-K'}{K'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right\}\cos(n,\ y)\\
\overline{C} = C_n' - C_n &= \frac{K'-K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{K-K'}{K'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right\}\cos(n,\ z)
\end{aligned}\right.$$

Aus der Form dieser Ausdrücke geht hervor, dass auch die auf die „Grenzfläche zweier Dielektrica" wirkende Kraft stets senkrecht zu dieser Fläche gerichtet ist und zwar in einem „normalen Druck" gegen das Medium mit kleinerer Dielektricitätsconstante besteht.

Die soeben näher bestimmten, auf die Oberfläche eines dielektrischen Körpers im elektrischen Felde wirkenden Druckkräfte haben nun, sofern ihnen nicht mechanische Kräfte entgegenwirken, eine Deformation des Körpers zur Folge, welche aus ihnen (für feste Dielektrica) nach den gewöhnlichen Regeln der Elasticitätstheorie zu berechnen ist. „Ganz verkehrt ist dagegen die nicht „selten [1]) anzutreffende Ansicht, dass im Inneren des Dielektricums „an jeder Stelle Deformationen stattfinden müssten, wie sie sich aus „den dort herrschenden Maxwell'schen Spannungen $A_x, \ldots B_x, \ldots$ „unmittelbar nach den linearen Grundgleichungen der Elasticitäts-„theorie ergeben würden," woraus u. A. folgen würde, dass in flüssigen Körpern, in welchen keine anderen als allseitig gleiche Dilatationen möglich sind, der Maxwell'sche Spannungszustand überhaupt nicht bestehen könnte [2]). Veranlasst ist diese irrtümliche Auffassung

1) Z. B. sogar in Poincaré's Electricité et optique, I, p. 90. 1890.

2) Dies macht noch jüngst P. Duhem in seinen „Leçons sur l'électricité et le magnétisme", Tome II. (Paris 1892), p. 457 als besonders gewichtigen

jedenfalls dadurch, dass man aus der Elasticitätstheorie gewohnt ist, Spannungen und Deformationen als untrennbar mit einander verbunden zu betrachten, „Der Zwangszustand im polarisirten Dielek-„tricum soll aber nach Maxwell gar nicht aus der Elasticitätstheorie „erklärt werden," sondern ist als von einer ganz anderen, ihrem Wesen nach völlig unbekannten Ursache herrührend anzusehen [1]). Demnach berührt es die Maxwell'sche Anschauung nicht, dass die von ihr angenommene Druckverteilung, wie sie durch die Gleichungen 1) gegeben ist, als Folge der Deformationen eines den gewöhnlichen Gesetzen der Elasticitätstheorie gehorchenden Mediums im allgemeinen nicht auftreten kann, weil diejenigen 6 Differentialgleichungen 2ter Ordnung, welchen die elastischen Druckcomponenten zufolge ihrer linearen Abhängigkeit von den Differentialquotienten der Verrückungen genügen [2]), nach 1) auf ebensoviele Differentialgleichungen für das elektrische Potential φ führen würden, die von diesem nur in ganz speciellen Fällen erfüllt werden können [3]).

Spannungszustand in ponderabelen Dielektricis nach der Fernewirkungs-Theorie.

Nach der alten Anschauung von der Fernewirkung würden aus den Maxwell'schen Spannungen 1) diejenigen Bestandteile, welche

---

Einwand gegen die ganze Maxwell'sche Theorie geltend. Im Livre XII, Cap. III dieses Werkes will deseen Verf. zeigen, dass die Maxwell'sche Theorie, auch abgesehen von jenem Einwand, an und für sich fehlerhaft sei, da sich die auf die Oberfläche eines Dielektricums wirkenden Kräfte nicht in der Form

$$A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)$$

darstellen liessen. Die betreffende Rechnung Duhems (l. c. p. 459—466) beruht aber auf einem schon in Cap I des Livre XII, p. 412, begangenen Fehler, darin bestehend, dass bei der Berechnung jener Oberflächenkräfte die Unstetigkeit der elektrischen Kraft $\frac{d\varphi}{dn}$ nicht berücksichtigt wird. „Infolge dieses Fehlers wird nicht nur die Beweisführung Duhems gegen die „Maxwell'sche Theorie hinfällig, sondern auch seine ganzen die Elektro- ond „Magnetostriction betreffenden Entwickelungen des Livre XII."

1) Maxwell selbst betont dies ausdrücklich in Art. 110 seines „Treatice on Electricity and Magnetism." p. 163 des 1. Bandes der deutschen Uebersetzung.

2) Vergl z. B Kirchhoffs Mechanik, p, 399.

3) Vergl. z. B. E. Beltrami, Memorie della R. Accad. delle Scienze dell' Istit. di Bologna, (4) VII p 1—40, 1886; M. Brillouin, Ann. de l'Ecole Normale supérieure. (3), t. IV, p. 201; 1887; auch E. Mathieu, Théorie du potentiel, II, p. 110.

auch im freien Aether vorhanden sind, auszusondern und durch die ihnen acquivalente Fernewirkung nach dem Coulomb'schen Gesetze zu ersetzen sein; die übrig bleibenden Bestandteile, nämlich

$$1') \quad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{A}_x = -\frac{K-1}{8\pi}\left\{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{B}_x = -\frac{K-1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

sind also auch hier noch als moleculare Druck- resp. Zugkräfte, hervorgerufen durch die elektrische Polarisation, aufzufassen und ergeben die Modification, welche die nach dem Coulomb'schen Gesetze berechnete Wirkung durch das dielektrische Zwischenmedium erleidet. Entsprechend dieser Auffassung zerfallen auch die an den Oberflächen der Dielektrica auftretenden Kräfte $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ in zwei Teile: erstens die Fernewirkung auf die infolge der Polarisation an jenen Grenzflächen vorhandene scheinbare elektrische Belegung, zweitens die Resultirende aus den molecularen Spannungen $\mathfrak{A}_n, \ldots$ in den zusammenstossenden Medien, welche hier aber nicht mehr senkrecht zur Grenzfläche ist. Auch die Spannungen 1') halten sich in jedem inneren Punkte des Dielektricums das Gleichgewicht, kommen also nur in jener Resultirenden an dessen Oberfläche zur Geltung; die Deformationen, welche sie hervorrufen, dürfen indessen nicht direct durch Einsetzen der Ausdrücke $\mathfrak{A}_x, \ldots$ in die Grundgleichungen der Elasticitätstheorie $-x_x = s_{11}X_x + s_{12}(Y_y + Z_z)$ etc. berechnet werden, sondern man hat wieder lediglich die auf die Oberfläche wirkenden Kräfte als gegeben anzusehen. Dabei kommt natürlich die erwähnte Zerlegung derselben gar nicht in Betracht, „so dass also die alte Anschauung notwendig zu denselben Resultaten führt, wie die Maxwell'sche".

„Spannungen zweiter Art" in ponderabelen isotropen Dielektricis.

Die Ausdrücke 1) bzhw. 1') für die Spannungen in isotropen ponderabelen Dielektricis bedürfen noch einer Ergänzung in dem Falle, dass sich die Dielektricitätsconstante in Folge von Deformationen der Körper ändert. Dies hat schon 1880 Korteweg [1]) bei der Behandlung einiger specieller Probleme der Elektrostriction gezeigt; 1881 wurde die allgemeine Theorie für Flüssigkeiten, bei denen die Dielektricitätsconstante nur von der Dichte abhängt, von

1) Korteweg, Wied. Ann. 9, p. 48—61, 1880.

Helmholtz[1]), und 1884 für feste isotrope Körper, wo Dilatationen parallel den Kraftlinien einen anderen Einfluss haben können, als solche senkrecht dazu, fast gleichzeitig von Kirchhoff[2]) und Lorberg[3]) gegeben.

Alle diese theoretischen Untersuchungen beruhen auf der Erwägung, dass der Zuwachs, den die gesamte elektrische Energie[4]) eines Systems von Conductoren und Isolatoren in Folge irgendwelcher Verschiebungen seiner Volumelemente erfährt, gleich sein muss der bei diesen Verschiebungen zu leistenden äusseren Arbeit, aus der sich dann die auf jeden Punkt des Systems wirkenden ponderomotorischen Kräfte nach dem Princip der virtuellen Verrückungen bestimmen.

Da die Verteilung des Potentials im Gleichgewichtszustande eine solche ist, dass sie die elektrische Energie zu einem Minimum macht, so kann man bei der Berechnung der Energieänderung durch unendlich kleine Verschiebungen an Stelle derjenigen Variation, die das Potential dabei wirklich erleiden würde, irgend eine andere setzen, oder man kann auch das Potential dabei als constant betrachten. Letzteres tun Helmholtz, Kirchhoff und Lorberg. Die Variation kommt dann dadurch zu Stande, dass in dem elektrischen Felde von

---

1) Helmholtz, Wied. Ann. 13, 1881. Sitzber. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1881. p 191.

2) Kirchhoff, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1884, p. 137 und Wied. Ann. 24, p. 52, 1885.

3) Lorberg, Wied. Ann. 21, p. 300, 1884.

4) Die gesamte elektrische (potentielle) Energie E ist diejenige Arbeit, welche zu leisten ist, um die im System vorhandene wahre Elektricität aus einem Reservoir vom Potential null an ihren Ort zu bringen; bezeichnet ε die räumliche Dichte, e die Oberflächendichte jener wahren, d. h. von aussen zugeleiteten Elektricität, so ist also

$$E = \tfrac{1}{2}\int \varphi\, \varepsilon\, dk + \tfrac{1}{2}\int \varphi e\, do,$$

wo das erste Integral über den ganzen Raum, das zweite über alle Oberflächen von Conductoren zu erstrecken ist. Eine andere Form von E, welche der Maxwell'schen Vorstellung, wonach der Sitz der Energie die Dielektrica allein sind, entspricht, ist diese:

$$E' = \int \frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dk$$

Weitere Umformungen dieses Ausdruckes giebt Helmholtz in der citirten Abhandlung; die von ihm benutzte Form ist $2E - E'$.

constanster räumlicher Verteilung der elektrischen Kraft sich die Verteilung der Materie und somit an einer festen Stelle des Raumes der Wert der wahren elektrischen Dichtigkeit und der Dielektricitätsconstante in Folge der Verrückungen und der damit verbundenen Deformationen ändert. — Während bei dieser Ableitung nur die gewöhnlichen Sätze der Elektrostatik und das Energieprincip vorausgesetzt werden, und daher auch die so gefundenen ponderomotorischen Kräfte A, B, C erst durch eine mathematische Umgestaltung, nämlich durch Darstellung in der Form $-\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial z}$ etc., auf moleculare Drucke oder Spannungen zurückgeführt werden, hat Hertz neuerdings eine der Anschauung Maxwell's consequent angepasste Ableitung gegeben [1]), indem er von vornherein annimmt, dass die ponderomotorischen Kräfte nur durch Druckkräfte zu Stande kommen können. Diese Druckkräfte leitet er ebenfalls aus dem Energieprincip ab; dabei berechnet er die Aenderung der elektrischen Energie jedes Volumelementes so, als ob das Potential in jedem materiellen Punkte ungeändert bliebe, während Helmholtz und Kirchhoff den Potentialwert in jedem Raumpunkte beibehielten. Beides ist nach dem oben Gesagten gleich berechtigt, und in der Tat gelangt Hertz (für isotrope Körper) zu denselben Resultaten.

Die von der Veränderlichkeit der Dielektricitätsconstante herrührenden Glieder, welche in den Ausdrücken für die ponderomotorischen Kräfte neu hinzukommen, ergeben sich bei beiden Arten der Ableitung unmittelbar in der Form von Druckkräften; sie mögen zum Unterschied von den Maxwell'schen Spannungen als „Spannungen zweiter Art" bezeichnet werden. Die einfachste Ableitung derselben ist wol folgende. Die elektrische Energie eines Systems von Conductoren und Dielektricis ist darstellbar in der Form (vergl. S. 64)

$$E'' = \int \varphi\, \varepsilon\, dk + \int \varphi\, e\, do - \int \frac{K}{8\pi} R^2\, dk$$

worin die beiden ersten Teile constant bleiben, soweit nur in den Dielektricis Verschiebungen und Deformationen stattfinden. Man kann es demnach so auffassen, als ob die Volumeinheit des gerade betrachteten homogenen Dielektricums zur elektrischen Energie den Beitrag $-\frac{K}{8\pi} R^2$ lieferte. Erleidet dasselbe nun Deformationen $x_x, \ldots y_z, \ldots$, so kommt erstens hinzu das elastische Potential

1) Hertz, Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper; Wied. Ann. 41, p. 389 ff., 1890.

$$\Phi = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}(x_x^2+\ldots+\ldots+\tfrac{1}{2}y_z^2+\ldots+\ldots)+$$

$$+\frac{c_{11}}{2}(x_x+y_y+z_z)^2$$

sodann aber ändert sich die elektrische Energie in Folge der Aenderung von K durch die Deformationen. Für die letztere wird nun der Ansatz gemacht:

$$K' = K^0 - 4\pi\alpha\lambda_1 - 4\pi\beta(\delta-\lambda_1)$$

wo λ_1 die Dilatation in der Richtung der Kraftlinien, δ die kubische Dilatation bezeichnet, und somit die Grössen $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$, welche in erster Annäherung als Constanten zu betrachten sind, die Aenderung der Dielektricitätsconstante durch die lineare Contraction 1 parallel bzhw. senkrecht zu den Kraftlinien bedeuten [1]). Da

$$\lambda_1 = x_x l^2+y_y m^2+z_x n^2+y_z mn+z_x nl+x_y lm$$

ist, wo

$$l=\frac{\partial\varphi}{\partial x}:R,\quad m=\frac{\partial\varphi}{\partial y}:R,\quad n=\frac{\partial\varphi}{\partial z}:R$$

die Richtungscosinus der Kraftlinien sind, so ergiebt sich gemäss dem obigen Ansatz für die potentielle Energie der Volumeinheit des deformirten Dielektricums der Ausdruck

$$3)\quad V=\Phi-\frac{K}{8\pi}R^2+\frac{\beta}{2}(x_x+y_y+z_z)R^2+\frac{\alpha-\beta}{2}\left(x_x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+y_y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+z_z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+y_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+z_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+x_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

Nun sind

$$-\frac{\partial V}{\partial x_x},\ldots-\frac{\partial V}{\partial y_z},\ldots$$

---

1) Es ist dies die von Lorberg eingeführte Bezeichnung; Kirchhoff benutzt die Grössen

$$k'=\beta,\quad k''=\alpha-\beta$$

und Korteweg

$$x_1=4\pi\alpha,\quad x_2=4\pi\beta$$

bei Helmholtz ist

$$\alpha=\beta=\Theta$$

Ferner steht bei letzterem $1+4\pi\vartheta$, bei Kirchhoff $1+4\pi k$ an Stelle von K.

allgemein die im betrachteten Volumelement herrschenden molecularen Drucke, und

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_x}, \ldots -\frac{\partial \Phi}{\partial y_z}, \ldots$$

die gewöhnlichen elastischen Drucke

$$X_x, \ldots Y_z, \ldots$$

folglich sind die Drucke elektrischen Ursprungs, d. h. eben die „Spannungen 2ter Art“ [1]), gegeben durch

$$\mathfrak{X}_x' = -\frac{\partial V}{\partial x_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} = -\frac{\beta}{2} R^2 - \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$$

. . . . . .

$$\mathfrak{Y}_z' = -\frac{\partial V}{\partial y_z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_z} = -\frac{\alpha - \beta}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

. . . . . .

Dieselben bestehen also in einem Zuge parallel den Kraftlinien von der Grösse $\frac{1}{2}\alpha R^2$ und in einem solchen in allen dazu senkrechten Richtungen von der Grösse $\frac{1}{2}\beta R^2$. Demgemäss lauten die vollständigen Spannungscomponenten:

4

$$A_x = -\left(\frac{K}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{K}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2$$

. . . . . .

$$B_z = -\left(\frac{K}{4\pi} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

. . . . . .

Diese Spannungen zweiter Art ergeben im Gegensatz zu den Maxwell'schen Spannungen „auf die inneren Volumelemente des Dielektricums wirkende Kraftcomponenten“ auch dann, wenn dort keine wahre Elektricität vorhanden ist, ausgenommen in einem homogenen elektrischen Felde. Diese Kraftcomponenten im Innern eines homogenen, isotropen, von wahrer Elektricität freien Dielektricums sind [2]):

1) Dass obige Ableitung aus dem Potentialansatz 3) nur die Spannungen 2 Art, nicht die Maxwell'schen Spannungen liefert, ist die natürliche Folge davon, dass er für das Innere eines homogenen Mediums gilt und somit nur die im Innern, nicht die auf die Oberfläche wirkenden Drucke ergeben kann.

2) Hierbei ist vorausgesetzt, dass die in Folge der Elektrostriction selbst eintretenden Aenderungen der Dielektricitätsconstanten und somit der elektri-

$$4' \qquad \left| \begin{array}{l} A = -\dfrac{\partial A_x}{\partial x} - \dfrac{\partial A_y}{\partial y} - \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = \dfrac{\alpha+\beta}{4}\dfrac{\partial (R^2)}{\partial x} \\ B = -\dfrac{\partial B_x}{\partial x} - \dfrac{\partial B_y}{\partial y} - \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = \dfrac{\alpha+\beta}{4}\dfrac{\partial (R^2)}{\partial y} \\ C = -\dfrac{\partial C_x}{\partial x} - \dfrac{\partial C_y}{\partial y} - \dfrac{\partial C_z}{\partial z} = \dfrac{\alpha+\beta}{4}\dfrac{\partial (R^2)}{\partial z} \end{array} \right.$$

sie verschwinden also in der Tat nur, wenn die elektrische Kraft R constant ist. Man kann sie hervorgebracht denken durch einen an jeder Stelle des Mediums auftretenden allseitig gleichen Druck $-\frac{\alpha+\beta}{4} R^2$. Ist nun das Dielektricum eine Flüssigkeit, so dass sich seine Teilchen beliebig gegeneinander verschieben können, so wird an jeder Stelle eine entsprechende kubische Contraction oder Dilatation eintreten, d. h. eine solche, dass der durch sie erweckte Druck gerade jenen elektrischen $-\frac{\alpha+\beta}{4} R^2$ compensirt. Da dann an jeder Stelle des Dielektricums die mit α proportionalen Glieder der elektrischen Drucke $A_x \ldots$ (— es ist für Flüssigkeiten $\alpha = \beta$, also treten solche Glieder nur in A_x, B_y, C_z auf —) durch entsprechende Drucke elastischen Ursprungs aufgehoben sind, so treten an der Oberfläche gar keine von $\alpha (= \beta)$ abhangenden Kräfte auf; man hat also das Resultat, „dass die auf die Grenzflächen eines „flüssigen Dielektricums wirkenden Kräfte unabhängig sind von der „Veränderlichkeit seiner Dielektricitätsconstante mit der Dichtig„keit"[1]). Daraus folgt insbesondere, dass auf Conductoren, welche in eine dielektrische Flüssigkeit eingetaucht sind, sowie auf die Trennungsfläche von zwei verschiedenen dielektrischen Flüssigkeiten keine anderen Kräfte wirken, als die aus den Maxwell'schen Spannungen resultirenden, was für die Deutung gewisser später zu besprechenden Beobachtungen von Wichtigkeit ist.

Bei festen Dielektricis gestalten sich die Verhältnisse wesentlich complicirter, weil sich hier diejenigen Deformationen, welche an jeder Stelle die den elektrischen Drucken $A_x, \ldots B_z, \ldots$ entgegengesetzten elastischen Drucke hervorrufen würden, nicht frei

---

schen Kraftverteilung unendlich klein sind, was nach den vorliegenden Erfahrungen stets zulässig ist. Anders ist es im analogen Falle der stark magnetischen Metalle, worauf wir später zurückkommen.

1) Vorausgesetzt ist dabei nur, dass die Dilatation oder Contraction der Flüssigkeit nicht etwa durch Beschränkung ihres Gesamtvolums behindert wird.

entwickeln können. Man hat also die eintretenden Verrückungen u, v, w zu berechnen aus den für das Innere geltenden Differentialgleichungen:

$$5. \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = A = \dfrac{\alpha+\beta}{4} \dfrac{\partial (R^2)}{\partial x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

und aus den Oberflächenbedingungen:

$$6. \quad \left| \begin{array}{l} X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z) = \overline{A} = A_n' - A_n \\ = -\left\{ \left(\dfrac{K-K'}{8\pi} R^2 - \dfrac{\beta-\beta'}{2} R^2 + \left(\dfrac{(K-K')^2}{8\pi K'} + \dfrac{K^2-K'^2}{K'^2} \dfrac{\beta'}{2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \dfrac{K(K-K')}{K'^2} \dfrac{\alpha'-\beta'}{2} \right) \left(\dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial n} \right)^2 \right\} \cdot \cos(n,x) \\ + \left(\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \dfrac{\alpha'-\beta'}{2} \dfrac{K}{K'} \right) \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

worin

$$-X_x = c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-Y_z = \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist, wenn c_{11}, c_{12} die Elastcitätsconstanten bezeichnen.

Die Grenzbedingungen, deren erste in 6) hingeschrieben ist, gelten für die Grenzflächen gegen ein anderes Dielektricum, welchem die Constanten K', α', β' zukommen; ist dasselbe eine Flüssigkeit, so ist

$$\beta' = \alpha'$$

und ist es der leere Raum, so ist

$$K' = 1 \quad \text{und} \quad \alpha' = \beta' = 0$$

zu setzen. Für Grenzflächen gegen Conductoren gelten an Stelle von 6) die Bedingungen

$$6'. \quad \left| \begin{array}{l} X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z) = -A_n \\ = + \left(\dfrac{K}{8\pi} + \dfrac{\alpha}{2} \right) R^2 \cos(n,x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

Das Dielektricum erleidet dort einfach einen normalen Druck $\left(\frac{K}{8\pi}+\frac{\alpha}{2}\right)R^2$. Dagegen zeigt das Zusatzglied mit $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ in 6), dass bei Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Dielektricitätsconstante die auf Grenzflächen fester Dielektrica gegen andere feste oder flüssige dielektrische Medien wirkenden Druckkräfte nicht mehr senkrecht zur Grenzfläche gerichtet sind. Ueberhaupt wird das elastische Problem der Elektrostriction durch das Hinzukommen der mit α und β proportionalen Glieder in hohem Grade erschwert, um so mehr als es keineswegs statthaft ist, diese Glieder von vornherein als sehr klein gegen die übrigen (also $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$ als sehr klein gegen K) zu behandeln.

Wir wissen über die Aenderungen der Dielektricitätsconstanten fester und flüssiger Körper durch Deformationen nichts durch directe Beobachtungen [1]; aber es dürfte wenigstens für solche Dielektrica, bei denen die von der elektromagnetischen Lichttheorie geforderte Relation zwischen Dielektricitätsconstante und Brechungsindex

$$K = n^2$$

annähernd zutrifft, der Schluss berechtigt sein, dass die Grössenordnung jener Aenderungen dieselbe sei, wie diejenige der entsprechenden Aenderungen von n^2, letztere sind aber in den untersuchten Fällen keineswegs ohne weiteres neben n^2 zu vernachlässigen. Bei einigen dielektrischen Flüssigkeiten hat Cassie [2]) die Aenderung von K mit der Temperatur bestimmt und annähernd gleich der entsprechenden Aenderung von n^2 gefunden, woraus wol dieselbe Uebereinstimmung für die Aenderungen beider Grössen durch Druck zu schliessen ist, weil bei jenen Flüssigkeiten erfahrungsmässig der Brechungsindex durch thermische und mechanische Dilatation in gleicher Weise geändert wird.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass unter Umständen noch aus einer im Vorhergehenden nicht berücksichtigten Ursache Defor-

---

1) Es sei jedoch auf die interessanten qualitativen Beobachtungen an getrockneter Gelatine von Ambronn (Sitzungsber. der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1891, Heft III) hingewiesen, welche zeigten, dass bei dieser Substanz eine dauernde Dehnung eine Vergrösserung sowol der Dielektricitäts- als auch der Diamagnetisirungsconstante in der Dehnungsrichtung hervorbringt.

2) W. Cassie, Phil. Transactions 1890, p. 1.

Eine Abnahme der Dielektricitätsconst. durch Erwärmung hat auch Negreano für Benzol, Xylol und Toluol nachgewiesen: Compt. Rend. CXIV, p. 345, 1892.

mationen bei dielektrischer bzhw magnetischer Polarisation hervorgehen können, nämlich aus einer Aenderung der Elasticitätsconstanten in Folge der Polarisation. Abgesehen davon, dass eine solche Aenderung bisher nur für die Torsionscoefficienten von Glas (und Glimmer) nachgewiesen zu sein scheint [1]), kommt aber diese Art von Deformationen für uns deshalb nicht in Betracht, weil sie in merklichem Grade nur bei Körpern auftreten können, welche bereits einer starken Deformation unterworfen sind, bevor sie in das elektrische oder magnetische Feld gebracht werden.

Wir wollen nun die bisher vorliegenden Beobachtungsresultate daraufhin betrachten, wie weit sie die besprochenen theoretischen Folgerungen bestätigen und insbesondere gestatten, Schlüsse in Betreff der Grössen α und β zu ziehen.

Beobachtungen an Flüssigkeiten.

In einer Flüssigkeit verursachen die Spannungen zweiter Art an jeder Stelle einen hydrostatischen Druck $\frac{\alpha}{2} R^2$ und eine diesem entsprechende kubische Contraction, vorausgesetzt, dass eine Aenderung des Gesamtvolums nicht durch starre Wandungen verhindert wird. Versuche, bei welchen diese Volumänderung unmittelbar zur Wahrnehmung gelangen konnte, sind zuerst von Quincke [2]) angestellt worden, indem er ein Glassgefäss, an welches eine Capillare angeschmolzen war, und in dem sich zwei einander parallel gegenüberstehende Platinbleche befanden, mit isolirenden Flüssigkeiten füllte und an deren Stande im Capillarrohr die bei elektrischer Ladung der Platinelektroden eintretende Volumänderung der Flüssigkeit mass. Bei dieser Versuchsanordnung besitzt das flüssige Dielektricum keine freien Grenzflächen in Gebieten, wo die elektrische Kraft merkliche Intensität besitzt; es kommt daher der Druck $\frac{\alpha}{2} R^2$ allein zur Wirkung, und man würde eine Contraction erwarten, da die Dielektricitätsconstante der Flüssigkeiten durch Compression höchst wahrscheinlich zunimmt, also α positiv ist. Quincke hat aber nur bei einigen fetten Oelen eine Contraction beobachtet, dagegen bei allen anderen von ihm untersuchten Flüssigkeiten, z. B. Schwefelkohlenstoff, Petroleum, Terpentinöl, Wasser, eine mehr oder weniger beträchtliche Dilatation, und spätere Beobachter, nämlich Röntgen [3]),

1) Quincke, Wied. Ann. 10, p. 412. 1880.

2) Quincke, Wied. Ann. 10, 521 u. s. f., 1880.

3) Röntgen, Wied. Ann. 11, p. 771, 1880.

Oddone[1]) und Bos[2]), haben auch bei jenen Oelen nur eine Ausdehnung finden können. „Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass „bei allen diesen Versuchen die von der elektrischen Polarisation „herrührende Volumänderung durch secundäre thermische Wirkungen „verdeckt wurde". Dass eine thermische Dilatation auftrat, ist ja sehr plausibel, da die untersuchten Flüssigkeiten nie vollständig isolirten, vielmehr die zur Ladung der Platinbleche dienende Batterie sich in verhältnissmässig kurzer Zeit völlig durch die Flüssigkeit entlud. Für diesen Ursprung der beobachteten Dilatationen spricht auch der Umstand, dass dieselben mit der Capacität der Batterie wuchsen, während doch die Elektrostrictionswirkung nur vom Ladungspotential abhangen kann; ferner das Verhalten des Wassers, welches bei $+8^0$ eine Dilatation, bei 0^0 aber eine Contraction zeigte. Wenn doch noch Zweifel möglich waren, so sind dieselben durch die oben citirte, in Groningen ausgeführte Untersuchung von Bos beseitigt worden, welcher das Auftreten einer Erwärmung zwischen den elektrisirten Platinplatten vermittelst eines Thermoelements direct nachgewiesen und auch dargetan hat, dass diese Erwärmung zur Erklärung der gleichzeitig beobachteten Ausdehnung ausreichte. Aber auch die Contraction, welche Quincke bei Mandelöl, Rüböl und Olivenöl beobachtete, scheint thermischen Ursprungs gewesen zu sein, da Bos in dem einzigen Falle, wo er sie wahrnahm, gleichzeitig eine Temperaturerniedrigung im Innern der Flüssigkeit, wol in Folge von Strömungen gegen die etwas kälteren Gefässwände, beobachten konnte. Somit haben alle diese Versuche bisher nur negative Resultate ergeben, und eine Wiederholung derselben könnte nur dann Erfolg versprechen, wenn Temperaturschwankungen mit äusserster Sorgfalt vermieden und das der dielektrischen Polarisation unterworfene Flüssigkeitsvolum gross genug gemacht würde.

Ebenso negative Resultate ergaben analoge Versuche mit Gasen (Luft und CO_2), welche ebenfalls von Quincke[3]) angestellt wurden. Das Gas war in den Raum zwischen zwei concentrischen metallenen Hohlkugeln, die auf eine bestimmte Potentialdifferenz geladen werden konnten, eingeschlossen, somit die elektrische Kraft R an jeder Stelle der Gasmasse bekannt; man konnte daher mit Hülfe der von Boltzmann bestimmten Dielektricitätsconstanten die nach der Theorie zu erwartende gesamte Volumänderung berechnen. Da nämlich bei

1) Oddone, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei VI, p. 452, 1890.

2) Bos, Volumänderungen von Dielektricis. Dissertation, Groningen 1888. (Beiblätter 1890, p. 1120.)

3) Quincke, Wied. Ann. 10, 529. 1880.

Gasen $K-1$ proportional der Dichtigkeit ist, so ergiebt sich für den Aenderungscoefficienten $4\pi\alpha$ selbst der Wert $K-1$, und es genügt die Kenntniss von K[1]). Die Berechnung[2]) zeigt, dass bei Quincke's Versuchsanordnung, wobei noch eine Volumänderung von $\frac{1}{3 \cdot 10^9}$ nachweisbar war, eine merkliche Volumänderung hätte eintreten müssen, während nur bei Kohlensäure eine Spur einer solchen beobachtet wurde; es müssen also wol Nebenumstände die Contraction compensirt haben. Ein Phaenomen, in welchem sich die Volumänderung der Luft im elektrischen Felde indirect äussert, ist aber wahrscheinlich das von Thomson beobachtete Tönen eines Luftcondensators, der in sehr rascher Aufeinanderfolge mittelst 800 Daniels geladen und wieder entladen wurde.

Beobachtungen über die Volumänderung magnetischer oder diamagnetischer Flüssigkeiten im magnetischen Felde, die eintreten würde, wenn sich die Magnetisirungsconstante mit der Dichte änderte, sind meines Wissens noch nicht vorhanden, wären aber vielleicht (wenigstens bei Eisenchloridlösung) nicht aussichtslos, da man magnetische Felder von weit grösserer Intensität herstellen kann, als bei elektrischen Feldern erreichbar ist, und da die störenden Wärmewirkungen in Fortfall kämen.

Wir kommen nun zu denjenigen Beobachtungen, welche die auf Grenzflächen dielektrischer oder magnetisirbarer Flüssigkeiten wirkenden Kräfte betreffen, bei welchen also, wie schon oben erörtert wurde, nur die Maxwell'schen Spannungen, nicht der hydrostatische Druck $\frac{\alpha}{2} R^2$ zur Geltung kommt. In Bezug auf alle diese Beobachtungen sei gleich bemerkt, dass die von der Theorie geforderte Proportionalität der Wirkungen mit dem Quadrate des Potentialgefälles sich fast immer gut bestätigt fand.

Zunächst ist hier zu erwähnen, dass das theoretische Ergebniss, wonach auf „Grenzflächen gegen Conductoren" ein Zug von der Stärke $\frac{K}{8\pi} R^2$ wirkt, durch Messungen von Silow[3]) und in weiterem Umfange durch solche von Quincke[4]) (— welcher mittelst einer

1) Vergl. Korteweg, Wied. Ann. 9, p. 59; 1880.

2) Eine directe Behandlung des Problems mit Hülfe des Energieprincips giebt Lippmann, Ann. de chim. et phys. (5) XXIV p. 144; 1881.

3) Silow, Pogg. Ann. 156, p. 389, 1875.

4) Quincke, Wied. Ann. 19, p. 705, 1883; 28, p. 529, 1888.

Waage die Anziehung zweier durch eine isolirende Flüssigkeit getrennten, auf bekannte Potentialdifferenz geladenen Metallplatten bestimmte —) vollkommen bestätigt worden ist. — Mehr Interesse haben aber von unserem Standpunkt die Erscheinungen, welche von der durch die Gleichungen 2) gegebenen Druckdifferenz an Grenzflächen zweier verschiedenen dielektrischen Flüssigkeiten oder an der freien Oberfläche einer solchen herrühren. Wird nämlich eine solche Grenzfläche in ein inhomogenes elektrisches Feld gebracht, so erleidet sie Gestaltsänderungen, die soweit gehen, bis die Schwere oder die Oberflächenspannung der elektrischen Druckdifferenz das Gleichgewicht hält. Eine solche Deformation der freien Oberfläche kann man z. B. sehr bequem beobachten, indem man einen schmalen Glastrog, der zum Teil mit einer isolirenden Flüssigkeit gefüllt ist, zwischen zwei auf hohe Potentialdifferenz geladene Conductoren (etwa kleine Kugeln) bringt. Ein anderes Beispiel ist die von Quincke beobachtete Erscheinung, dass sich eine Luftblase innerhalb einer dielektrisch polarisirten Flüssigkeit in der Richtung der Kraftlinien streckt. Die ersten Messungen dieser Oberflächendrucke hat Quincke [1]) in der Weise angestellt, dass er zwischen den durch die Flüssigkeit getrennten Platten eines Condensators eine beide Platten berührende grosse Luftblase herstellte und mittelst eines empfindlichen Manometers die beim Laden des Condensators eintretende Druckzunahme in dieser Luftblase beobachtete. Kirchhoff [2]) hat gezeigt, dass man bei dieser Versuchsanordnung die Grenzfläche zwischen Luftblase und Flüssigkeit als eine zu den Condensatorplatten senkrechte Cylinderfläche betrachten darf; dann ist, vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit innerhalb des elektrischen Feldes von merklicher Intensität (d. h. zwischen den Condensatorplatten oder in deren Nähe) nicht noch andere freie Oberflächenteile besitzt, die Druckzunahme in der Luftblase direct gleich der Differenz der Drucke senkrecht zu den Kraftlinien in Flüssigkeit und Luft, also, da die elektrische Kraft R beiderseits gleich ist,

$$= \frac{K-1}{8\pi} R^2$$

Quincke hat hiernach aus seinen Beobachtungen K berechnet und dabei, ausser für Rapsöl, gute Uebereinstimmung mit den Werten gefunden, welche er aus den oben erwähnten Messungen der Anziehung von Metallplatten in der betreffenden Flüssigkeit, sowie aus

1) Quincke, Wied. Ann. 19. 718; 1883.

2) Kirchhoff, Sitzungsber. d. Acad. d. Wiss. zu Berlin 1884, p. 1159; Wied. Ann. 25, p. 606, 1886.

Capacitätsbestimmungen abgeleitet hatte. Aus dieser Uebereinstimmung ist von Bos (a. a. O.) der Schluss gezogen worden, dass die Constanten α und β (— welche übrigens bei Flüssigkeiten identisch werden müssten —) sehr kleine Werte hätten. Diese Folgerung ist aber falsch, da diese Grössen, wie schon hervorgehoben wurde, bei allen jenen Messungen „gar keinen Einfluss haben".

Die Messung des Druckes in einer Luftblase hat Quincke[1]) in ganz analoger Weise zur Bestimmung der Magnetisirungs- bzhw. Diamagnetisirungsconstante von Flüssigkeiten benutzt. Für diesen Zweck hat er dann die Versuchsanordnung noch in der Weise modificirt, dass zwischen die verticalen Polflächen eines starken Elektromagnets der eine Schenkel einer mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten U-förmigen Röhre gebracht wurde, deren anderer Schenkel sich ausserhalb des Magnetfeldes befand. Auch in diesem Falle besitzt die Flüssigkeit im Magnetfelde eine (– sofern man von ihrer Krümmung, wie im obigen Fall der Luftblase, absehen kann —) den Kraftlinien parallele Oberfläche; bei Erregung des Elektromagnets wird daher die Flüssigkeit in dem zwischen den Polflächen befindlichen Schenkel, wenn sie magnetisch ist, steigen, oder wenn sie diamagnetisch ist, sinken, bis die dadurch entstandene hydrostatische Druckdifferenz der Differenz der magnetischen Querdrucke $\frac{\mu}{8\pi} R^2$ in der Flüssigkeit und im angrenzenden Gase das Gleichgewicht hält. Die Messung der eintretenden Niveaudifferenz gestattet demnach, die Differenz der Magnetisirungsconstanten μ der Flüssigkeit und des angrenzenden Gases, sowie auch, wenn letzteres in verschiedener Dichtigkeit angewandt wird, die absoluten Werte jener Magnetisirungsconstanten zu bestimmen, wie das von Quincke in zahlreichen Fällen geschehen ist.

Der letztere beobachtete dieselben Niveaudifferenzen, wie bei der beschriebenen Versuchsanordnung, auch dann, wenn die Flüssigkeitsoberfläche im U-Rohr senkrecht zu den (jetzt vertical verlaufenden) Kraftlinien war, was zunächst auffallend erscheint, weil die Druckdifferenz in diesem Falle zufolge 2) gegeben ist durch

$$\frac{\mu' - \mu}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{\mu'} R^2 \quad \text{statt durch} \quad \frac{\mu' - \mu}{8\pi} R^2$$

Bedenkt man aber, dass μ und μ' für alle Flüssigkeiten und Gase sehr wenig von 1 verschieden sind, und somit auch R in beiden

---

1) Quincke, Wied. Ann. 24, p. 347—416, 1884.

Fällen sehr nahe gleich derjenigen magnetischen Kraft, welche in dem Magnetfelde vor dem Hineinbringen der Flüssigkeit herrschen würde, so ergiebt sich in der Tat, dass obige Druckdifferenzen sich nicht merklich unterscheiden können.

Beobachtungen der Elektrostriction fester isotroper Körper.

Bei festen Körpern sind die Deformationen durch dielektrische Polarisation bisher nur durch solche Versuchsanordnungen nachgewiesen worden, bei welchen dieselben die isolirende Zwischenschicht eines Condensators bildeten und somit sehr starken elektrischen Kräften unterworfen werden konnten.

Die von Govi wieder aufgefundene Erscheinung der Dilatation einer Leydener Flasche gab ja directe Veranlassung zu solchen Versuchen. Um dieses Phaenomen genauer studiren zu können, gab Duter[1]) der Leydener Flasche die Gestalt einer dünnwandigen Glaskugel mit angeschmolzener Capillare, welche mit einer leitenden Flüssigkeit gefüllt wurde, deren Stand im Capillarrohr zugleich die Volumänderungen anzeigte; als äussere Belegung diente ebenfalls eine in ein das erste umgebendes Gefäss mit Capillarrohr eingeschlossene Flüssigkeit. Durch diese Versuchsanordnung wies Duter nach, dass die äussere und innere Oberfläche der Glaskugel eine nahezu gleiche Ausdehnung erleiden, dass also in erster Linie nicht eine Compression der Glaswand, oder, wie Govi meinte, eine solche der inneren Flüssigkeit die Ursache der Erscheinung ist. Obgleich hiernach die richtige Deutung der letzteren nahe lag, wurde dieselbe nicht von Duter selbst, sondern zuerst von Korteweg[2]) gefunden, welcher bewies, dass die „Anziehung der beiden Belegungen" des Condensators eine der von Duter beobachteten ungefähr gleiche Ausdehnung hervorbringen musste. Dies ergiebt sich daraus, dass zufolge der Potentialtheorie die elektrischen Drucke $\frac{K}{8\pi}R^2$, welche auf die innere und äussere Glasoberfläche ausgeübt werden, umgekehrt proportional der 4ten Potenz der Kugelradien sind, so dass die innere Kugeloberfläche einen grösseren Gesamtdruck erleidet als die äussere, und ausser einer Compression der Glaswand, die bei deren geringer Dicke sich der Wahrnehmung entzieht, eine gleich grosse Zunahme des inneren und äusseren Radius stattfindet. Bei einer exacten Berechnung der Volumänderung müssen aber ausser

1) Vergleiche die früher citirten Stellen.

2) Korteweg, Compt. rend. LXXXVIII, p. 338, 1879.

den Maxwell'schen Spannungen parallel den Kraftlinien, welche sich in jenen Drucken auf die Oberflächen äussern, auch die Spannungen 2ter Art berücksichtigt werden, welche radial gerichtete Kräfte auf die inneren Punkte der Glaswand zur Folge haben; d. h. man hat die Gleichungen 5) mit den Grenzbedingungen 6') für den Fall zu lösen, dass die elektrische Kraft

$$R = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\varphi_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

ist, wo φ_0 die Potentialdifferenz, r_1 und r_2 die Radien der beiden Belegungen des Kugelcondensators bezeichnen. In dieser Weise haben Kirchhoff[1]) und Lorberg das Problem gelöst und sind zu einem Resultate gelangt, welches schon früher Korteweg durch eine etwas abweichende, speciellere Behandlungsweise abgeleitet hatte; es ergab sich unter Voraussetzung einer im Verhältniss zum Radius sehr geringen Wanddicke für die Volumzunahme des Innenraumes, ausgedrückt in Teilen des Gesamtvolums, der Ausdruck:

$$7) \qquad \frac{\delta v}{v} = \frac{3\varphi^{02}}{2E \cdot (r_2 - r_1)^2} \left\{ \frac{K}{4\pi} + \nu \cdot \alpha - (1-\nu)\beta \right\}$$

worin E den Elasticitätsmodul, ν das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation für die Substanz der Kugelschale ist. Abweichende Formeln, welche 1882 von Boltzmann[2]) und neuerdings von Kopp[3]) abgeleitet worden sind, beruhen auf Irrtümern in den theoretischen Grundlagen, wozu bei letzterem noch Rechenfehler kommen.

Eine grosse Reihe sorgfältiger Messungen der Dilatation von gläsernen Kugelcondensatoren hat Quincke[4]) 1880 -83 ausgeführt, der dabei auch, wie es für die Anwendbarkeit der obigen Formel

---

1) Kirchhoff, Wied. Ann. 24, p. 70; 1885.

2) Boltzmann, Sitzungsber. der Wiener Acad. d. Wiss. 82 (2) p. 826 u. 1167; 1880. Das Fehlerhafte seiner Entwicklungen ist bereits von Kirchhoff a. a. O. dargelegt.

3) Kopp, Theorie der Elektrostriction kugelförmiger Condensatoren. Dissertation, Leipzig 1890. — Der Verf. setzt die elektrischen Drucke an den Belegungen proportional mit K^2 statt K, erhält durch falsche Differentiation Kraftcomponenten für das Innere des Dielektricums und macht ferner den Fehlschluss, die Glieder mit α und β als klein zu vernachlässigen, weil sie nur von den Aenderungen herrührten, welche die Dielektricitätsconstante durch die Elektrostriction selbst erlitte.

4) Quincke, Wied. Ann. 10, p. 165, 1880, 19, p. 573, 1883.

durchaus notwendig ist, die Elasticitätsconstanten und Dielektricitätsconstante der einzelnen Apparate direct bestimmte. Allein seine Beobachtungsresultate stimmen doch zu wenig unter einander überein und scheinen zu sehr durch mancherlei unvermeidliche Fehlerquellen, wie die Leitungsfähigkeit des Glases, gestört zu sein, als dass man sie zu einer exacten Vergleichung mit der Theorie resp. zu Schlüssen über die Grössen α und β verwenden könnte.

Man hat die Elektrostriction ferner an cylinderförmigen Condensatoren beobachtet, bestehend aus Glasröhren, deren Belegungen entweder von einem dünnen Silberüberzuge, oder wiederum von leitender Flüssigkeit gebildet wurden. Messungen der Längenänderung solcher Cylindercondensatoren hat schon 1879 Righi [1]) mit Hülfe eines Fühlhebels ausgeführt, und später in grösserem Umfange Quincke [2]), welcher zugleich die „Zunahme des inneren Volumens" der Röhren bestimmte; noch genauer sind vielleicht die 1887 von Cantone [3]) in Palermo angestellten Beobachtungen, wobei die Verlängerung durch die Verschiebung Newton'scher Interferenzstreifen gemessen wurde. – Die Integration der Gleichungen 5) mit den Grenzbedingungen 6') für den Fall eines unendlich langen Cylindercondensators, wo nur radial gerichtete elektrische Kräfte wirken, ergiebt, dass die bei der Ladung eintretende Deformation im Falle sehr geringer Wanddicke bestehen würde in einer Erweiterung des Cylinders, die gegeben ist durch

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2 E}\left\{\frac{K}{4\pi}(1+\nu)+\alpha\nu-\beta\right\}$$

und in einer Längsdilatation

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2 E}(\alpha+\beta)\nu$$

Das vorstehende Resultat würde auch noch für einen begrenzten Cylinder bestehen bleiben, wenn dessen Belegungen unveränderliche Länge hätten.

Sobald aber eine Längenänderung des Glases auch mit einer gleich grossen der Belegung verbunden ist, wie es eintritt, wenn die Belegungen auch für tangentiale Kräfte fest am Glase haften,

---

1) Righi, Compt. rend. LXXXVIII, p. 1263, 1879; Journ. de phys. (1) IX p. 203.

2) Quincke, Wied. Ann. 10 p. 374, 515; 1880; 19 p. 569, 1883.

3) Cantone, Rend. della R. Acc. dei Lincei IV, p. 344, 471, 1888.

oder wenn der Cylinder unten geschlossen ist, und eine leitende Flüssigkeit als innere Belegung dient, so kommt noch eine Längsdilatation

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2 E}\left(\frac{K}{4\pi} - \beta\right)$$

und eine entsprechende Quercontraction

$$\frac{\delta r}{r} = -\frac{\varphi_0^2 \nu}{2d^2 E}\left(\frac{K}{4\pi} - \beta\right)$$

hinzu, so dass dann die genannten relativen Aenderungen der Länge, des Radius und des Volumens gegeben sind durch

$$8. \quad \left|\begin{array}{l} \frac{\delta l}{l} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2 E}\left(\frac{K}{4\pi} + \alpha\nu - \beta(1-\nu)\right) \\ \frac{\delta r}{r} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2 E}\left(\frac{K}{4\pi} + \alpha\nu - \beta(1-\nu)\right) \\ \frac{\delta v}{v} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta r}{r} = \frac{3\varphi_0^2}{2d^2 E}\left(\frac{K}{4\pi} + \alpha\nu - \beta(1-\nu)\right) \end{array}\right.$$

Somit ist

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\delta r}{r} = \frac{1}{3}\frac{\delta v}{v}$$

und der Ausdruck für $\frac{\delta v}{v}$ stimmt völlig mit demjenigen 7) überein, welcher für einen dünnwandigen Kugelcondensator gilt. Dieses Resultat hat schon Korteweg [1]) lediglich mit Hülfe des Energieprincips abgeleitet.

Die oben ausgesprochene Voraussetzung, unter welcher dasselbe gilt, war nun ohne Zweifel bei allen Beobachtungen erfüllt, und in der Tat hat sich die Relation

$$9. \quad \frac{\delta l}{l} = \frac{1}{3}\frac{\delta v}{v}$$

dabei immer ziemlich gut bestätigt, wodurch Quincke [2]) anfangs zu dem falschen Schlusse veranlasst wurde, dass sich das Glas in Folge der dielektrischen Polarisation allseitig gleichmässig ausdehne, wie durch Erwärmung. Die Längsdehnung eines unten ge-

1) Korteweg, Wied. Ann. 12, p. 647, 1881.

2) Quincke, Wied. Ann. 10. p. 515; 1880. Die Unrichtigkeit dieses Schlusses wurde zuerst dargetan von Röntgen. Wied. Ann. 11, p. 771, 1880.

schlossenen Cylindercondensators mit Flüssigkeitsbelegungen hat Lorberg [1]) auf Grund der allgemeinen Theorie der Elektrostriction in Strenge zu berechnen versucht, indem er verschiedene speciellе Annahmen über die Form der den Cylinder schliessenden Calotte einführte; bei dieser Rechnung ist er jedoch in Irrtümer geraten, in Folge deren das Resultat von dem unter 8) angegebenen abweicht. Das letztere ist (im Gegensatz zu dem von Lorberg) unabhängig von der besonderen Form der erwähnten Calotte, wenn man auch, um es aus den Gleichungen 6) und 6') abzuleiten, eine solche besondere Form, z. B. die einer Kugelschale, annehmen muss; in der Tat ist leicht einzusehen, dass die Form der Calotte nur Einfluss haben kann auf ihre eigenen Deformationen, welche das Gesamtresultat nur unmerklich modificiren können und in den Formeln 8) auch tatsächlich vernachlässigt sind. — Die falschen Lorberg'schen Formeln hat Cantone in der schon citirten Arbeit übernommen und benutzt, um aus seinen Beobachtungen, welche an halbkugelförmig geschlossenen Glasröhren angestellt wurden, die Grössen α und β zu berechnen. Die hierfür von ihm angegebenen Werte sind also ebenfalls unrichtig; in Wahrheit kann man, wie die richtigen Formeln 8) zeigen, aus jenen Beobachtungen $\left(\text{von } \frac{\delta l}{l} \text{ und } \frac{\delta v}{v}\right)$ überhaupt gar nicht α und β getrennt berechnen, sondern nur die Combination $\nu\alpha - (1-\nu)\beta$. Aber auch die hierfür aus Cantone's Beobachtungen sich ergebenden Werte, welche $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ betragen würden, können wegen der unsicheren Kenntniss der Dielektricitätsconstante, der von Cantone erwähnten Abhängigkeit der Dilatationen von der Ladungsdauer u. s. w. noch nicht als zuverlässig betrachtet werden. Eine Wiederholung der Versuche nach der von Cantone angewandten Methode mit recht gut isolirenden Glassorten wäre wünschenswert.

Die Beobachtungen, welche von Quincke, sowie von Korteweg und Julius an Kautschuk und von ersterem an Glimmer angestellt worden sind, mögen hier übergangen werden, da sie eine Vergleichung mit der Theorie nicht gestatten. Wir wenden uns vielmehr zu den Deformationen magnetisirbarer fester Körper im magnetischen Felde.

Beobachtungen über Magnetostriction.

Schon seit Joule war die Tatsache bekannt, dass sich ein Eisenstab durch longitudinale Magnetisirung verlängert, und 1879

1) Lorberg, Wied. Ann. 21, p. 300; 1884.

führte Righi [1]) Messungen dieser Verlängerung aus, welche ergaben, dass letztere proportional dem Quadrate der Intensität des (durch einen galvanischen Strom erzeugten) magnetischen Feldes war. Die Berechnung der Deformation eines den Kraftlinien parallelen cylindrischen Stabes würde sich nicht streng durchführen lassen, sondern höchstens in gewisser Annäherung für den Fall sehr kleiner Querdimensionen, wo man die Selbstinduction vernachlässigen, d. h. annehmen könnte, dass das magnetische Feld durch das Hineinbringen des Stabes nicht merklich geändert würde [2]). Daher hat Cantone [3]) dem Metallkörper die Form eines sehr gestreckten Rotationsellipsoides gegeben, für welches das Problem streng lösbar ist. Das homogene Magnetfeld wurde durch einen Strom, welcher eine das Ellipsoid umgebende Drahtspirale durchfloss, erzeugt, die Längenänderung des Ellipsoids mittelst der Verschiebung von Interferenzstreifen, und seine Volumänderung mittelst eines mit Flüssigkeit gefüllten Dilatometers gemessen, in welches das Ellipsoid hineingestellt wurde. Aus diesen beiden Messungen kann man, nachdem noch die Magnetisirungsconstante besonders bestimmt worden ist, die Grössen berechnen, welche den früher mit α und β bezeichneten analog sind und also die Aenderung der Magnetisirungsconstante durch Deformationen bestimmen. Cantone findet für dieselben bei Eisen und Nickel Werte, welche im Verhältniss zur Magnetisirungsconstante selbst so ausserordentlich gross sind, dass sie den Sinn der Deformationen allein bestimmen. (Die Zahlenwerte, welche überdies je nach der Feldstärke sehr variirten, sind wol noch wenig zuverlässig). Bei Eisen ist α negativ, β positiv, bei Nickel umgekehrt α positiv, β negativ, da sich Eisen in der Magnetisirungsrichtung ausdehnt, Nickel aber zusammenzieht. Die hohen Werte

---

1) Righi, Memorie dell' Accad. delle Scienze dell' Istit. di Bologna (4) I, 1879.

2) Bei dieser Annäherung ergeben die Maxwell'schen Spannungen allein eine allseitig gleiche Dilatation, und nicht etwa, wie man zunächst erwarten könnte, eine Contraction parallel den Kraftlinien, da das Zusammenziehungsbestreben in dieser Richtung durch die auf die scheinbaren magnetischen Belegungen der Endflächen wirkenden Kräfte überwogen wird. Die an dünnen Eisenstäben von Joule und Righi beobachtete Längsdehnung ist aber nicht in dieser Weise zu erklären, sondern hängt wesentlich von den Spannungen 2ter Art ab (siehe unten).

3) Cantone, Memorie della R. Accad. dei Lincei VI, 1890; Beiblätter 15, p. 49 1891. Die theoretische Behandlung schliesst sich derjenigen an, welche Kirchhoff bereits in Wied. Ann. 25, p. 702, 1885 für eine magnetisirbare Kugel gegeben hatte. Uebrigens war mir das Original nicht zugänglich.

von α und β bringen es mit sich, dass die Deformationen in Folge der Magnetisirung relativ gross sind und selbst schon merkliche Aenderungen der Magnetisirungsconstanten bewirken. Hieraus ergiebt sich, wie leicht zu sehen, eine bestimmte „Abhängigkeit der „Magnetisirungsconstante" von der Feldstärke", welche aber nicht mit der beobachteten im Einklang steht, falls man α und β als Constanten betrachtet. Ebensowenig würde sich bei letzterer Annahme die Tatsache erklären lassen, dass bei einer bestimmten Feldstärke die anfängliche Dehnung eines longitudinal magnetisirten Eisendrahtes in eine Zusammenziehung übergeht. Es ist also bei den stark magnetischen Metallen die Kirchhoff'sche Theorie jedenfalls nur für schwache magnetische Kräfte anwendbar; hierfür hat sie aber insofern eine Bestätigung gefunden, als directe Beobachtungen über den Einfluss mechanischer Dehnung auf die Magnetisirungsconstante für die Dehnungsrichtung gezeigt haben, dass dieser Einfluss bei Eisen anfangs in einer Zunahme, bei Nickel in einer Abnahme besteht, wie es nach der Theorie aus dem Sinn der durch longitudinale Magnetisirung bewirkten Deformation folgt. — Auch die auf einer allgemeineren Grundlage beruhende Theorie, welche J. J. Thomson für die Wechselbeziehungen zwischen Magnetisirung und elastischen Deformationen in seinem Buche „Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie" entwickelt hat, vermag noch nicht alle die merkwürdigen Erscheinungen zu erklären, welche auf diesem, noch weiterer Bearbeitung bedürfenden Gebiete namentlich durch englische Forscher, wie Bidwell und Tomlinson[1]), aufgefunden worden sind.

Elektrische Doppelbrechung.

Es möge schliesslich noch einer interessanten Erscheinung Erwähnung geschehen, welche man mit der Elektrostriction in Zusammenhang gebracht hat: es ist die von Kerr[2]) entdeckte Doppelbrechung gewisser isotroper Körper im elektrischen Felde. Feste isotrope Körper müssen ja durch dielektrische Polarisation in Folge der Deformationen, welche den Gegenstand unserer Betrachtung bildeten, doppelbrechend werden; allein es lässt sich berechnen, dass in Glas, welches für Versuche dieser Art wol allein in Betracht käme, diese Doppelbrechung nur unter sehr günstigen Umständen,

---

1) Vergl. die Referate über deren Arbeiten in Bd. 9, 10, 11, 14 der „Beiblätter"; ferner z. B. Zehnder, Wied. Ann. 41, p. 218, 1891.

2) Kerr, Phil. Magazine (4) L, p. 337 und 446, 1875; Phil. Mag. (5) VIII, 185 und 229, 1879, (5) IX, 114, 1880.

etwa bei einer sehr langen und sehr stark geladenen Franklin'schen Tafel, wahrnehmbar werden kann. In der Tat ist es auch noch fraglich, ob die von Kerr und Brongserma [1]) in Glas beobachtete Doppelbrechung wirklich auf den elektrischen Deformationen, oder auf secundären Wirkungen beruhte, um so mehr, als sie von anderen Beobachtern [2]) bei allem Anschein nach günstigeren Versuchsbedingungen nicht aufgefunden werden konnte. Dagegen ist es ganz unmöglich, die bei isolirenden Flüssigkeiten zuerst von Kerr, dann von Quincke [3]) und Röntgen [4]) beobachtete und gemessene elektrische Doppelbrechung durch Deformationen zu erklären, da in Flüssigkeiten, und besonders in so leicht beweglichen wie der jenes Phaenomen sehr stark zeigende Schwefelkohlenstoff, nur allseitig gleiche Dilatation oder Contraction möglich ist, welche wol eine Aenderung des Brechungsindex, aber keine Doppelbrechung verursachen kann [5]). „Es handelt sich hier demnach offenbar um eine „directe Einwirkung der dielektrischen Polarisation auf die Licht-„bewegung" und dadurch erlangt das Phaenomen gewiss eine hohe Bedeutung. Dasselbe aber als einen Beweis für das wirkliche Vorhandensein der von Maxwell supponirten Spannungen anzusehen wäre nur dann richtig, wenn auch das Vacuum im elektrischen Felde doppelbrechend würde; denn in ponderabelen Dielektricis ist der mit $(K-1)$ proportionale Teil jener Spannungen, wie wir sahen, auch nach der alten Anschauung vorhanden.

Elektrostriction krystallinischer Körper.

Wir wollen nun noch den Erscheinungen der Elektrostriction, welche bei krystallinischen Körpern auftreten können, eine kurze Betrachtung widmen; es werden dabei einige wesentliche Verschiedenheiten gegenüber der Elektrostriction isotroper Körper zu beachten sein.

---

1) Brongserma, Wied. Ann. 16, p. 422; 1882.

2) Gordon, Phil. Mag. (5) .II p. 203, 1876; Mackenzie, Wied. Ann. 2, p. 336, 1877; Quincke, Wied. Ann. 10, p. 533, 1880.

3) Quincke, Wied. Ann. 10, p. 533, 1880; 19, p. 705, 1883; 32, p. 529, 1887.

4) Röntgen, Wied. Ann. 10, p. 77. 1880.

5) Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Charakter der elektrischen Doppelbrechung bei einigen Flüssigkeiten positiv, bei den übrigen negativ ist. Die Versuche Quincke's, diesen Unterschied aus dem verschiedenen Sinne der Aenderung des Brechungsindex durch thermische Dilatation und der Volumänderung im elektrischen Felde zu erklären, sind nicht stichhaltig.

Zunächst nehmen hier diejenigen Krystalle eine besondere Stellung ein, „welche kein Centrum der Symmetrie besitzen", d. h. in welchen entgegengesetzte Richtungen physikalisch ungleichwertig sind (piëzoelektrische Krystalle). Denn in diesen Krystallen sind Deformationen möglich, welche ihr Vorzeichen mit demjenigen der dielektrischen Polarisation umkehren und somit nach der einfachsten Annahme, die übrigens auch experimentell bestätigt worden ist, „lineare Functionen der elektrischen Kraftcomponenten oder Momente" (Polarisationen) sind. Dieselben verhalten sich zu den gewöhnlichen, dem Quadrat der Kraftintensität proportionalen Deformationen gleichsam wie Grössen 1ter Ordnung zu solchen 2ter Ordnung und scheinen auch nach den bisher vorliegenden Beobachtungen (an Quarz) jene bei weitem an Grösse zu übertreffen. Um diese Deformationen zu berechnen, kann man ganz analog verfahren, wie früher bei den von den „Spannungen 2ter Art" herrührenden Deformationen, indem man jetzt in dem Ausdrucke 3) für die potentielle Energie der Volumeinheit noch hinzufügt:

$$9) \quad + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\varepsilon_{11} x_x + \ldots + \varepsilon_{16} x_y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\varepsilon_{21} x_x + \ldots + \varepsilon_{26} x_y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\varepsilon_{31} x_x + \ldots + \varepsilon_{36} x_y)$$

wo die ε_{ik} neue Constanten des Krystalls sind. Die negativen Ableitungen dieses Ausdruckes nach $x_x, \ldots x_y$ liefern dann die neu hinzukommenden Druckcomponenten

$$10) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_x'' &= -(\varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial z}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{B}_x'' &= -(\varepsilon_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon_{24}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon_{34}\frac{\partial \varphi}{\partial z}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche in die Differentialgleichungen 5) und Grenzbedingungen 6) bzhw. 6') neben den früheren einzusetzen sind. Betrachtet man nur die Deformationen erster Ordnung unter Vernachlässigung der dem Quadrate der elektrischen Kraft proportionalen, so hat man also zu deren Bestimmung die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -\frac{\partial \mathfrak{A}_x''}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y''}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z''}{\partial z}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

und die Grenzbedingungen

$$X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = -\mathfrak{A}_x'' \cos(n, x) - \mathfrak{A}_y'' \cos(n, y) - \mathfrak{A}_z'' \cos(n, z)$$

. . . . . .

letztere gültig für den Fall, dass die Oberfläche an ein nicht piëzoelektrisches, gleichviel ob isolirendes oder leitendes Medium grenzt und keinen äusseren Druckkräften ausgesetzt ist; dabei ist allgemein zufolge der Elasticitätstheorie:

$$11) \quad \begin{aligned} -X_x &= c_{11} x_x + \ldots + c_{16} x_y \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -X_y &= c_{61} x_x + \ldots + c_{66} x_y \end{aligned}$$

$$c_{hk} = c_{kh}$$

Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass die obigen Gleichungen nur bei ganz speciellen Vertheilungen der elektrischen Kraft, z. B. im Falle eines (auch noch nach Einführung des Krystalles) homogenen elektrischen Feldes, die einfache Lösung

$$-X_x = \mathfrak{A}_x'', \ldots - X_y = \mathfrak{A}_y'',$$

d. h. die Berechnung der an einer bestimmten Stelle eintretenden Deformationen unmittelbar aus den ebendort herrschenden Drucken $\mathfrak{A}_x'', \ldots \mathfrak{A}_y''$ gestatten.

Da die negativen Ableitungen der potentiellen Energie nach den elektrischen Kräften $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots$ allgemein die inducirten elektrischen Momente (a, b, c) darstellen, so zeigt der Ausdruck 9), dass auch beim Fehlen äusserer elektrischer Kräfte, d. h. für $\varphi = \text{Const.}$, in Krystallen ohne Centrum der Symmetrie elektrische Momente auftreten, wenn sie deformirt werden. Es ergiebt sich so für diese „piëzoelektrische Erregung" der allgemeine Ansatz:

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_{11} x_x + \ldots + \varepsilon_{16} x_y \\ b &= \varepsilon_{21} x_x + \ldots + \varepsilon_{26} x_y \\ c &= \varepsilon_{31} x_x + \ldots + \varepsilon_{36} x_y \end{aligned}$$

welcher 1890 von W. Voigt[1]) aufgestellt und für die einzelnen

1) W. Voigt. Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektr. Erscheinungen an Krystallen; Abhandl. der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 36; 1890.

Krystallgruppen gemäss ihren Symmetrieeigenschaften specialisirt worden ist. Hiernach ist ersichtlich, dass sich die „Deformationen erster Ordnung" berechnen lassen, sobald das piëzoelektrische Verhalten des betreffenden Krystalles vollständig bekannt ist[1]); dies ist bereits für einen einfachen Fall an Quarz von J. und P. Curie[2]) experimentell bestätigt worden.

Wie E. Riecke[3]) gezeigt hat, lassen sich die piëzoelektrischen Erscheinungen auch molekulartheoretisch vollständig erklären, wenn man die Moleküle piëzoelektrischer Krystalle mit gewissen permanent elektrischen Polsystemen behaftet annimmt. Auf Grund dieser Vorstellung kann man nun auch die in dem obigen Ansatze enthaltenen Gesetze für das reciproke Phaenomen, d. h. die „Deformationen erster Ordnung", ableiten, indem man die Wechselwirkung zwischen jenen elektrischen Polsystemen und den durch die äussere elektrische Kraft inducirten Momenten der einzelnen Moleküle berechnet. Dies scheint mir deshalb bemerkenswert, weil sich die Spannungen „zweiter Ordnung", welche in isotropen Medien allein vorhanden sind, nicht in analoger Weise durch Berechnung der Wechselwirkung polarisirter Moleküle, wie es der Clausius-Mosotti'schen Vorstellung von den Dielektricis entsprechen würde, ableiten lassen[4]).

---

1) Dieser Zusammenhang ist zuerst von Lippmann (Journ. de phys. (1) X p. 391 und Ann. de chim. et phys. (5) XXIV p. 164; 1881) für einen speciellen Fall, sodann allgemein vom Verf. (F. Pockels, N. Jahrb. f. Mineralogie. Beilagebd. VII p. 201, 1890) bewiesen worden. P. Duhem (Ann. de l'Ecole Normale Supérieure (3) IX p. 167; 1892) gelangte neuerdings infolge eines Irrtums zu entgegengesetzten Resultaten; vergl. darüber F. Pockels, N. Jahrb. f. Mineralogie, Beilagebd. VIII, p. 407; 1892.

2) J. und P. Curie, Compt. rend. XCV. p. 914, 1882; Journ. de phys. (2) VIII, p. 149; 1889.

3) E. Riecke, Göttinger Nachrichten 1891, p. 191.

4) Berechnet man nämlich die Moleculardrucke, welche aus der Wechselwirkung elektrisch polarisirter Moleküle resultiren würden, so findet man

$$A_x = -2k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

. . . . . .

$$B_x = +2k^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

. . . . . .

wo k eine mit $K-1$ proportionale Constante bezeichnet. Diese Ausdrücke würden mit den früher angegebenen für

Die bei allen Krystallen notwendigerweise ebenfalls auftretenden, wenn auch bisher noch nicht experimentell nachgewiesenen Spannungen, welche dem Quadrate der elektrischen Kraft proportional sind und denjenigen entsprechen, welche wir bei isotropen Körpern zuvor betrachtet haben, lassen sich in ganz analoger Weise berechnen, wie es für letztere von Kirchhoff und Lorberg geschehen ist. Man hat nur zu berücksichtigen, dass an Stelle von $\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}$ in der Formel für die potentielle Energie eines dielektrisch polarisirten Krystalles der Ausdruck tritt:

$$\frac{1}{8\pi}\Big\{K_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+K_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+K_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+2K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$
$$+2K_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\}$$

wo $K_{11}, \ldots K_{12}$ sechs von der Natur des Krystalls und der Orientirung des Coordinatensystems abhängige Constanten sind, die sich durch die 3 Hauptdielektricitätsconstanten k_1, k_2, k_3 und die Richtungscosinus $\alpha_1, \ldots \gamma_3$ der Hauptaxen des Inductionsellipsoides folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= k_1\alpha_1^2+k_2\alpha_2^2+k_3\alpha_3^2\\
K_{22} &= k_1\beta_1^2+k_2\beta_2^2+k_3\beta_3^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
K_{12} &= k_1\alpha_1\beta_1+k_2\alpha_2\beta_2+k_3\alpha_3\beta_3
\end{aligned}\qquad 12)$$

$\mathfrak{A}_x+\mathfrak{A}_x', \ldots \mathfrak{B}_z+\mathfrak{B}_z', \ldots$

(das sind die von der ponderabelen Materie herrührenden Spannungen) übereinstimmen, wenn man die aus der Mosotti-Clausius'schen Theorie, nach welcher $\frac{K-1}{K+2}$ proportional der Dichtigkeit ist, folgende Relation einführt:

$$\alpha=\beta=\frac{(K-1)(K+2)}{12\pi}$$

man erhält dann aber

$$\mathfrak{A}_x+\mathfrak{A}_x'=-\frac{K-1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\frac{(K-1)^2}{24\pi}R^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{B}_x+\mathfrak{B}_x'=-\frac{K-1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

also von $A_x, \ldots B_x, \ldots$ ganz abweichende Ausdrücke.

Hieraus geht hervor, dass sich $K_{11}, \ldots K_{12}$ auch durch blosse Drehungen der Volumelemente (oder des ganzen Krystalls) ändern, und zwar ergiebt sich, wenn λ, μ, ν jene Drehungen um die X-, Y-, und Z-Axe bedeuten,

$$\frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial K_{22}}{\partial \lambda} = -2K_{23}, \quad \frac{\partial K_{33}}{\partial \lambda} = +2K_{23}$$

$$\frac{\partial K_{23}}{\partial \lambda} = K_{22} - K_{33}, \quad \frac{\partial K_{31}}{\partial \lambda} = K_{12}, \quad \frac{\partial K_{12}}{\partial \lambda} = -K_{31}$$

woraus die Differentialquotienten nach μ und ν leicht durch cyklische Permutation ableitbar sind. Dies ist zu berücksichtigen, wenn man nach dem Vorgange Kirchhoff's die Variation berechnen will, welche das Raumintegral

$$13) \qquad \int \left(\varepsilon\varphi - \frac{1}{8\pi} \left\{ K_{11} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \ldots + 2K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} \right) dk$$

dadurch erleidet, dass (bei unverändertem φ) in dem krystallinischen Dielektricum ein beliebiges System von Verschiebungen ξ, η, ζ hervorgebracht wird; denn ein solches ist mit Drehungen der Volumelemente verbunden, deren Componenten λ, μ, ν durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$$

gegeben sind. Setzt man die so berechnete Variation des obigen Integrals, d. i. die Variation der Energie bei Vernachlässigung des Einflusses der Deformationen auf $K_{11} \ldots K_{12}$, nachdem man noch die von den Drehungen herrührenden Glieder durch partielle Integration so umgeformt hat, dass sie ebenfalls die Factoren ξ, η, ζ erhalten, gleich der negativen Arbeit der ponderomotorischen Kräfte: $-(A\xi + B\eta + C\zeta)$, und bringt die so gefundenen Ausdrüke A, B, C unter Benutzung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{33}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right) = -4\pi\varepsilon$$

welcher φ genügt, auf die Form

$$-\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}, -\frac{\partial B_x}{\partial x} \ldots, -\frac{\partial C_x}{\partial x} \ldots,$$

so erhält man diejenigen Spannungscomponenten, welche im krystallinischen Dielektricum an Stelle der durch die Gleichungen (1) dargestellten Maxwell'schen Spannungen treten.

Das Resultat ist:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\frac{1}{8\pi}\Big\{K_{11}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 - K_{22}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 - K_{33}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)^2 \\ &\quad - 2K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big\} \\ B_y &= -\frac{1}{8\pi}\Big\{-K_{11}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 + K_{22}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 - K_{33}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)^2 \\ &\quad - 2K_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big\} \\ C_z &= -\frac{1}{8\pi}\Big\{-K_{11}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 - K_{22}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 + K_{33}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)^2 \\ &\quad - 2K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\} \end{aligned}\right\}$$

14.

$$\left.\begin{aligned} B_z = C_y &= -\frac{1}{8\pi}\Big\{K_{23}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)^2\Big] + (K_{22}+K_{33})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ &\quad + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\} \\ C_x = A_z &= -\frac{1}{8\pi}\Big\{K_{31}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2\Big] + (K_{33}+K_{11})\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ &\quad + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\} \\ B_x = A_y &= -\frac{1}{8\pi}\Big\{K_{12}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2\Big] + (K_{11}+K_{22})\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ &\quad + K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big\} \end{aligned}\right\}$$

Natürlich ergeben auch diese Spannungen keine Kraftcomponenten für das Innere eines homogenen, keine wahre Elektricität enthaltenden Dielektricums, d. h. es ist $\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$ nebst den beiden analogen Ausdrücken null zufolge der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big\{K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big\}+\frac{\partial}{\partial y}\Big\{K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big\} + \frac{\partial}{\partial z}\Big\{K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+K_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big\} = 0$$

welcher das elektrische Potential φ daselbst genügt.

Die Deformation des dielektrischen Krystalls ist also zu berechnen aus den für das Innere geltenden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

. . . . . .

und den Oberflächenbedingungen

$$X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = (-A_x + A_x') \cos(n, x) + (-A_y + A_y') \cos(n, y) + (-A_z + A_z') \cos(n, z)$$

. . . . . .

worin $X_x, \ldots X_y$ die durch 11) gegebenen linearen Functionen der Deformationen und $A_x', \ldots A_y'$ die Maxwell'schen Spannungen in dem angrenzenden Medium sind. Dabei ist zu berücksichtigen, dass in den Grenzbedingungen für φ im krystallinischen Medium an Stelle von $K\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ der allgemeinere Ausdruck tritt:

$$\left(K_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cos(n, y) + \left(K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cos(n, z)$$

Die vorstehenden Resultate, bzhw. die entsprechenden für magnetisch polarisirte Krystalle, sind in etwas anderer Form von Hertz in seiner p. 65 citirten Abhandlung (p. 389 ff.) abgeleitet worden; dagegen stehen sie im Widerspruch zu denen, welche Maxwell in seinem „Treatise on electr. and magn.", Art. 641 — 643, angiebt. Nach letzterem wirken nämlich auf die Volumelemente des magnetisch oder dielektrisch polarisirten Krystalles auch Drehungsmomente, während nach Hertz nur Druckkräfte von der Natur der elastischen, charakterisirt durch die Relationen

$$A_y = B_x, \quad B_z = C_y, \quad C_x = A_z$$

auftreten. Nun würde man in der Tat nach der molecularen Vorstellung von der Natur eines Dielektricums, also etwa nach der Mosotti-Clausius'schen Hypothese, das Auftreten von Drehungsmomenten im Falle anisotroper Structur erwarten, weil dann die Axen der polarisirten Moleküle nicht den Kraftlinien parallel sind, und somit das Bestreben vorhanden sein muss, die ersteren in die Richtung der letzteren zu drehen. Dementsprechend zeigt auch die nähere Unter-

suchung, dass man zu dem Maxwell'schen „unsymmetrischen" Spannungssysteme, bei welchem nicht $A_y = B_x$ etc. ist, und welches daher Drehungsmomente ergiebt, gelangt, wenn man selbstständige Drehungen der einzelnen Volumelemente als möglich annimmt. Dann kann man nämlich die Variation der potentiellen Energie für ein beliebiges Verschiebungssystem ξ, η, ζ berechnen, ohne auf die Drehungen der Volumelemente $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)$ etc. Rücksicht zu nehmen; denn man kann sich diese Drehungen einzeln rückgängig gemacht denken. Tut man dies, so findet man für A_x, B_y, C_z die früheren Ausdrücke, statt der in 14) angegebenen Werte der übrigen Druckcomponenten aber die folgenden:

14')
$$\left|\begin{aligned}
B_z &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{23}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}\\
C_y &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{23}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\\
A_z &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{13}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}\\
C_x &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{13}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\\
A_y &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}\\
B_x &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}
\end{aligned}\right.$$

Hieraus resultiren dieselben deformirenden Kräfte wie früher, weil $\frac{1}{2}(B_z + C_y)$, $\frac{1}{2}(C_x + A_z)$, $\frac{1}{2}(A_y + B_x)$ noch die früheren Werte haben, aber ausserdem Drehungsmomente, deren Componenten gegeben sind durch

$$L = B_z - C_y, \quad M = C_x - A_z, \quad N = A_y - B_x$$

Dieselben Drehungsmomente findet man, wenn man die durch willkürliche Drehungen λ, μ, ν der einzelnen Volumelemente, die ja nach der augenblicklich von uns angenommenen Vorstellung möglich sind, verursachte Energieänderung berechnet und gleich $-(L\lambda + M\mu + N\nu)$ setzt.

Fragen wir nun nach den Folgen des Unterschiedes zwischen den Formelsystemen 14) und 14'), so ist zunächst zu bemerken, dass sich für die gesamten, auf einen Krystall im elektrischen Felde

wirkenden Kräfte und Drehungsmomente aus beiden dieselben Werte ergeben, indem die Differenz der aus 14) und 14′) folgenden, auf die Oberfläche des Krystalls wirkenden Kräfte gerade aufgehoben wird durch die nach 14′) hinzukommenden auf dessen innere Elemente ausgeübten Drehungsmomente. Ein Unterschied kann also höchstens in den Deformationen auftreten, und zwar würde dies dann der Fall sein, wenn die durch L, M, N hervorgerufenen Molekulardrehungen ihrerseits Deformationen zur Folge hätten. Es ist dies ein Punkt, über welchen man noch keinerlei Kenntniss besitzt, weil man eben kein anderes Mittel als elektrische oder magnetische Kräfte besitzt, um Drehungsmomente auf die Moleküle auszuüben. Die im Falle des Vorhandenseins solcher Drehungsmomente notwendige Erweiterung der Elasticitätstheorie ist von W. Voigt gegeben worden [1]). — Dass es gelingen werde, mit unseren jetzigen Hilfsmitteln jenen etwaigen Unterschied in den Deformationen nachzuweisen und somit experimentell zwischen den Formeln 14 und 14′) zu entscheiden, ist leider wol völlig ausgeschlossen, da die elektrischen (oder gar magnetischen) Deformationen „2ter Ordnung" bei Krystallen überhaupt kaum messbar sein werden, um so weniger aber der fragliche Unterschied, welcher von den Differenzen der Haupt-Dielektricitäts- (bzhw. Magnetisirungs)-Constanten des Krystalls abhängt.

Aber selbst, wenn es gelänge, auf diesem experimentellen Wege die Unzulässigkeit des symmetrischen Spannungssystems zu erweisen (— eine das unsymmetrische ausschliessende Entscheidung wäre nicht möglich —), so würde man darum noch nicht die Grundvorstellung von Maxwell und Hertz aufzugeben brauchen; denn die Existenz der fraglichen Drehungsmomente wird, wie Hertz l. c. p. 395 bemerkt, mit derselben vereinbar, wenn man den Aether bei den Bewegungen der Materie als ruhend annimmt, in welchem Falle allerdings die Hertz'sche Theorie einer Modification bedürfte.

Wie bei isotropen Körpern, so bedürfen auch in Krystallen die Spannungen $A_x, \ldots$ einer Ergänzung (— bestehend in den Spannungen 2ter Art —) wegen der Aenderung der dielektrischen Polarisation durch Deformation. Man wird bei Krystallen die sechs, das dielektrische Verhalten bestimmenden Grössen $K_{11}, \ldots K_{12}$ als lineare Functionen der Deformationsgrössen $x_x, \ldots x_y$ einführen, also den Ansatz machen:

---

1) W. Voigt, Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, Abhandlungen der kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 34, 1887.

$$K_{11} = K_{11}^{0} + k_{11}x_x + k_{12}y_y + k_{13}z_z + k_{14}y_z + k_{15}z_x + k_{16}x_y$$

15) . . . . . .

$$K_{12} = K_{12}^{0} + k_{61}x_x + k_{62}y_y + k_{63}z_z + k_{64}y_z + k_{65}z_x + k_{66}x_y$$

worin im allgemeinen 36 neue, dem Krystall eigentümliche Constanten $k_{m,n}$ vorkommen [1]). Zufolge diesem Ansatz erhält man (— wenn man den Index ^{0} der Grössen K auf der rechten Seite wieder fortlässt —) folgenden Ausdruck für die potentielle Energie der Volumeinheit des deformirten und dielektrisch polarisirten Krystalls:

16)
$$V = \Phi - \frac{1}{8\pi}\left\{K_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$
$$-\frac{1}{8\pi}\left\{k_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2k_{61}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}x_x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{1}{8\pi}\left\{k_{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2k_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}x_y$$

woraus dann in analoger Weise wie früher folgende Werte für die Spannungen 2ter Art $\mathfrak{A}_x' \ldots \mathfrak{A}_y'$ folgen:

$$\mathfrak{A}_x' = \frac{1}{8\pi}\left\{k_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + k_{21}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + k_{31}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + 2k_{41}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right.$$
$$\left. + 2k_{51}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2k_{61}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

17) . . . . . .

$$\mathfrak{A}_y' = \mathfrak{B}_x' = \frac{1}{8\pi}\left\{k_{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + k_{26}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + k_{36}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + 2k_{46}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right.$$
$$\left. + 2k_{56}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2k_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

---

1) Der auf die elektrischen Deformationen 2ter Ordnung der Krystalle bezügliche Schlusssatz meiner Abhandlung im N. Jahrb. f. Min., Beil.-Bd. VII, p. 231, wo ich jene Anzahl zu 21 angab, ist unrichtig. — Um den Vergleich mit den früheren Entwicklungen für isotrope Körper zu erleichtern, sei bemerkt, dass für letztere zu setzen ist:

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = -4\pi\alpha$$
$$k_{12} = k_{13} = k_{21} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = -4\pi\beta$$
$$k_{44} = k_{55} = k_{66} = -2\pi(\alpha - \beta)$$

während alle übrigen $k_{m,n} = 0$ werden.

Man hätte V statt als Function der elektrischen Kräfte $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ auch als solche der elektrischen Momente oder Polarisationen a, b, c, welche mit letzteren durch die Relationen

$$a = -K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

. . . . . .

verbunden sind, darstellen können; die Form bleibt dabei ganz ungeändert, nur treten an Stelle von $K_{11}, \ldots K_{12}$ andere Constanten $K_{11}', \ldots K_{12}'$, und in 17) an Stelle von $k_{11} \ldots k_{66}$ ebenfalls neue Constanten $k_{11}', \ldots k_{66}'$, welche definirt werden durch

$$k_{11}' = \frac{\partial K_{11}'}{\partial x_x}, \ldots k_{16}' = \frac{\partial K_{11}'}{\partial x_y}, \ldots k_{66}' = \frac{\partial K_{12}'}{\partial x_y}$$

In dieser Form hat Hertz a. a. O. die von der magnetischen Polarisation herrührenden Spannungen dargestellt; seine Constanten μ_{kk}', $\mu_{11,11}', \ldots \mu_{11,12}' \ldots \mu_{12,12}'$ entsprechen genau den K_{kk}', $k_{11}', \ldots k_{16}' \ldots k_{66}'$.

Die Constanten K_1', K_2', K_3', durch welche sich $K_{11}', \ldots K_{12}'$ nach den Formeln 12) ausdrücken würden, sind die reciproken Werte der Haupt-Dielektricitätsconstanten des Krystalls; sie würden nach der elektromagnetischen Lichttheorie also mit den Quadraten der drei Hauptlichtgeschwindigkeiten, bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit in Luft $= 1$, übereinstimmen. Daraus folgt, dass dann K_{11}', $\ldots K_{12}'$ mit den 6 das „Fresnel'sche Ovaloid" bestimmenden Grössen $\frac{B_{11}}{v^2}, \ldots \frac{B_{12}}{v^2}$, und die $k_{m,n}'$ mit den von mir eingeführten [1]), die Aenderung des optischen Verhaltens durch elastische Deformationen bestimmenden Constanten $\frac{a_{m,n}}{v^2}$ identisch werden, und dass insbesondere die Anzahl der verschiedenen $k_{m,n}'$ sich für die einzelnen Krystallsysteme in genau derselben Weise reducirt, wie ich es für die $a_{m,n}$ durchgeführt habe. Wenn nun auch jene Uebereinstimmung keine vollständige sein wird, so kann man doch jedenfalls sagen, dass die $k_{m,n}'$ für hinreichend langsame elektrische Schwingungen genau dieselbe Bedeutung haben, wie die $\frac{a_{m,n}}{v^2}$ für

1) F. Pockels, Wied. Ann. 37, p. 151; 1889.

Lichtschwingungen, und dass daher beide Arten von Constanten voraussichtlich von derselben Grössenordnung sein werden.

Diese Grössen $k_{m,n}$ und $\mu_{m,n}$, von welchen die Aenderung des dielektrischen und magnetischen Verhaltens in Folge elastischer Deformationen abhängt, zu ermitteln, würde der Hauptzweck weiterer Beobachtungen über Elektrostriction und Magnetostriction sein. Denn wir haben gesehen, dass aus diesen Erscheinungen nicht, wie man oft meinte, eine Entscheidung für oder gegen die Maxwell'sche Theorie von der Vermittelung aller elektrischen und magnetischen Wirkungen durch Spannungen oder Drucke hergeleitet werden kann. — Wenn aber auch andere Gründe voraussichtlich zur allgemeinen Annahme der Vorstellung Maxwell's führen werden, so darf man doch nicht vergessen, dass diese selbst, um völlig befriedigend zu werden, nach Maxwell's eigenem Zugeständniss [1]) noch die Lösung der schwierigen Aufgabe erfordert: „die Spannungen in einem dielek-„trisch oder magnetisch polarisirten Medium aus den bekannten Prin-„cipien der Mechanik, genauer gesagt, der Dynamik, zu erklären".

1) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism Art. 110, p. 163 der Uebersetzung.

VI.

Osculirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n Dimensionen.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Die osculirende Kugel einer Raumcurve ist das analoge Gebilde des Krümmungskreises einer ebenen Curve. Damit ist die Frage nach einem allgemeinern Gebilde für beliebig vielfach gekrümmte Linien an die Hand gegeben, welches die zwei genannten als besondere in sich begreift. Um soviel als möglich die Rechnung durch räumliche Anschauung zu illustriren, lasse ich die Herleitung der osculirenden Kugel in solcher Weise vorausgehen, dass jede dazu verwandte Operation sich sichtlich sogleich von der Dreizahl auf n erweitern lässt.

§. 1. Osculirende Kugel.

Ein Punkt P einer Curve s sei Anfang der xyz. Drei andre Punkte derselben P_1, P_2, P_3 haben die unabhängig unendlich kleinen Bogenabstände u_1, u_2, u_3 von P. Dann ist (Stetigkeit bis auf 3. Ordnung vorausgesetzt):

$$x_h = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\partial^\mu x}{\partial s^\mu} \frac{u_h{}^\mu}{\mu!}; \quad \text{etc.} \quad (h = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Der Mittelpunkt der Kugel, welche durch die 4 Punkte geht, ist der Schnitt der Ebenen E_1, E_2, E_3, welche die Sehnen PP_1, PP_2, PP_3 normal halbiren. Ihre Gleichungen sind:

$$x_h(x_0 - \tfrac{1}{2}x_h) + y_h(y_0 - \tfrac{1}{2}y_h) + z_h(z_0 - \tfrac{1}{2}z_h) = 0 \quad \text{oder:}$$

$$x^h x_0 + y_h y_0 + z_h z_0 = \tfrac{1}{2} r_h^2 \quad (h = 1, 2, 3)$$

nach deren Auflösung man erhält:

$$\Delta x_0 = \tfrac{1}{2} \Delta_x \tag{2}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}; \quad \text{etc.} \tag{3}$$

und die r die Radienvectoren bezeichnen.

Seien nun ξ, η, ζ die Coordinaten eines der Punkte P_1, P_2, P_3 in Bezug anf die Tangente, Haupt- und Binormale in P, und $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 e_2$, $a_3 b_3 c_3$ die Richtungscosinus der genannten 3 Fundamentalaxen der Curve. Dann ist nach den Formeln (1) bis auf 3 Ordnung

$$\xi_h = u_h - \frac{u_h^3}{6\varrho^2}; \quad \eta_h = \frac{u_h^2}{2\varrho} - \frac{\partial \varrho}{6\varrho^2 \partial s} u_h^3; \quad \zeta_h = \frac{u_h^3}{6\varrho\pi} \tag{4}$$

wo ϱ und π den Krümmungs- und Torsionsradius bezeichnen, und

$$\left.\begin{aligned} x_h &= a_1 \xi_h + a_2 \eta_h + a_3 \zeta_h \\ y_h &= b_1 \xi_h + b_2 \eta_h + b_3 \zeta_h \\ z_h &= c_1 \xi_h + c_2 \eta_h + e_3 \zeta_h \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist. Hiernach wird

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{u_1 u_2 u_3}{12\varrho^2 \pi} \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

mit Weglassung der Terme höherer Ordnung. Ferner ist nach Gl. (5) (4)

$$r_h^2 = \xi_h^2 + \eta_h^2 + \zeta_h^2 = u_h^2 - \frac{u_h^4}{12} + \ldots$$

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} \zeta_2 & \zeta_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}; \quad \text{etc.} \tag{7}$$

Da nun Δ 6. Ordnung, r_h^2 2. Ordnung ist, so sind in den Ausdrücken (7) nur die Terme 4. Ordnung beizubehalten. Im Ausdruck (3) von Δ_x hebt sich der erste Term von η gegen die r^2; man hat also nur einzuführen:

$$\xi_h = u_h; \quad \eta_h = -\frac{\partial \varrho}{\partial s}\frac{u_h^3}{6\varrho^2}; \quad \zeta_h = \frac{u_h^3}{6\varrho\pi} \tag{8}$$

dann wird im Ausdruck (7) die erste Determinante mindestens 7. Ordnung, fällt also weg, die beiden übrigen sind 4. Ordnung, und es ergibt sich:

$$\Delta_x = \frac{a_2}{6\varrho\pi}\begin{vmatrix} u_h^2 & u_h^3 & u_h \end{vmatrix} - \frac{a_3}{6\varrho^4}\frac{\partial \varrho}{\partial s}\begin{vmatrix} u_h^2 & u_h & u_h^3 \end{vmatrix} \quad (h = 1, 2, 3)$$
$$- \frac{u_1 u_2 u_3}{6\varrho^2\pi}\begin{vmatrix} 1 & u_h & u_h^2 \end{vmatrix}\left(a_2\varrho + a_3\pi\frac{\partial \varrho}{\partial s}\right)$$

daher nach Gl. (2) (6):

$$x_0 = a_2\varrho + a_3\pi\frac{\partial \varrho}{\partial s}: \quad \text{etc.} \tag{9}$$

Für einen beliebigen Anfangspunkt ist hierzu noch x zu addiren, $x + a_2\varrho$ ist die Coordinate des Krümmungsmittelpunkts, und der Mittelpunkt der osculirenden Kugel erweist sich als der Coincidenzpunkt der Krümmungsaxe, d. h. er erzeugt deren Einhüllende. Ist R der Radius der Kugel, so hat man:

$$R^2 = \varrho^2 + \left(\pi\frac{\partial \varrho}{\partial s}\right)^2 \tag{10}$$

§ 2. Das osculirende der Kugelfläche analoge Gebilde.

Das der Kugelfläche analoge Gebilde in $n$facher Mannigfaltigkeit, welches wir kurz runde $(n-1)$dehnung nennen, ist der Ort des Endpunkts einer constanten Strecke eines von festem Centrum ausgehenden Strahles. Wird die $n$fache Mannigfaltigkeit ausser dieser Bedingung durch $n-m$ lineare Gleichungen beschränkt, so ergibt sich eine runde $(m-1)$dehnung als linearer Schnitt der runden $(n-1)$dehnung. Man kann daher bei Darstellung der runden (1, 2, 3, . . . $n-1$)dehnungen die Zahl n der variabeln Coordinaten eines Punkts unverändert beibehalten.

Die n Coordinaten eines beliebigen Punkts in Bezug auf n feste rechtwinklige Axen, deren Anfang ein Punkt P der Curve s sei, seien durch $\overset{k}{x}(k = 1, 2, \ldots n)$ oder kurz durch x bezeichnet. Ferner seien $\overset{k}{a}_h$ oder $a_h (h = 1, 2, \ldots n)$ die Richtungscosinus der n Fundamentalaxen A_h. Deren Theorie habe ich in dem Aufsatz XXI. 5. (Tl. XI. S. 442) entwickelt und verweise hier auf denselben.

Wie leicht erhellt, geht jede lineare $(n-1)$dehnung durch den Mittelpunkt einer runden $(m-1)$dehnung, wenn sie irgend eine Sehne derselben normal halbirt. Seien nun $P_h (h = 1, 2, \ldots m)$ mit den Coordinatea x_h Curvenpunkte in unendlich kleinen Bogenabständen u_h von P. Dann hat ein Punkt x_0 auf der linearen $(m-1)$dehnung, welche die Sehne

$$PP_h = r_h = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_h^2}$$

normal halbirt, die Gleichung zu erfüllen:

$$\sum_{k=1}^{n} x_h (x_0 - \tfrac{1}{2} x_h) = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma_k x_h x_0 = \tfrac{1}{2} r_h^2 \tag{11}$$

Um aber Mittelpunkt der runden $(m-1)$dehnung zu sein, muss er ausserdem in der linearen $m$dehnung liegen, welche durch die $m+1$ Punkte P, $P_1, \ldots P_m$ bestimmt ist, folglich für irgend welche Werte der Parameter v_h die Gleichung

$$x_0 = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu v_\mu \tag{12}$$

befriedigen. Dieser Wert in Gl. (11) eingeführt gibt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} v_\mu \sum_{k=1}^{n} x_h x_\mu = \tfrac{1}{2} r_h^2 \tag{13}$$

Gilt diese Gleichung für $h = 1, 2, \ldots m$, so sind die m Parameter v_μ und durch diese nach Gl. (12) die Coordinaten des Mittelpunkts x_0 bestimmt.

Zunächst kann man von der linearen $m$dehnung (12) zur osculirenden $m$dehnung übergehen. Nach taylor'scher Entwickelung ist

$$x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{u_\mu^\lambda}{\lambda!} x^{(\lambda)} \tag{14}$$

Setzt man dann

$$w_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu u_\mu^\lambda : \lambda! \tag{15}$$

so wird

$$x_0 = \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda x^{(\lambda)} + R \tag{16}$$

wo R für endliche w verschwindet. Entwickelt man ebenso x_h und r_h^2, so erhält man:

$$r_h^2 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\infty} \frac{u_h^\mu}{\lambda!\,(\mu-\lambda)!} \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu-\lambda)}$$
$$= \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{u_h^\mu}{\mu!} B_\mu \tag{17}$$

wo

$$B_\mu = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} (\mu)_\lambda\, x^{(\lambda)} x^{(\mu-\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \{(x^2)^{(\mu)} - 2x\,x^{(\mu)}\}$$

oder, da nach Differentiation $x = 0$ zu setzen ist,

$$B_\mu = \sum_{k=1}^{x} (x^2)^{(\mu)} \tag{18}$$

Führt man dies ein und setzt zur Abkürzung

$$A_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu)} \tag{19}$$

so wird Gl. (11) mit Vernachlässigung des mit $u_h{}^{m+1}$ verschwindenden Restes:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{u_h^\mu}{\mu!} \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda A_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{u_h^\mu}{\mu!} B_\mu \tag{20}$$

Sie wird durch willkürliche u_h, also für jedes h erfüllt, wenn man die Coefficienten der $u_h{}^\mu$ auf beiden Seiten gleich setzt. Dann hat man:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda A_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} B_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots m) \tag{21}$$

und nach Auflösung des Systems:

$$w_\nu \mid A_{\lambda\mu} \mid (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots m) = \tag{22}$$
$$\tfrac{1}{2} \mid A_{1\mu} A_{2\mu} \ldots A_{\nu-1,\mu} B_\mu A_{\nu+1,\mu} \ldots A_{m\mu} \mid (\mu = 1, \ldots m)$$

und nach Gl. (12):

$$x_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)} \mid A_{1\mu} \ldots A_{\nu-1,\mu} B_\mu A_{\nu+1,\mu} \ldots A_{m\mu} \mid : \mid A_{\lambda\mu} \mid \tag{23}$$

mit obigen Werten von λ und μ in den respectiven Determinanten.

Der Radius der osculirenden runden $(m-1)$dehnung ist dann:

$$r_0 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_0{}^2}$$

und die Coordinaten ihres Mittelpunkts in Bezug auf einen beliebigen Anfangspunkt

$$= x + x_0$$

Aus der resultirenden Formel (23) würde sich nur schwer herleiten lassen, dass der Mittelpunkt, wie es die Anschauung fordert und durch geometrische Schlüsse sich ergiebt, auf der normalen linearen $(n-1)$dehnung liegt. Doch folgt dies auch ganz einfach aus einigen vorhergehenden Formeln.

Auf der Rechten der Gl. (20) fehlt der Term $\mu = 1$. Hieraus, wie auch aus Gl. (18) erhellt, dass $B_1 = 0$ ist. Gl. (21) ergibt also:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda A_{\lambda 1} = \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda \sum_{k=1} x' x^{(\lambda)} = 0$$

Multiplicirt man Gl. (16) mit x' und summirt nach k, so erhält man (mit Vernachlässigung von R):

$$\sum_{k=1}^{n} x' x_0 = \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda \sum_{k=1}^{n} x' x^{(\lambda)} = 0 \tag{24}$$

und hiermit den Satz:

„Die Mittelpunkte der osculirenden runden (1, 2, . . . $n-1$)-„dehnungen liegen sämtlich auf der normalen linearen $(n-1)$deh-„nung."

Zugleich ergibt sich die Identität:

$$\sum_{k=1}^{n} x' \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)} \mid A_{1\mu} \ldots A_{\nu-1,\mu} B_{\mu} A_{\nu+1,\mu} \ldots A_{m\mu} \mid = 0 \tag{25}$$

gültig für jede Richtung der Abscissenaxe.

§ 3. Lage des Mittelpunkts der osculirenden runden $(m-1)$dehnung in Bezug auf das Fundamentalaxensystem.

Sind $\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots \xi_{m0}$ die Coordinaten eines beliebigen Punkts P_0 der osculirenden linearen $m$dehnung in Bezug auf die m ersten Fundamentalaxen. so ist

$$x_0 = \sum_{\mu=2}^{m} a_\mu \xi_{\mu 0} \tag{26}$$

Hierdurch ist bereits die Bedingung (12) ersetzt, und damit P_0 Mittelpunkt der osculirenden runden $(m-1)$dehnung sei, so braucht er nur noch die Bedingung (11) für $h = 1, 2, \ldots m$ zu erfüllen, welche nach Substitution der auf x_0 und x_h angewandten Werte (26) lautet:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\mu 0} \xi_{\mu h} = \tfrac{1}{2} r_h^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\mu h}^2 \quad (h = 1, 2, \ldots m) \tag{27}$$

Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt:

$$\Delta \xi_{\nu 0} = \tfrac{1}{2} \Delta_\nu \tag{28}$$

wo

$$\Delta = | \xi_{\mu h} | \quad (\mu, h = 1, 2, \ldots m)$$

$$\Delta_\nu = | \xi_{1h} \xi_{2h} \ldots \xi_{\nu-1,h} r_h^2 \xi_{\nu+1,h} \ldots \xi_{mh} | \ (h = 1, 2 \ldots m)$$

Nach taylor'scher Entwickelung hat man:

$$x_h = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_\mu^{(\lambda)} + u_h^{m+1} R_m \right\}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m-1} a_\mu \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m-1} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_\mu^{(\lambda)} + u_h^m R_{m-1} \right\}$$

wo $\xi_\mu^{(\lambda)}$ den λten Differentialquotienten der Coordinate des laufenden Curvenpunktes in Bezug auf die als fest gedachte μte Fundamentalaxe des Punktes P, also für constante a_μ, bezeichnet. Subtrahirt man die zwei gleichen Ausdrücke, so kommt:

$$0 = a_m \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_m^{(\lambda)} + u_h^{m+1} R_m \right\}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m-1} a_\mu \left\{ \frac{u_h^m}{m!} \xi_m^{(m)} + u_h^{m+1} R_m - u_h^m R_{m-1} \right\}$$

Alle Terme mit Ausnahme der Terme der ersten Summe für $\lambda = 1, 2, \ldots m-1$ haben den Factor u_h^m, folglich sind die Coefficienten der letztern sämtlich null, und man hat:

$$\xi_\mu^{(\lambda)} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots \mu - 1$$

daher:

$$\xi_{\mu h} = \sum_{\lambda=\mu}^{m} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_\mu^{(\lambda)} \tag{29}$$

Führt man diese Werte in die Determinante Δ ein, so erkennt man leicht, dass von jeder Summe (29) nur der erste Term in Rechnung kommt, weil jeder folgende Term dem ersten Term einer folgenden Summe proportionirt ist. Folglich ist

$$\Delta = \left| \frac{u_h^\mu}{\mu!} \xi_\mu^{(\mu)} \right| = | u_h^\mu | \prod_{\pi=1}^{m} \frac{\xi_\pi^{(\pi)}}{\pi!} \quad (h, \mu = 1, 2, \ldots m) \tag{30}$$

Auch Δ_ν bestimmt sich durch die gleiche Betrachtungsweise, wenn man zuvor r_h^2 nach Potenzen von u_h entwickelt. Nach Gl. (27) ist

$$r_h^2 = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\mu h}^2 = \sum_{\lambda=2}^{m} C_\lambda \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \tag{31}$$

$$C_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\frac{1}{2}\lambda} (\xi_\mu{}^2)^{(\lambda)} \tag{32}$$

Die Determinante Δ_ν zerfällt in eine Summe von Determinanten entsprechend den Termen der Summe (31). Jede Teildeterminante besteht wieder aus Determinanten entsprechend allen Combinationen derjenigen Exponenten von u_k, welche in irgend einer Folge die Werte $1, 2, \ldots m$ haben. Von diesen sind die Werte $\nu+1, \nu+2, \ldots m$ bereits übereinstimmend mit Δ festgelegt. Für $\lambda = \nu$ geht die Teildeterminante von selbst in Δ, nur mit anderm Coefficienten über. Für $\lambda < \nu$ sind die Stellen der Exponenten $1, 2, \ldots \lambda-1$ unersetzlich, bleiben also wie in Δ. Die übrigen Exponenten, welche in Δ ihre niedrigsten Werte

$$\lambda, \lambda+1, \ldots \nu-1 \tag{33}$$

hatten, sind durch Erhöhung in beliebiger Folge auf

$$\lambda+1, \quad \lambda+2, \ldots \nu$$

zu bringen, was auf $2^{\nu-\lambda}$ Weisen möglich ist. Das Vorzeichen der so erhaltenen Determinanten wechselt natürlich bei Vertauschung von je 2 Exponenten, die zur Herstellung der aufsteigenden Reihe derselben nötig ist. Sei α die Erhöhungszahl eines beliebigen Gliedes der Reihe (33), und beziehe sich das Summenzeichen S auf die verschiedenen Reihen der α, welche einem $\nu-\lambda$ zugehören; dann wird

$$\Delta_\nu = |\, u_k{}^\mu \,| \frac{1}{\xi_\nu{}^{(\nu)}} \sum_{\varkappa=2}^{\nu} C_k \prod_{\pi=1}^{m} \frac{\xi_\pi{}^{(\pi)}}{\pi\,!} S(-1)^\varepsilon \prod_{\pi=\varkappa}^{\nu-1} \frac{\xi_\pi{}^{(\pi+\alpha)}}{\xi_\pi{}^{(\pi)}}$$

und nach Division durch 2Δ gemäss Gl. (28) (30)

$$\xi_{\nu o} = \frac{1}{2\xi_\nu{}^{(\nu)}} \sum_{\varkappa=2}^{\nu} C_k S(-1)^\varepsilon \prod_{\pi=\varkappa}^{\nu-1} \frac{\xi_\pi{}^{(\pi+\alpha)}}{\xi_\pi{}^{(\pi)}} \tag{34}$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst; denn $\xi_{\nu h}$ bezeichnet die Coordinate des Mittelpunkts der osculirenden runden $(m-1)$ dehnung in Bezug auf die νte Fundamentalaxe.

Da $\xi_{\nu o}$ von m unabhängig ist, so ist der Wert (34) auf jede mehr als $(\nu-2)$ fach gekrümmte Linie anwendbar. Zu jeder $(m-1)$-fach gekrümmten Linie in einer beliebig mehr als $(m-1)$ fachen Mannigfaltigkeit erhält man also eine Reihe von Mittelpunkten osculirender runden $(1, 2, \ldots \nu-1)$ dehnungen, indem man zu den $\nu-1$ Coordinaten aller vorausgehenden Mittelpunkte noch eine νte Coordinate in der hinzukommenden νten Richtung nach Gl. (31) hinzufügt. Demnach bilden der νte und $(\nu-1)$te Mittelpunkt mit

dem laufenden Punkte der Curve stets ein rechtwinkliges Dreieck, und die Mittelpunkte sind die Ecken einer orthogonalen gebrochenen Linie, zu deren Bestimmung man bloss die Längen der geraden Strecken $\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots \xi_{m0}$ zu kennen braucht.

Zu ihrer Berechnung aus Gl. (34) bedarf man der Werte der nicht vollständigen Differentialquotienten von ξ_μ. Nach Definition hat man:

$$x^{(\lambda)} = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \xi_\mu^{(\lambda)}$$

woraus:

$$\sum_{k=1}^{n} a_\nu x^{(\lambda)} = \xi_\nu^{(\lambda)}$$

Der Wert von C_λ ergibt sich aus dem von r_h^2; denn nach Reihenentwickelung von x_h^2 erhält man:

$$r_h^2 = \sum_{k=1}^{n} x_h^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} (x^2)^{(\lambda)}$$

Dies verglichen mit Gl. (31) gibt:

$$C_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \sum_{k=1}^{n} (x^2)^{(\lambda)}$$

Es wird sich wol empfehlen, Tabellen für die Anfangswerte der in Gl. (34) vorkommenden Grössen aufzustellen.

$\nu-\lambda$	Reihen der α	ε
1	1	1
2	11	0
	20	1
3	111	1
	201	0
	300	1
	120	0
4	1111	0
	2011	1
	3001	0
	1201	1
	4000	1
	1300	0
	2020	0
	1120	1

(35)

$\nu-\lambda$	Reihen der α	ε
5	11111	1
	20111	0
	30011	1
	12011	0
	40001	0
	13001	1
	20201	1
	11201	0
	50000	1
	14000	0
	20300	0
	11300	1
	30020	0
	12020	1
	20120	1
	11120	0

$\lambda = 1$	2	3	4	5	(36)
$\frac{1}{2}C_\lambda = 0$	1	0	$-p_1^2$	$-5p_1p_1'$	

wo p_1, p_2, . . . die erste, zweite, . . . Krümmung bezeichnet.

λ	$\xi_\lambda^{(\lambda)}$	$\xi_\lambda^{(\lambda+1)}$	(37)
1	1	0	
2	p_1	p_1'	
3	p_1p_2	$2p_2p_1'+p_1p_2'$	
4	$p_1p_2p_3$	$3p_1'p_2p_3+2p_1p_2'p_3+p_1p_2p_3'$	
5	$p_1p_2p_3p_4$		

λ	$\xi_\lambda^{(\lambda+2)}$
1	$-p_1^2$
2	$p_1''-p_1^3-p_1p_2^2$
3	$3p_1''p_2+3p_1'p_2'+p_1p_2''-p_1p_2p_3^2-p_1^3p_2-p_1p_2^3$

λ	$\xi_\lambda^{(\lambda+3)}$
1	$-3p_1p_1'$
2	$p_1'''-3p_1'p_2^2-6p_1^2p_1'-3p_1p_2p_2'$

$$\xi_\lambda^{(\lambda+4)} = -4p_1p_1''+p_1^4+p_1^2p_2^2-3p_2'^2$$

$$\xi_{10} = 0 \qquad (38)$$

$$\xi_{20} = \frac{1}{p_1}$$

$$\xi_{30} = -\frac{p_1'}{p_1^2p_2}$$

$$\xi_{40} = \frac{1}{p_1p_2p_3}\left(\frac{2p_1'^2}{p_1^2}+\frac{p_1'p_2'}{p_1p_2}-\frac{p_1''}{p_1}+p_2^2\right)$$

$$\xi_{50} = \frac{1}{p_1p_2p_3p_4}\left(-\frac{p_1'''}{p_1}+\frac{6p_1'p_1''}{p_1^2}+\frac{2p_1''p_2'}{p_1p_2}+\frac{p_1''p_3'}{p_1p_3}-\frac{p_1'p_2''}{p_1p_2}\right.$$
$$-\frac{6p_1'^3}{p^3}-\frac{4p_1'^2p_2'}{p_1^2p_2}-\frac{2p_1'p_2'^2}{p_1p_2^2}-\frac{p_1'p_2'p_3'}{p_1p_2p_3}-\frac{2p_1'^2p_3'}{p_1^2p_3}-\frac{p_1^2p_3'}{p_3}$$
$$\left.-\frac{p_1'p_2^2}{p_1}-p_2p_2'-\frac{p_2^2p_3'}{p_3}-\frac{p_1'p_3^2}{p_1}\right)$$

§ 4. Die Krümmungsaxen und ihre Coincidenzpunkte.

Die Axe des Krümmungskreises einer Raumcurve, gewöhnlich Krümmungsaxe genannt, ist bekanntlich parallel der dritten Fundamentalaxe und hat einen Coincidenzpunkt, der zugleich Mittelpunkt der Krümmungskugel ist.

Dies bietet Anlass zu dreifacher Erweiterung auf mehr als zweifach gekrümmte Linien.

Zunächst betrachten wir das Lot auf dem Raume der Krümmungskugel in ihrem Mittelpunkte errichtet. Dieses ist parallel der vierten Fundamentalaxe und geht durch den Mittelpunkt der osculirenden runden 4 dehnung. Jeder ihrer Punkte hat einen constanten Abstand von der Krümmungskugel, nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten sein Abstand vom Fusspunkte und der Kugelradius sind. In diesem Sinne ist er Axe der Krümmungskugel, und wir können ihn zweite Krümmungsaxe nennen.

Alles dies ist von selbst oder aus dem Vorigen klar. Ob aber die 2. Krümmungsaxe die 2 andern Eigenschaften mit der ersten gemein hat, d. h. ob sie einen Coincidenzpunkt hat, und ob derselbe der Mittelpunkt der runden 5 dehnung ist, bleibt eine zu untersuchende Frage.

Die vorstehende Betrachtung lässt sich auf die ganze Reihe der osculirenden runden m dehnungen ausdehnen. Im Voraus ist bekannt, dass die Verbindungsgeraden der successiven Mittelpunkte Stücke der successiven Krümmungsaxen sind, und dass die $m$te Krümmungsaxe die Richtung der $(m+2)$ten Fundamentalaxe hat.

Die Bedingung, unter der eine beliebige variirende Gerade in $n$facher Mannigfaltigkeit

$$z = a + au$$

wo a den Richtungscosinus bezeichnet, einen Coincidenzpunkt z hat, ist $\partial z = 0$, wird also gebildet durch die n Gleichungen:

$$0 = \partial a + a\partial u + u\partial a$$

und nach Elimination von u und ∂u:

$$| a \ \partial a \ \partial x | = 0$$

gültig für alle Combinationen von 3 unter den n Coordinaten α und den zugehörigen a.

Die $(m-2)$ te Krümmungsaxe hat die Gleichungen:

$$z = x + \sum_{h=1}^{m-1} a_h \xi_h + a_m u$$

daher lautet die obige Bedingung:

$$| \; a_m \;\; a_m' \; (x + \sum_{h=1}^{m-1} a_h \xi_h)' \; | = 0$$

Da nun $x' = a_1$ und nach T. XI. S. 446 Gl. (13)

$$a_h' = p_h a_{h+1} - p_{h-1} a_{h-1} \tag{39}$$

ist, so ergibt sich:

$$| \; a_m \;\; a_m' \;\; a_1 + \sum_{h=1}^{m-1} \{a_h \xi_h' + (p_h a_{h+1} - p_{h-1} a_{h-1}) \xi_h\} \; | = 0$$

oder (mit Beachtung, dass $p_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $a_{m+1} = 0$ ist):

$$| \; a_m \;\; a_{m-1} \;\; a_1 + \sum_{h=1}^{m-2} a_h (\xi_h' - p_h \xi_{h+1} + p_{h-1} \xi_{h-1}) \; | = 0$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\xi_h' - p_h \xi_{h+1} + p_{h-1} \xi_{h-1} = \begin{cases} 0 \text{ für } h = 2, 3, \ldots m-2 \\ -1 \text{ für } h = 1 \end{cases}$$

Für $h = 1$ ist in der Tat

$$p_h \xi_{h+1} = 1; \quad \xi_h' = 0; \quad \xi_{h-1} = 0$$

Ferner ist ξ_{ho} ein Punkt auf der $(h-2)$ten Krümmungsaxe, folglich muss, damit ξ_{ho} Coincidenzpunkt der $(h-2)$ten Krümmungsaxe sei,

$$\xi_{ho}' - p_h \xi_{h+1,0} + p_{h-1} \xi_{h-1,0} = \text{für } h = 2, 3, \ldots m-2 \tag{40}$$

sein. Dieser Bedingung genügen identisch die Werte der letzten Tabelle von § 3. für $h = 2, 3, 4$. Daher haben die erste, 2te, 3te Krümmungsaxe zu Coincidenzpunkten die Mittelpunkte der osculirenden runden (2, 3, 4) dehnungen. Die identische Gültigkeit der Relation (40) für jedes k zu beweisen ist mir nicht gelungen. Findet sie statt, so dreht sich im Fortschritt der Curve das System der Krümmungsaxen momentan um deren Durchnittspunkte. Bewiesen

ist vor der Hand, dass die 2 genannten Eigenschaften der ersten Krümmungsaxe nicht auf diese beschränkt sind, sondern zunächst auch in 4 und 5 facher Mannigfaltigkeit für 3 und 4 fache Krümmung der 2ten und 3ten Krümmungsaxe zukommen. Darüber hinaus reducirt sich dann die Bedingung (40) auf ihre Gültigkeit für $h = 5, 6, \ldots m-2$

Mit Gl. (40) ist gleichbedeutend:

$$\sum_{k=1}^{n} a_h x_{ho}' = 0 \quad (h = 5, 6, \ldots m-2)$$

Bemerkenswert ist ferner, dass nach Gl. (39) und (40) die ξ_{ho} dieselbe Relation zu erfüllen haben wie die a_h.

XXI.

Miscellen.

1.

Eine räumliche Betrachtung der Dreieckspunkte.

In jedem Dreiecke lassen sich die Höhen desselben als die axonometrische Projection der drei zu einander orthogonalen Achsen des Raumes auffassen.

Es erscheint somit Fig. 1. das Dreieck xyz als Spurendreieck und sein Höhenschnittpunkt A als die axonom. Proj. des Achsenursprunges. m der Mittelpunkt der der körperlichen Ecke $Axyz$ umgeschriebenen Kugel, erscheint als Mittelpunkt des dem Spurendreiecke umgeschriebenen Kreises, und seine Projectionen sind die Mittelpunkte der Seiten desselben.

Die Projectionen der Seitensymmetralpunkte sind μ_1, μ_2, μ_3. Die Punkte A, m_1, m_2, m_3, μ_1, μ_2, μ_3, m sind also die Ecken eines Parallelepipedes, dessen umgeschriebene Kugel ihren Mittelpunkt in o dem Mittelpunkte des Steiner'schen Neunpunktkreises hat, mit Berücksichtigung der elementar geometrischen Auffassung des ganzen Gebildes. Die meisten Sätze des Parallelepipedes können also für diese Punkte in Anwendung gebracht werden. So folgt z. B. daraus der Satz:

In jedem Dreiecke ist die Entfernung des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises von einer Seite gleich der Hälfte des zu dieser Seite gehörigen oberen Höhenabschnittes. o_1, o_2, o_3 die Proj. von o sind Mittelpunkte von Kreisen, die durch A und bezüglich m_1, m_2, m_3 gehend die Höhen über der anliegenden Seite des Spurendreieckes hälften.

s der Schwerpunkt des Spurendreieckes tritt als Ecke eines Parallelepipedes auf, das durch die Verbindung der Seitendiagonal-

schnittpunkte des Neunpunktkreisparallelepipedes mit den übrigen Ecken dieses erhalten wird. Seine Projectionen s_1, s_2, s_3 sind die Schwerpunkte der Projectionsdreiecke Axy, Axz und Ayz. s liegt also auf der Diagonale Am, und es ist sowol im Raume wie in der Proj. $Ao = om$, $os = \frac{1}{3}om$, $mz = \frac{1}{3}Am$, u. s. w.

Construiren wir Fig. 2. die Punkte c_1, c_2, c_3, die bezüglich der Proj. Ebenen symmetrisch liegen, also Mittelpunkte von Kugeln sind, die auch durch die Eckpunkte der Proj. Dreiecke gehen, so erhalten wir durch die Verbindung mit dem Punkte m eine Polarecke zu A und durch die gegenseitige Verbindung ein mit xyz congruentes Dreieck.

Der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises eines Dreieckes sind also keine so weit verwandten Punkte, sondern sie sind reciprok. Die beiden sich durchdringenden Vierflächner haben, zur Grundgestalt ein rechtwinkeliges Parallelepiped (in der gegebenen Betrachtung), bilden also einen sternförmigen Körper, dessen Einhüllende ein rhombisches Prisma $Ac_2zc_3yc_1xm$ ist. Die Kugel um m durch A ist gleich der Kugel um A durch m; nicht nur in der Proj., sondern auch im Raume ist x von m, c_1, c_2 u. s. w. gleich weit entfernt, und das Dreieck $c_1 m c_2$ mit der Spitze x ebenso wie die analogen Dreiecke fordern eine Ergänzung zu Rechtecken und Pyramiden, die durch A oder m zu Oktaedern vervollständigt werden.

Von ganz ausserordentlicher Tragweite ist die elementare Betrachtung mit Bezugnahme eines Höhendreieckes z. B. $x_1 y_1 z_1$. Die projicirten Achsen sind Winkelhalbirende; ihr Schnittpunkt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises; ihre Schnitte mit den Seiten des Spurendreieckes Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise, deren Radien durch die Schnittpunkte des Höhendreiseites mit den Verbindungslinien der reciproken Punkte A und m mit x, y, z bestimmt sind. Diese Schnittpunkte sind zugleich die Berührungspunkte der Kreise, und ihre Entfernung kann nach dem Satze von der Grösse der Tangenten an 2 Kreise und dem Dreiecke $x_1 y_1 z_1$ geprüft werden. mx muss z. B. senkrecht sein auf $z_1 y_1$, weil dem Parallelismus der Linien zufolge Wkl. $mxy = Ac_3c_2 = zc_2c_3 = zyA = Axz = \ldots$ ist.

Die Unzahl der congruenten Dreiecke, der gleichen Winkel, der Bestimmungspunkte von Kreisperipherien und die ausgezeichnete Harmonie machen das Ganze zu einem wunderbaren Gebilde, das in seiner Proj. wie im Raume ähnliche Erscheinungen zeigt.

Diese erreichen eine interessante Höhe, wenn man die gegebene Betrachtung nicht bloss für ein Dreieck anwendet, sondern dieselbe

Betrachtung auch bei seinem Höhendreiecke ausführt. Dann erscheinen Winkelhalbirende als Höhen und umgekehrt, und die Vereinigung löst die Aufgabe: Man construire ein Dreieck aus einer Seite z. B. $\overline{xy}$, einem anliegenden Winkel, etwa Wkl. xyz und der Summe der Höhe aus diesem Winkel und ihrem unteren Abschnitt, also $\bar{s} = \bar{y}A + A\bar{y}_1$, wodurch die Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von geraden Linien gelöst erscheint..

Wird der Winkel XAY durch die Geraden I und II in drei Teile geteilt, und zeichnet man mit einem beliebigen Radius um A einen Kreis, so wird $DB' = B'H$.

DH ist stets senkrecht auf II und trifft die Normale auf AX im Punkte B. Der Halbkreis über AB als Durchmesser geht durch B', und sein Schnittpunkt mit dem Strahle AY mit B verbunden, ergänzt AB und AB' zu einem Dreiecke, dessen Höhenschnittpunkt H ist.

Da Wkl. $XI = III = IIY$, ist auch $\text{arc}\,AE = \text{arc}\,EB' = \text{arc}\,B'A'$. Ferner ist $AB = BD$. Wir kennen also vom Dreiecke ABC die Seite AB, den Winkel ABC, die Summe aus der Höhe BB' und dem untern Höhenabschnitt.

Graz. Chladek Franz,
Techniker.

2.

Ueber gewisse Gleichungen und Constanten der mechanischen Quadratur und der Mechanik ebener Figuren.

Man kann die reducirte Pendellänge einer ebenen Figur für eine in ihrer Ebene liegende Aufhängungsachse $x = x_p$, wenn die Breite der Figur in der Entfernung x vom Coordinatenanfang $f(x)$ ist, ihrem mathematischen Ausdruck

$$\frac{\int (x-x_p)^2 f(x)\,dx}{\int (x-x_p)\,f(x)\,dx}$$

zufolge als Schwerpunktsabstand einer neuen Figur von der Aufhängungsachse ansehen, deren Breite $(x-x_p)\,f(x)$ ist. Hieraus verschwindet ebenso wie das statische Moment um die Schwerpunktsachse $x = x_s$

$$\int (x - x_s)\,f(x)\,dx = 0$$

auch das Integral:

$$\int (x - x_p)(x - x_q) f(x)\, dx = 0;$$

wenn x_p und x_q die Coordinaten einer Aufhängungs- und zugehörigen Schwingungsachse sind. Aus dieser Gleichung ersieht man, dass die beiden Geraden $x = x_p$ und $x = x_q$ nicht nur unter einander (Reversionspendel), sondern auch mit jeder Geraden, deren Coordinate x die Gleichung $f(x) = 0$ erfüllt, vertauscht werden können, welches letztere der vorhergehenden Gleichung zufolge auch für die Schwerpunktsachse $x = x_s$ gilt.

Sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell, so verknüpft sie einerseits mit x_s, andererseits mit zwei zusammengehörigen x_p und x_q dieselbe Gleichung, welche die Abscissen in einem den Grenzen der ebenen Figur entsprechenden Intervall erfüllen müssen, damit vermittelst der zugehörigen Functionswerte über dasselbe mit einer um einen Grad höheren Genauigkeit mechanisch quadrirt wird, als die Zahl der Ordinaten erwarten lässt; eine Uebereinstimmung, welche man auch unmittelbar aus dem Genauigkeitsgrade dieser Quadraturformeln ableiten kann, indem man eben mit Hülfe dieser letzteren die zur Bestimmung des statischen und des Trägheitsmoments führenden Integrationen erledigt.

Berlin, d. 28. 10. 92.

Rudolf Skutsch.

VIII.

Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen zweiter Art.

Von

Ulrich Bigler.

Schon der Umstand, dass Heine in seinem Handbuche der Kugelfunctionen, Bd. 1, Absatz c des § 87, die Differentialgleichung für die mit S und C bezeichneten Kugelfunctionen anruft, beweist, dass die in Gleichung (58, c) mit f bezeichneten Functionen zweier Variabeln (u, v) (mittelbar ε, ζ) einer Kugelfläche und nicht der Oberfläche eines Ellipsoides angehören. Die Gleichungen (58) und (58, a) werden im Verlaufe gar nicht mehr gebraucht, sondern der Leser hat sie durch $x = \varrho\cos\Theta$, $y = \varrho\sin\Theta\cos\psi$, $z = \varrho\sin\Theta\sin\psi$, verbunden mit dem System (58, b) zu ersetzen. Die drei Flächen, welche Herrn Heine einen Punkt des Raumes bestimmen, sind durch die drei Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2 = \varrho^2;\quad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=0$$

$$\frac{x^2}{v^2}-\frac{y^2}{b^2-v^2}-\frac{z^2}{c^2-v^2}=0$$

bestimmt. Eine Schaar concentrischer Kugeln wird von zwei Schaaren confocaler Kegel geschnitten. Nur unter dieser Bedingung geht aus der Gleichung $\square V = 0$ (Differentialparameter 2. Ordnung) die Gleichung (58, c) hervor, indem man entweder

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n f_n,\quad \text{oder}\quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^{-n-1}\, f_n$$

setzt, jenachdem das Potential V sich auf einen innerhalb der mit Masse belegten Kugelfläche befindlichen Punkt oder auf einen äussern Punkt bezieht. Wenn aber eine dreiaxige Ellipsoidfläche mit Masse belegt ist, so soll nach Lamé das Potential V für einen innern Punkt durch ein Aggregat von Producten wie $\underset{m}{E^n}(\varrho) \cdot \underset{m}{E^n}(\mu) \cdot \underset{m}{E^n}(\nu)$ und für einen äussern Punkt durch ein Aggregat von Producten wie $\underset{m}{F^n}(\varrho) \cdot \underset{m}{E^n}(\mu) \cdot \underset{m}{E^n}(\nu)$ dargestellt werden, wo F eine Function zweiter Art ist. Bei dem System von Flächen, das Heine hier im ersten Bande zu Grunde gelegt hat, hat er nur den Gegensatz von ϱ^n und $\frac{1}{\varrho^{n+1}}$, und man begreift nicht, wie er von der Vorstellung einer Potentialfunction V aus zu den Lamé'schen Functionen zweiter Art gelangt. In Bd. II hat Heine aber Potentialfunctionen, denen ein allgemeines System confocaler Flächen zu Grunde liegt.

In §. 101., Bd. I, versucht Heine, der Lamé'schen Function 2. Art eine andere Darstellung zu geben, die sich von $F(x)$ nur durch einen constanten Factor unterscheidet, gibt sich aber keine Mühe, denselben zu berechnen. Er tut Unrecht, diese Constante eine numerische zu nennen, da sie doch bei ihm eine algebraische Function von b^2 and c^2 ist. Ich habe mich nun daran gemacht, diese Constante zu bestimmen und erlaube mir, meine Resultate hier zu veröffentlichen.

Ich erkläre ausdrücklich, dass ich als erste Flächenschaar nicht concentrische Kugeln, sondern confocale Ellipsoide voraussetze. Die Halbaxenquadrate eines solchen seien $x-a$, $x-b$, $x-c$, wo $a < b < c < x$. Die Lamé'sche Function erster Art ist $P(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \times Q(x)$, [wo $Q(x) = x^v - d_1 x^{v-1} + d_2 x^{v-2} - d_3 x^{v-3} + \ldots + (-1)^r d_v$ eine ganze Function $v$ten Grades von x, und durch keines der drei Halbaxenquadrate teilbar ist], welche, wenn

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

gesetzt wird, der Bedingung, dass

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{\partial^2 P(x)}{\partial^2 t}$$

eine ganze Function von x sei, genügt. Es werde noch beigefügt, dass jede der drei Zahlen 2α, 2β, 2γ entweder null oder eine ganze positive Zahl sein soll, damit

$$n = 2(\alpha+\beta+\gamma+\nu)$$

Es ergibt sich dann, dass

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{\partial^2 P(x)}{\partial t^2} = n(n+1)x + E,$$

$$E = (4n-2)(d_1+\alpha a+\beta b+\gamma c) - n^2(a+b+c)$$

die Exponenten α, β, γ sind keiner andern Werte, als 0 und $\frac{1}{2}$ fähig. Der Coefficient d_λ in der Funct. Q erscheint als ganze Function λten Grades von d_1 mit reellen Coefficienten; d_1 ist Wurzel einer Gleichung $(\nu+1)$ten Grades, die lauter reelle und verschiedene Wurzeln hat; jeder Wurzel d_1 entspricht ein Polinom $Q(x)$. Die Gleichung $Q(x) = 0$ hat nur reelle und ungleiche Wurzeln, die für jeden andern Wert d_1 auf andere Weise in die zwei Intervalle $a < x < b$, $b < x < c$ verteilt sind.

Es sei nun $T(x)$ ein zweites Integral derselben Differentialgl., welcher $P(x)$ genügt, das sich von diesem nicht nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Dann ergibt sich durch Subtraction beider Differentialgleichungen, derjenigen für T und derjenigen für P, die Gleichung

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

das heisst

$$P\frac{\partial T}{\partial t} - T\frac{\partial P}{\partial t} = P^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T}{P}\right) = \text{const.}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T}{P}\right) = \text{const.} \frac{1}{2\sqrt{H(x-a)} \times P^2}.$$

Heine verlangt nun, dass in der Entwicklung von T nach fallenden Potenzen von x der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich 1 sei. Denkt man sich x sehr gross, so ist

$$P = x^{\frac{n}{2}}: \quad \frac{1}{P^2} = x^{-n}; \quad \frac{1}{2\sqrt{H(x-a)} \times P^2} = \tfrac{1}{2}x^{-n-\frac{1}{2}}$$

folglich

$$\frac{T}{P} = -\frac{\text{const.}}{2n+1} \times x^{-n-\frac{1}{2}}; \quad T = -\frac{\text{const.}}{2n+1} \times x^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

also

$$\text{const.} = -(2n+1)$$

Es ist somit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T(x)}{P(x)}\right) = -\frac{2n+1}{2\sqrt{\Pi(x-a)} \times P^2(x)}$$

also

$$\text{I.} \qquad T(x) = (2n+1) \cdot P(x) \int_x^\infty \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}\, P^2(z)}$$

Heine behauptet nun in seinem Lehrbuch der Kugelfunctionen Bd. I, Seite 386, mit Recht, dass diese Lamé'sche Function zweiter Art elliptische Integrale nur der ersten und zweiten, nicht aber der dritten Gattung enthalte, weist aber diese Behauptung nur für die Exponentengruppe $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ nach und stellt auch hier unfertige Ausdrücke auf. Ich will nun diesen Satz ohne jegliche Beschränkung nachweisen, und zwar erstens dadurch, dass ich zeige, dass in T keine logarithmischen Unstetigkeiten vorhanden sind und zweitens will ich T wirklich für alle Exponentengruppen in elliptische Integrale umsetzen.

Es ist:

$$P(x) = \Pi(x-a)^\alpha Q(x)$$

also

$$T(x) = (2n+1) \cdot P(x) \cdot \int_x^\infty \frac{dz}{2\Pi(z-a)^{2\alpha+1/2} Q^2(z)}.$$

Die Pole dieses Integrals liegen in $z = a,\ b,\ c,\ x_1,\ x_2, \ldots x_r$, wenn die x die Wurzeln der Gleichung $Q(x) = 0$ sind. In der Nähe von a setze man $z = a + u^2$, dann ist

$$\frac{1}{Q^2(z)} = \frac{1}{Q^2(a)}\left(1 - 2\frac{Q'(a)}{Q(a)} \cdot u^2 + \ldots\right);$$

$$\frac{dz}{2\Pi(z-a)^{2\alpha+1/2}} = \text{const.} \cdot \frac{du}{u^{4\alpha}}$$

also

$$\frac{dz}{2\Pi(z_1-a_1)^{2\alpha+1/2} \cdot Q^2(z)} = A \cdot \frac{du}{u^{4\alpha}} + B \cdot \frac{du}{u^{4\alpha-2}} + C \cdot \frac{du}{u^{4\alpha-4}} + \ldots$$

Ist nun $\alpha = 0$, so kommen nur die Integrale $\int du$, $\int u^2 du$, $\int u^4 du$ und so fort vor; ist aber $\alpha = \frac{1}{2}$, so hat man $\int \frac{du}{u^2}$, $\int du$, $\int u^2 du$ u. s. f.; es ist also nur die rationale Unstetigkeit $\frac{\text{const.}}{\sqrt{z-a}}$

möglich. Aehnlich verhält sich das Integral in der Nähe der beiden andern Pole b und c. Im Bereiche einer Wurzel x_1 der Gleichung $Q(x) = 0$ setze man $x = x_1 + w$, und entwickle nur zweigliedrig. Dann ist

$$Q(x) - Q' \cdot w + \tfrac{1}{2} Q'' \cdot w_2 + \ldots;$$

$$\frac{1}{Q^2} = \frac{1}{Q'^2 w^2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{Q''}{Q'} \cdot w + \ldots\right)^{-2} = \frac{1}{Q'^2 w^2} - \frac{Q''}{Q'^3} \cdot \frac{1}{w} + \text{const.}\, w + \ldots.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\Pi(x-a)^{-2\alpha-1}{}_2 = \tfrac{1}{2}\Pi(x_1-a)^{-2\alpha-1}{}_2\left(1 - \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{4\alpha+1}{x_1-a} \cdot w + \ldots\right)$$

somit

$$\frac{1}{2\Pi(x-a)^{2\alpha+1}{}_2 \cdot Q^2(x)} = \frac{1}{2\Pi(x_1-a)^{2\alpha+1}{}_2 \cdot Q'^2(x_1)} \cdot \left(\frac{1}{w^2} - \left(\frac{Q''}{Q'} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{4\alpha+1}{x_1-a}\right)\frac{1}{w} + \ldots\right)$$

Nun ist bekanntlich

$$2\frac{Q''(x)}{Q(x)} + \frac{Q'(x)}{Q(x)} \cdot \Sigma\frac{4\alpha+1}{x-a} + \Sigma\frac{2(\beta+\gamma)^2}{(x-b)(x-c)} = \frac{n(n+1)x+E}{2\Pi(x-a)},$$

also für $x = x_1$ erhält man

$$2Q''(x_1) + Q'(x_1) \cdot \Sigma\frac{4\alpha+1}{x_1-a} = 0$$

Wendet man diese Relation oben an, so folgt

$$\frac{1}{2\Pi(x-a)^{2\alpha+1}{}_2 \cdot Q^2(x)} = \frac{1}{2\Pi(x_1-a)^{2\alpha+1}{}_2 \cdot Q'^2(x_1)} \cdot \left(\frac{1}{w^2} + \text{const.} + \text{const.}\, w + \ldots\right)$$

und man erkennt, dass nur Integrale wie $\int \frac{dw}{w^2}$, $\int dw$, $\int w\, dw$ etc. vorkommen. Es ist also auch hier nur die rationale Unstetigkeit $\frac{\text{const.}}{x-x_1}$ vorhanden und ähnlich verhält sich das Integral in der Nähe der andern Wurzeln. Das Integral T enthält also nur rationale Unstetigkeiten, wodurch der Ausschluss elliptischer Integrale 3. Art schon klar gelegt wird.

Nun soll aber T wirklich in elliptische Integrale umgesetzt werden. Wenn der Kürze wegen

$$p = \Pi(z-a)^{-2\alpha-1|_2}$$

gesetzt wird, so ist

$$T(x) = \frac{(2n+1)}{2} \cdot P(x) \cdot \int_x^N \frac{p\,dz}{Q^2(z)}$$

und man hat $Q^2(z)$ in Partialbrüche zu zerlegen. Wenn $z = x_1 + h$, h sehr klein, so werde ich während der Rechnung das Argument x_1 der Functionen Q', Q'', . . . nicht schreiben. Da

$$Q(x_1+h) = Q' \cdot h + \tfrac{1}{2}Q'' \cdot h^2 + \ldots$$

so ist

$$\frac{1}{Q^2(z)} = \frac{1}{Q'^2 h^2}\left(1 - \frac{Q''}{Q'} \cdot h + \ldots\right)$$

wo

$$-\frac{Q''}{Q'} = \tfrac{1}{2} \cdot \Sigma \frac{4\alpha+1}{x_1 - a}$$

also allgemein

$$\frac{1}{Q^2(z)} = S \frac{1}{Q'^2(x_1)} \cdot \left[\frac{1}{(z-x_1)^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \Sigma \frac{4\alpha+1}{x_1-a} \cdot \frac{1}{z-x_1}\right]$$

wo das Summenzeichen S sich auf alle Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erstreckt. Setzt man

$$L_1 = \Pi(x_1-a)\int_x^N p\left[\frac{1}{(z-x)^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \Sigma \frac{4\alpha+1}{x_1-a} \cdot \frac{1}{z-x_1}\right] dz$$

so ist

$$T(x) = \frac{2n+1}{2} \cdot P(x) \cdot S \frac{L_1}{\Pi(x_1-a) \cdot Q'^2(x_1)}$$

Es ist nun $\int \frac{p\,dz}{(z-x_1)^2}$ aus dem Ausdrucke für L_1 weg zu bringen.

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\Pi(z-a)^{1|_2-2\alpha}}{z-x_1} = \frac{p}{(z-x_1)^2}\Big[-\Pi(z-a) + (z-x_1) \cdot \Sigma \frac{1-4\alpha}{2}(z-b)(z-c)\Big]$$

Wenn man innerhalb der Klammer alles nach Potenzen von $z-x_1$ ordnet, statt a, b, c die Elemente x_1-a, x_1-b, x_1-c gebraucht und beachtet, dass

$$\Sigma \frac{1-4\alpha}{2}[(x_1-b)+(x_1-c)] = \Sigma(1-2(\beta+\gamma))(x_1-a)$$

so findet man

$$\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\Pi(z-a)^{1/2-2\alpha}}{z-a}=p\left[-\frac{\Pi(x_1-a)}{(z-x)^2}\right.$$

$$-\Sigma\frac{1+4\alpha}{2}(x_1-b)(x_1-c)\cdot\frac{1}{z-x_1}$$

$$\left.-2\Sigma(\beta+\gamma)(x_1-a)+\tfrac{1}{2}(1-4\Sigma\alpha)(z-x_1)\right]$$

Es ist also

$$L_1=\lim_{(N=\infty)}\left[\left\{-\frac{\Pi(z-a)^{1/2-2\alpha}}{z-x_1}\right\}_x^N\right.$$

$$\left.+\int_x^N p\left(\frac{1-4\Sigma\alpha}{2}(z-x_1)-2\Sigma(\beta+\gamma)(x_1-a)\right)dz\right]$$

$\Sigma\alpha$ ist der Werte 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, 1 fähig. Im ersten Falle wird der Functionsunterschied gross wie $-N^{1/2}$ und das Integral wie

$$\int_x^N \tfrac{1}{2}z^{-1/2}\,dz=N^{1/2}$$

Man kann also nicht unmittelbar $N=\infty$ setzen, sondern es muss vorher eine (die Symmetrie) Ausgleichung zwischen dem Functionsunterschiede und dem Integrale Statt finden. In den übrigen Fällen dagegen hat man sogleich

$$L_1=\frac{\Pi(x-a)^{1/2-2\alpha}}{x-x_1}$$

$$+\int_x^\infty p\left(\frac{1-4\Sigma\alpha}{2}(z-x_1)-2\Sigma(\beta+\gamma)(x_1-a)\right)dz$$

Im Falle (0, 0, 0) ist

$$L_1=\lim_{(N=\infty)}\left[\left\{-\frac{\sqrt{\Pi(z-a)}}{z-x_1}\right\}_x^N+\tfrac{1}{2}\int_x^N\frac{z-x_1}{\sqrt{\Pi(z-a)}}\,dz\right]$$

Um die Unstetigkeiten an der obern Grenze aufzuheben, schreibe man

$$L_1 = \left\{\frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}} - \frac{\sqrt{\Pi(z-a)}}{z-x_1}\right\}_x^N$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_x^N \left(\frac{z-x_1}{\sqrt{\Pi(z-a)}} - 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}}\right) dz$$

Der Functionsunterschied wird

$$\left\{-\frac{x_1-a}{z-x_1}\cdot\frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-x}}\right\}_x^N = \frac{x_1-a}{x-x_1}\frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{\sqrt{x-a}}$$

und unter dem Integrationszeichen wird der eingeklammerte Ausdruck gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi(z-a)}}\left(z-x_1+\frac{(z-b)(z-c)}{z-a}-(z-c)-(z-b)\right)$$

wo

$$(z-x_1)-(z-c)=c-x_1$$

und

$$\frac{(z-b)(z-c)}{z-a}-(z-b) = \cdots(c-a)\cdot\frac{z-b}{z-a}$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist also

$$\frac{c-x_1}{\sqrt{\Pi(z-a)}} - (c-a)\cdot\frac{\sqrt{z-b}}{(z-a)^{3/2}\sqrt{z-c}}$$

Endlich ist

$$L_1 = \frac{x_1-a}{x-x_1}\cdot\frac{\sqrt{(x-b)(x-e)}}{\sqrt{x-a}} + \frac{c-x_1}{2}\int_x^N \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$-\frac{c-a}{2}\int_x^N \frac{\sqrt{z-b}\cdot dz}{(z-a)^{3/2}\sqrt{z-c}}$$

wo $N=\infty$ zu setzen ist. In keinem Falle kommen logarithmische Unstetigkeiten vor. Alle Integrationen, die man zu vollziehen hat, führen nur auf elliptische Integrale erster und zweiter Art. Ich habe mich gewöhnt, beim sweischaligen Hyperboloid, wo x zwischen a und b hin und her geht,

$$k^2 = \frac{b-a}{c-a}, \quad x-a = (c-a)k^2 S^2 u,$$
$$b-x = (c-a)k^2 C^2 u; \quad c-x = (c-a)D^2 u$$

zu setzen, so dass

$$dt = \frac{du}{\sqrt{c-a}}$$

wird. Beim Ellipsoid ist aber $x-a > c-a$, folglich $k^2 S^2 u > 1$. Man kann sich also das Argument u zwischen $K+L$ und L befindlich denken und $u = L-w$ setzen,

$$dt = -\frac{dw}{\sqrt{(c-a)}},$$

wo w positiv ist. Die Halbaxen des Ellipsoides sind dann

$$\sqrt{x-a} = \frac{\sqrt{c-a}}{Sw}, \quad \sqrt{x-b} = \sqrt{e-a} \cdot \frac{Dw}{Sw},$$
$$\sqrt{x-c} = \sqrt{c-a} \cdot \frac{Cw}{Sw}$$

ferner ist

$$\tfrac{1}{2} \int_x^N \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{w}{\sqrt{c-a}};$$

$$\tfrac{1}{2} \int_x^N \frac{\sqrt{(z-b)} \cdot dz}{(z-a)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z-c}} = \frac{E\,\mathrm{am}\, w}{\sqrt{(c-a)}}$$

und somit

$$L_1 = \frac{x_1-a}{x-x_1} \frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\sqrt{c-a}} ((c-x_1)w - (c-a)E\,\mathrm{am}\, w)$$

folglich

$$T(x) = \frac{2n+1}{2} \asymp P(x) \asymp S \frac{1}{\Pi(x_1-a)\,Q'(x_1)}$$
$$\cdot \left[\frac{x_1-a}{x-x_1} \cdot \frac{\sqrt{(x-b)(x-b)}}{\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\sqrt{c-a}} \left((c-x_1)w - (c-a)E\,\mathrm{am}\, w\right)\right]$$

Weil

$$x - x_1 = z - a - (x_1 - a) = (c - a) \cdot \frac{S^2 w' - S^2 w}{S^2 w - S^2 w'},$$

so ist auch

$$T(x) = -\frac{2n+1}{2} \times P(x) \times \int \frac{\sqrt{c-a}}{\Pi(x_1 - a) \cdot Q'(x_1)}$$
$$\cdot \frac{1}{S^2 w'} \left[\frac{Sw\,Cw\,Dw}{S^2 w' - S^2 w} \cdot S^2 w' - C^2 w' \times w - S^2 w' \times E\,\mathrm{am}\, w \right]$$

wenn

$$x_1 - a = \frac{c-a}{S^2 w_1}, \quad x_1 - b = (c-a) \cdot \frac{D^2 w_1}{S^2 w_1},$$
$$x_1 - c = (c-a) \cdot \frac{C^2 w_1}{S^2 w_1}$$

gesetzt wird.

Was die übrigen 7 Fälle betrifft, so kann eine Unstetigkeit der in L_1 vorkommenden Integrale nur in $z = a$, b, c gesucht werden. In $z = c$ z. B. sind wegen des Factors p nur die Unstetigkeiten $\frac{dz}{\sqrt{z-c}}$, $\frac{dz}{(z-c)^{\frac{3}{4}}}$ möglich. Die erste ist nur scheinbar, weil

$$\frac{dz}{\sqrt{z-c}} = 2d\sqrt{z-c}$$

Bei der zweiten denke man sich

$$z = c + u^2$$

gesetzt; dann ist alles andere, womit $\frac{dz}{(z-c)^{\frac{3}{4}}}$ multiplicirt ist, nach $1, u^2, u^4, \ldots$ entwickelbar;

$$\frac{dz}{(z-c)^{\frac{3}{4}}} = 2\frac{du}{u^2}$$

es kommen also nur die Integrale $\int \frac{du}{u^2}$, $\int du$, $\int u^2 du$, ... vor, und folglich ist nur die rationale Unstetigkeit $\frac{\text{const.}}{\sqrt{z-c}}$ möglich. Ich will nun die andern 7 Fälle der Reihe nach durchgehen.

I) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

In diesem Falle ist

$$L_1 = \frac{1}{(x-x_1)\sqrt{\Pi(x-a)}} + \int_x^\infty (-5(z-x_1)-4\Sigma(x_1-a))\frac{dz}{2\Pi(z-a)^{\frac{3}{2}}}$$

die Klammer unter dem Integrationszeichen kann durch

$$-5(z-a)-7x_1+4(b+c)-a$$

ersetzt werden. Dann ist

$$L_1 = \frac{1}{(x-x_1)\sqrt{\Pi(x-a)}} - 5\int_x^\infty \frac{1}{(z-b)(z-c)}\cdot\frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} + (4(b+c)-a-7x_1)\int_x^\infty \frac{1}{\Pi(z-a)}\cdot\frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

Das erste Integral ist $\frac{1}{(c-a)^{5/2}}\cdot\int_0 \frac{S^4u}{C^2u\,.\,D^2u}du$; weil

$$l^2S^2 = D^2 - C^2$$

so ist

$$\frac{l^2S^4}{C^2D^2} = \frac{S^2}{C^2} - \frac{S^2}{D^2} = \frac{S^2}{C^2} - \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{D^2}-1\right)$$

und also

$$\frac{k^2l^4S^4}{C^2\,.\,D^2} = k^2\,.\,\frac{l^2S^2}{C^2} - \frac{l^2}{D^2} + l^2 = -k^2\left(D^2+\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{SD}{C}\right)\right) - \left(D^2+\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{k^2SC}{D}\right)\right)+l^2$$

folglich

$$\int_x^\infty \frac{1}{(z-b)(z-c)}\cdot\frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\cdot\frac{1}{k^2l^4}\,.\left[l^2w-(1+k^2)E\operatorname{am}w+k^2\frac{Sw\,.\,Dw}{Cw}+k^2\frac{Sw\,.\,Cw}{Dw}\right] - \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\cdot\frac{1}{k^2l^4}\cdot G$$

ferner ist

$$\int_x^\infty \frac{1}{\Pi(z-a)} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{7/2}} \int_0^w \frac{S^6 u \,.\, du}{C^2 u \,.\, D^2 u}$$

Weil

$$\frac{k^2 l^4 S^4}{C^2 \,.\, D^2} = k^2 l^2 \frac{S^2}{C^2} - \frac{l^2}{D^2} + l^2$$

so hat man nur noch mit

$$k^2 S^2 = k^2 (1 - C^2) = 1 - D^2$$

zu multipliciren, um

$$\begin{aligned} k^4 l^4 \frac{S^6}{C^2 \,.\, D^2} &= k^4 \,.\, \frac{l^2 S^2}{C^2} - k^4 l^2 S^2 - \frac{l^2}{D^2} + l^2 + k^2 l^2 S^2 \\ &= k^4 \,.\, \frac{l^2 S^2}{C^2} - \frac{l^2}{D^2} - l^4 D^2 + l^2 (1 + l^2) \\ &= l^2 (1 + l^2) - 2 (1 - k^2 + k^4) D^2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u} \left(k^4 \frac{S D}{C} + k^2 \frac{S C}{D} \right) \end{aligned}$$

zu finden. Also ist

$$\begin{aligned} &\int_x^\infty \frac{1}{\Pi(z-a)} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} \\ &= \frac{1}{(c-a)^{7/2} k^4 l^4} \Big[l^2 (1 + l^2) w - 2 (1 - k^2 + k^4) E \operatorname{am} w \\ &+ k^4 \frac{Sw \,.\, Dw}{Cw} + k^2 \frac{Sw \,.\, Cw}{Dw} \Big] - \frac{1}{(c-a)^{7/2} k^4 l^4} \cdot F \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} L_1 = \frac{1}{(x - x_1)\sqrt{\Pi(x-a)}} &- \frac{1}{(c-a)^{7/2} k^4 l^4} \\ &\cdot \left((4 (b + c) - a - 7 x_1) F - 5 (c - a) k^2 G \right) \end{aligned}$$

II) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$

In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} L_1 = &\frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{(x - x_1)\sqrt{(x-a)}} \\ &+ \int_x^\infty \left(-(z - x_1) + 2 (b + c) - 4 x_1 \right) \frac{dz}{2(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}} \end{aligned}$$

Wird die Klammer unter dem Integrationszeichen durch

$$-(z-a)+2(b+c)-a-3x_1$$

ersetzt, so findet man

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)}} - \tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$+ (2(b+c)-a-3x_1)\,\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

und weil

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{w}{\sqrt{(c-a)}};$$

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\int_0^w S^2u \,.\, du$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{k^2}(w - E\,\mathrm{am}\,u)$$

so hat man

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)}} - \frac{1}{2\sqrt{(c-a)}} \,.\, w$$

$$+ \frac{2(b+c)-a-3x_1}{(c-a)^{3/2}}\,\frac{1}{k^2}(w - E\,\mathrm{am}\,w)$$

III) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \tfrac{1}{2}, 0)$

Weil

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)}} - \tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$+ (2(a+c)-b-3x_1)\,\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}} - \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\int_0^w \frac{S^2u}{D^2u}\,du$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}\cdot k^2}\int_0^w \frac{k^2S^2u}{D^2u}\,du$$

und

$$\frac{k^2S^2u}{D^2u} - \frac{1}{l^2}\left(\frac{l^2}{D^2u} - l^2\right) = \frac{1}{l^2}\left(D^2u - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k^2SC}{D}\right) - l^2\right)$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{k^2l^2}\left(-l^2w + E\operatorname{am} w - k^2\frac{Sw\,Cw}{Dw}\right)$$

und demnach

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)}} - \frac{1}{\sqrt{a-c}}\cdot w$$
$$+ \frac{2(a+c)-b-3x_1}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{k^2l^2}\left[-l^2w + E\operatorname{am} w - k^2\frac{Sw\,Cw}{Dw}\right]$$

IV) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \tfrac{1}{2})$

Unter dieser Annahme ist nun

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-c)}} - \tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$+ (2(a+b)-c-3x_1)\,\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

und weil

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} - \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\int_0^w \frac{S^2u}{C^2u}\,du$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3|2}} \frac{1}{l^2} \int_0^w \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{Su\, Du}{Cu} \right) - D^2 u \right) du$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3|2}} \cdot \frac{1}{l^2} \left(\frac{Sw \,.\, Dw}{Cw} - E\,\mathrm{am}\, w \right)$$

so ist

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)\,(x-b)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-c)}} - \frac{1}{\sqrt{(c-a)}}\, w + \frac{2(a+b)-c-3x_1}{(c-a)^{3|2}} \cdot \frac{1}{l^2} \left[-E\,\mathrm{am}\, w + \frac{Sw \,.\, Dw}{Cw} \right]$$

folglich

$$T(x) = \frac{2n+1}{2} \times P(x) = \int \frac{L_1}{\Pi(x_1 - a)\, Q'^2(x_1)}$$

V) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

Setzt man diese Werte von α, β, γ in L_1 ein, so erhält man aus demselben folgenden Ausdruck:

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-b)}} + \int_x^\infty (-3(z-b)+2a-b+c-5x_1) \frac{dz}{2(z-a)\,(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)\,(x-b)}} - \frac{3}{2} \int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}} + (2a-b+c-5x_1) \int_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}.$$

Nun ist aber nach früherem

$$\frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{3|2}} \cdot \frac{1}{k^2} (w - E\,\mathrm{am}\, w)$$

und ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\int_0^w \frac{S^4(u)\,du}{D^2(u)}$$

weil nun aber

$$\frac{S^4 u}{D^2 u} = \frac{1}{l^2 k^4}\left(\frac{l^2}{D^2 u} - 2l^2 + l^4 D^2 u\right)$$

$$= \frac{1}{l^2 k^4}\left(-2l^2 + (1+l^2) D^2 u - \frac{\partial}{\partial u}\frac{k^2 S C}{D}\right)$$

so ist auch

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{l^2 k^4}\left(-2l^2 w + (1+l^2) E\operatorname{am} w - k^2 \frac{Sw\,Cw}{Dw}\right)$$

$$- \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{l^2 k^3} \cdot J$$

somit

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-b)}} - \frac{3}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2}(w - E\operatorname{am} w)$$

$$+ \frac{2a-b+c-5x_1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^4 l^2} \cdot J$$

VI) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})$

In diesem Falle ist

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-b)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-c)}} - \tfrac{3}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$+ (2a+b-c-5x_1)\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}.$$

Weil nun aber

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\int_0^w \frac{S^4 u}{C^2 u}\,du$$

und

$$\frac{S^2u}{C^2u} - \frac{1}{k^2l^2}\left(k^2 \cdot \frac{l^2S^2u}{C^2u} + l^2D^2u - l^2\right)$$
$$= \frac{1}{k^2l^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(k^2\frac{SD}{C}\right) - l^2 + (l^2 - k^2)D^2u\right)$$

also

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$= \frac{1}{(e-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2l^2}\left[-l^2w + (1-2k^2)E\operatorname{am} w + k^2\frac{Sw \cdot Dw}{Cw}\right],$$
$$= \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2l^2} \cdot H$$

so ist

$$L_1 = \frac{\sqrt{x-b}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-c)}} - \frac{3}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2}(w - E\operatorname{am} w)$$
$$+ \frac{2a+b-c-5x_1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2l^2} \cdot H$$

VII) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Man erhält sogleich

$$L_1 = \frac{\sqrt{x-a}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)(x-c)}} - \frac{3}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$+ (a-b+2c-5x_1)\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}.$$

Nun ist nach früherem

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{l^2}\left(\frac{Sw \cdot Dw}{Cw} - E\operatorname{am} w\right)$$

und

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2l^4} \cdot G$$

somit

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)}\,(x-c)} - \frac{3}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{l^2}\left(\frac{Sw \cdot Dw}{Cw} - Eamw\right)$$
$$+ \frac{(a-b+2c-5x_1)}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^4} \cdot G$$

Heine gibt in seinem mehr erwähnten Lehrbuche der Kugelfunctionen Bd. 2, §. 100 nicht durchweg fertig gerechnete Werte für $T(x)$ für die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ an. Weil ich später die ausgerechneten Werte von $T(x)$ für $n = 0, 1, 2, 3$ nötig habe, so will ich schon hier die Rechnung durchführen und gehe dabei von der Formel

$$T(x) = (2n+1) \cdot P(x) \cdot \int_x^\infty \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)} \times P^2(z)}$$

aus, wo

$$P(x) = \Pi(x-a)^\alpha \times Q(x), \quad Q(x) = x^\nu - d_1 x^{\nu-1} + d_2 x^{\nu-2} +$$
$$+ \ldots + (-1)^\nu dv$$

und $$2(\alpha+\beta+\gamma+\nu) = n$$

ist.

I. $n = 0$, also $\nu = 0$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.

In diesem Falle ist $P(x) = 1$ und die Formel für T(x) gibt sogleich

$$T(x) = \int_x^\infty \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{w}{\sqrt{(c-a)}}.$$

II. $n = 1$, also $\nu = 0$.

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$.

Setzt man diese Werte in die Ausdrüke für $P(x)$ und $T(x)$ ein, ein, so erhält man

$$P(x) = \sqrt{x-a} = \sqrt{c-a} \times \frac{1}{S(w)}$$

und

$$T(x) = 3\sqrt{x-a}\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{3}{(c-a)} \times \frac{1}{S(w)} \int_0^w S^2(u) \times du = \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{1}{k^2 S(w)}[w - Eam\,w]$$

2) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, 0)$.

Man findet

$$P(x) = \sqrt{x-b} = \sqrt{c-a} \times \frac{D(w)}{S(w)},$$

und

$$T(x) = 3\sqrt{(x-b)} \int_x^\infty \frac{dz}{2(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= -\frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{D(w)}{S(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^2u}{D^2u}\, du = \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{1}{k^2 l^2}$$

$$\cdot \left[\frac{D(w)}{S(w)}(-l^2 w + E\,\mathrm{am}\, w) - k^2 C(w)\right]$$

3) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \frac{1}{2})$.

In diesem Falle ist

$$P(x) = \sqrt{x-c} - \sqrt{(c-a)} \times \frac{C(w)}{S(w)}$$

und

$$T(x) = 3\sqrt{(x-c)} \int_x^\infty \frac{dz}{2(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= -\frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{C(w)}{S(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^2(u)}{C^2(u)}\, du$$

$$= \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{1}{l^2}\left[D(w) - \frac{C(w)}{S(w)} \cdot E\,\mathrm{am}\, w\right]$$

III. $n = 2$, also v entweder 0 oder 1.

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, $v = 1$.

Es ist nun

$$P(x) = x - d$$

wo d vermöge der Relation

$$(\lambda+1)(2n-2\lambda-1)\, d_{\lambda+1} = [(2n-1)\, d_1 - 2\lambda(n-\lambda) \cdot \Sigma a$$
$$+ 4\lambda \cdot \Sigma(\alpha a)]\, d_\lambda + (v-\lambda+1)[(2v-2\lambda+1) \times$$
$$\times \Sigma(bc + 4\Sigma(abc)] \cdot d_{\lambda-1} + 2(v-\lambda+1)\, abc \times d_{\lambda-2} \times (v-\lambda+2)$$

durch die quadratische Gleichung

$$3d^2 - 2\,\Sigma a \times d + \Sigma bc = 0$$

oder

$$\frac{1}{d-a} + \frac{1}{d-b} + \frac{1}{d-c} = 0$$

bestimmt wird. Die letztere Formel offenbart sogleich, dass die beiden Wurzeln d und d_1 zwischen a und c liegen müssen. Ich setze nun

$$d-a = (c-a) \cdot \frac{1}{S^2\varepsilon}, \quad d-b = (c-a) \cdot \frac{D^2\varepsilon}{S^2\varepsilon},$$

$$d-c = (c-a) \cdot \frac{C^2\varepsilon}{S^2\varepsilon}$$

und die Gleichung für d gibt

$$S^2(\varepsilon)\left(1 + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} + \frac{1}{C^2(\varepsilon)}\right) = 0$$

und weil $S^2(\varepsilon) = 0$ das Unstatthafte $d = \infty$ verlangen würde, so hat man

$$1 + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} + \frac{1}{C^2(\varepsilon)} = 0$$

Diese Gleichung führt auf

$$\varrho^2 = 1 - k^2 + k^4$$

ϱ sei positiv verstanden. Zu ϱ, $-\varrho$ gehören resp. ε und ε'; man kann

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + k^2 + \varrho}; \quad C(z) = \frac{i}{k} \cdot \sqrt{1 + \varrho};$$

$$D(\varepsilon) = i\sqrt{1 + k^2}$$

ε zwischen $-L$ und $K - L$

$$S(\varepsilon') = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + k^2 - \varrho}; \quad C(\varepsilon') = \frac{i}{k} \cdot \sqrt{1 - \varrho};$$

$$D(\varepsilon') = i\sqrt{-\varrho + k^2}$$

ε' zwischen K und $K - L$ annehmen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich, dass

$$S(\varepsilon) \cdot S(\varepsilon') = \frac{\sqrt{3}}{k}, \quad C(\varepsilon) \cdot C(\varepsilon') = -\frac{l}{k}, \quad D(\varepsilon) \cdot D(\varepsilon') = il$$

Nun ist

$$P(x) = x - d = x - a - (d-a) = (c-a) \cdot \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5(x-d)\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-d)^2\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}} S^2(\varepsilon) \cdot \frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^2(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^4(u)\,du}{(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2}.$$

Setzt man

$$p = S^2(u) - S^2(\varepsilon)$$

so ist

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)}{p}\right) = p\,\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right)^2$$

$$= k^2 p - \frac{1-2(1+k^2)S^2(\varepsilon)+3k^2S^4(\varepsilon)}{p} - 2\frac{S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}{p^2}$$

und weil

$$\frac{S^4 u}{(S^2(u)-S^2(\varepsilon))^2} = 1 + 2\frac{S^2(\varepsilon)}{p} + \frac{S^4(\varepsilon)}{p^2}$$

so findet man

$$2C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)\,.\,\frac{S^4(u)}{p^2} + S^2(\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)}{p}\right)$$

$$= k^2 S^2(\varepsilon)\,p + 2\,C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon) + 2\frac{S^2(\varepsilon)}{p}\left[3-(1+k^2)S^2\varepsilon + k^2S^4\varepsilon\right]$$

Vermöge der Gleichung für $S^2(\varepsilon)$ wird aber der Coefficient von $\frac{1}{p}$ zu null gemacht, wodurch die elliptischen Integrale dritter Art wegfallen. Man hat daher

$$T(x) = \frac{5}{2(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}$$

$$\cdot \left[\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)} - \frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^2(\varepsilon)\,S^2(w)}\left(C^2(\varepsilon)\,.\,w + S^2(\varepsilon)\,.\,E\,\mathrm{am}\,w\right)\right.$$

und eine gleiche Formel mit ε'.

2) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ v = 0.$

Es ist

$$P(x) = \sqrt{(x-b)(x-c)} = (c-a)\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5\sqrt{(x-b)\,(x-c)}\,\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)\,(z-c)\,\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^4(u)}{C^2u\,.\,D^2u}\,du$$

Da ich dieses Integral schon auf Seite 129 ausgewertet habe, so kann der Wert unmittelbar hingesetzt werden und man bekommt

$$T(x) = \frac{5}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{l^4}\left[\frac{C^2(w)+D^2(w)}{S(w)} - \frac{1}{k^2}\frac{C(w)\,D(w)}{S^2(w)}\left((1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w\right)\right]$$

3) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}),\ v = 0.$

Man findet

$$P(x) = \sqrt{(x-a)\,(x-c)} = (c-a)\,\frac{C(w)}{S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5\sqrt{(x-a)\,(x-c)}\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)\,(z-c)\,\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{C(w)}{S^2(w)}\int_0^w \frac{S^4(u)}{C^2(u)}\,du$$

also nach Seite 129 ist somit

$$T(x) = \frac{5}{(c-a)^{3/2}l^2}\left[\frac{D(w)}{S(w)} - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{C(w)}{S^2(w)}\left(l^2 w - (1-2k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w\right)\right]$$

4) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0),\ v = 0.$

In diesem Falle ist

$$P(x) = \sqrt{(x-a)\,(x-b)} = (c-a) \cdot \frac{D(w)}{S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5\sqrt{(x-a)\,(x-2)}\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)\,(z-c)\,\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{D(w)}{S^2(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^4(u)}{D^2(u)}\,du,$$

also nach Seite 128 findet man

$$T(x) = \frac{5}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{l^2 k^2}\left[-\frac{C(w)}{S(w)} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{D(w)}{S^2(w)}\left((2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - 2l^2 w\right)\right]$$

IV. $n = 3,\ v = 1.$

1) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0);\ v = 1.$

In diesem Falle ist

$$P(x) = (x-d)\sqrt{x-a}$$

$$= (c-a)^{3/2} \cdot \frac{d-a}{c-a} \cdot \frac{x-a}{c-a}\left(\frac{c-a}{d-a} - \frac{c-a}{x-a}\right)\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{c-a}}$$

$$= (c-a)^{3/2} \cdot \frac{1}{S^2(w)} \cdot \frac{d-a}{c-a}\left(\frac{c-a}{d-a} - S^2(w)\right)$$

und d wird durch die Gleichung

$$\frac{3}{d-a} + \frac{1}{d-b} + \frac{1}{d-c} = 0$$

bestimmt. Wenn

$$d-a = (c-a)\frac{1}{S^2(\varepsilon)}, \quad d-b = (c-a)\frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)},$$

$$d-c = (c-a)\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}$$

gesetzt wird, so genügt $S^2(\varepsilon)$ der Gleichung

$$3 + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} + \frac{1}{C^2(\varepsilon)} = 0$$

oder auch

$$3k^2 S^4(\varepsilon) - 4(1+k^2)S^2(\varepsilon) + 5 = 0$$

Diese Gleichung führt auf

$$\varrho^2 = 4 - 7k^2 + 4k^4 = 4l^4 + k^2,$$

wo ϱ positiv verstanden wird, und man hat

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2(1+k^2)+\varrho}, \quad C(\varepsilon) = \frac{i}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-k^2+\varrho},$$

$$D(\varepsilon) = \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\varrho-1+2k^2}$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{2(1+k^2)^2-\varrho}, \quad \frac{1}{C(\varepsilon)} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{2-k^2-\varrho};$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon)} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{\varrho+1-2k^2}$$

und ebenso

$$S(\varepsilon') = \frac{1}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2(1+k^2)-\varrho}, \quad C(\varepsilon') = \frac{i}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-k^2-\varrho},$$

$$D(\varepsilon') = \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{-\varrho-1+2k^2}$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon')} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2(1+k^2)+\varrho}, \quad \frac{1}{C(\varepsilon')} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{2-k^2+\varrho},$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon')} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{-\varrho+1-2k^2}$$

folglich

$$S(\varepsilon) \cdot S(\varepsilon') = \frac{\sqrt{5}}{k\sqrt{3}}; \quad C(\varepsilon) \cdot C(\varepsilon') = -\frac{l}{k\sqrt{3}};$$

$$D(\varepsilon) D(\varepsilon') = -\frac{il}{\sqrt{3}}$$

Es ist nun

$$P(x) = (c-a)^{3|3} \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)}$$

und ebenso wird

$$\mathrm{T}(x) = 7(x-d)\sqrt{x-a} \int_x^\infty \frac{dz}{2(z-d)^2(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{7}{(c-a)^2} \cdot S^2(\varepsilon) \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^6(u)}{(S^2(\varepsilon) - S^2(u))^2}\, du$$

Um dieses Integral zu bestimmen, setze ich wieder

$$p = S^2(u) - S^2(\varepsilon)$$

dann ist nach Seite 133

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right) - k^2 p - \frac{1-2(1+k^2)\,S^2(\varepsilon)+3k^2 S^4(\varepsilon)}{p} - 2\,\frac{S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}{p}$$

ferner ist

$$\frac{S^6(u)}{(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} = 3\,S^2(\varepsilon)+p+3\,\frac{S^4(\varepsilon)}{p}+\frac{S^6(\varepsilon)}{p^2}$$

Wird diese letzte Gleichung mit $2C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)$ und die vorhergehende mit $S^4(\varepsilon)$ multipl., so gibt ihre Summe

$$\begin{aligned} 2C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)\,.\,\frac{S^6(u)}{(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} + S^4(\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right) \\ = 6S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)+(2(C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)+k^2 S^4(\varepsilon))\,p \\ + \frac{S^4(\varepsilon)}{p}(6C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)-1+2(1+k^2)\,S^2(\varepsilon)-3k^2 S^4(\varepsilon)) \end{aligned}$$

wo aber vermöge der Relation

$$3k^2 S^4(\varepsilon)-4(1+k^2)\,S^2(\varepsilon)+5=0$$

auch

$$6C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)-1+2(1+k^2)\,S^2(\varepsilon)-3k^2 S^4(\varepsilon)=0$$

ist, wodurch die Integrale dritter Art wegfallen. Es ist somit

$$\begin{aligned} T(x) = -\frac{7}{(c-a)^2}\cdot\frac{S^2(\varepsilon)}{2k^2 C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}\Bigg[k^2 S^4(\varepsilon)\,.\,\frac{C(w)\,D(w)}{S^2(w)} \\ + \frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^3(w)}((3-2(1+k^2)\,S^2(\varepsilon^2)E\mathrm{am}\,w-(3-(2+k^2)S^2(\varepsilon)\,w)\Bigg] \end{aligned}$$

und eine ähnliche Formel erhält man für ε'.

2) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (0,\ \tfrac{1}{2},\ 0),\ v=1.$

Es ist

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-d)\sqrt{x-b} \\ &= (c-a)^{3/2}\cdot\frac{d-b}{c-a}\cdot\frac{x-b}{c-a}\left(\frac{c-a}{d-b}-\frac{c-a}{x-b}\right)\frac{\sqrt{(x-b)}}{\sqrt{(c-a)}} \end{aligned}$$

oder

$$P(x) = (c-a)^{3/2}\cdot\frac{D(w)}{S^2(\varepsilon)\,S^3(w)}\cdot(S^2(\varepsilon)-S^2(w))$$

Die Constante d wird in diesem Falle durch die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{d-a}+\frac{3}{d-b}+\frac{1}{d-c}=0$$

bestimmt. Führt man hier die elliptischen Functionen ein, so erhält man für $S^2(\varepsilon)$ die Gleichung

$$1+\frac{3}{D^2(\varepsilon)}+\frac{1}{C^2(\varepsilon)}=0$$

oder

$$5-2(2+k^2)S^2(\varepsilon)+k^2S^4(\varepsilon)=0$$

Diese Gleichung führt auf

$$\varrho^2=4-k^2+k^4,$$

wo ϱ positiv verstanden wird, und man hat

$$S(\varepsilon)=\frac{1}{k}\cdot\sqrt{2+k^2+\varrho};\quad C(\varepsilon)=\frac{i}{k}\cdot\sqrt{2+\varrho};$$

$$D(\varepsilon)=i\cdot\sqrt{1+k^2+\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon)}=\frac{k}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\varrho-1-k^2};\quad\frac{1}{C(\varepsilon)}=\frac{i}{l}\cdot\sqrt{2-\varrho};$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon)}=\frac{1}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+k^2-\varrho}$$

für ε' hat man die Formeln

$$S(\varepsilon')=\frac{1}{k}\cdot\sqrt{2+k^2-\varrho};\quad C(\varepsilon')=\frac{i}{k}\cdot\sqrt{2-\varrho};$$

$$D(\varepsilon)=i\sqrt{1+k^2-\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon')}=\frac{k}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{-\varrho-1-k^2};\quad\frac{1}{C(\varepsilon')}=\frac{i}{l}\cdot\sqrt{2+\varrho};$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon')}=\frac{1}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+k^2+\varrho}$$

aus diesen Formeln folgt, dass

$$S(z)\,.\,S(\varepsilon')=\frac{\sqrt{5}}{k};\quad C(\varepsilon)\,C(\varepsilon')=-\frac{l}{k};\quad D(z)\,.\,D(\varepsilon')=-i\sqrt{3}\,l$$

Für die Lamé'sche Function $T(x)$ erhält man in diesem Falle den Ausdruck

$$T(x)=7(x-d)\sqrt{x-b}\,.\,\tfrac{1}{2}\int_x^\infty\frac{dz}{(z-d)^2\,(z-b)\,\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$-\frac{7}{(c-a)^2}\cdot\frac{S^2(\varepsilon)\,D(w)}{S^3(w)}\cdot(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\int_0^w\frac{S^6(u)\,du}{D^2(w)(S^2(\varepsilon)-S^2(w))^2}$$

Um dieses Integral auszuwerten, setze man wie früher

$$p = S^2(u) - S^2(\varepsilon)$$

dann ist

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)}{p}\right) = k^2 p - \frac{1-2(1+k^2)S^2(\varepsilon)+3k^2S^4(\varepsilon)}{p} - 2\,.\,\frac{S^2(\varepsilon)\,.\,C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)}{p^2}$$

und weil

$$\frac{S^6(u)}{D^2(u)\,(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} = -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 D^4(\varepsilon)}\,.\,D^2(u) + \frac{S^4(\varepsilon)(1+2D^2(\varepsilon))}{D^4(\varepsilon)}\,.\,\frac{1}{p} + \frac{S^6(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)}\,.\,\frac{1}{p^2}$$

so hat man

$$2C^2(\varepsilon)\,D^4(\varepsilon)\,.\,\frac{S^6(u)}{D^2(u)\,.\,(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} + S^4(\varepsilon)\,.\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right) = k^2 S^4(\varepsilon)\,p - 2\,\frac{C^2(\varepsilon)\,.\,D^4(\varepsilon)}{k^2} + 2\,\frac{C^2(\varepsilon)}{k^2}\,.\,\frac{1}{D^2(u)} + \frac{S^4(\varepsilon)}{p}\,(5-2(2+k^2)S^2(\varepsilon)+k^2S^4(\varepsilon))$$

Ersetzt man hier $\frac{l^2}{D^2(u)}$ durch $D^2(u)-k^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu}{Du}\right)$ und wendet die Relation

$$5-2(2+k^2)+k^2S^4(\varepsilon) = 0$$

mehrfach an, so erhält man

$$2C^2(\varepsilon)\,.\,D^4(\varepsilon)\,.\,\frac{S^6(u)}{D^2(u)\,.\,(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} + S^4(\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right) = \frac{D^2(\varepsilon)}{k^2}\,(3-2S^2(\varepsilon)) + \frac{1}{k^2 l^2}\,(7-5k^2-2(3-k^2-k^4)S^2(\varepsilon))\,D(u) - 2\,\frac{C^2(\varepsilon)}{l^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu}{Du}\right)$$

und somit ist

$$T(x) = \frac{7}{2(c-a)^2k^2l^2}\,.\,\frac{S^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)\,.\,D^4(\varepsilon)}\,.\,\frac{D(w)}{S^3(w)}\,.\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\left[k^2l^2\,.\,S^4(\varepsilon)\,.\,\frac{Sw\,.\,Cw\,.\,Dw}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} - k^2\,C^2(\varepsilon)\,\frac{Sw\,.\,Cw}{Dw}\,.\right.$$
$$\left.+l^2D^2(\varepsilon))(3-2S^2(\varepsilon))\times w+(7-5k^2-2(3-k^2-k^4)S^2(\varepsilon))\,E\mathrm{am}\,w\right]$$

$$3)\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}),\ v = 1.$$

In diesem Falle ist

$$P(x) = (x-d)\sqrt{x-c}$$
$$= (c-a)^{3/2}\cdot\frac{d-c}{c-a}\cdot\frac{x-c}{c-a}\cdot\left(\frac{c-a}{d-c}-\frac{c-a}{x-c}\right)\sqrt{\frac{x-c}{c-a}}$$

führt man hier die elliptischen Functionen ein, so erhält man

$$P(x) = (c-a)^{3/2}\,\frac{C(w)}{S^2(\varepsilon)\cdot S^3(w)}\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w))$$

für die Constante d hat man in diesem Falle die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{d-a}+\frac{1}{d-b}+\frac{3}{d-c}=0$$

die nun für $S^2(\varepsilon)$ folgende Relation liefert:

$$1+\frac{3}{C^2(\varepsilon)}+\frac{1}{D^2(\varepsilon)}=0$$

oder auch

$$5-2(1+2k^2)\,S^2(\varepsilon)+k^2\,S^4(\varepsilon)=0$$

Setzt man hier

$$\varrho^2 = 1-k^2+4k^4$$

und versteht ϱ positiv, so folgt

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{k}\cdot\sqrt{1+2k^2+\varrho};\quad C(\varepsilon) = \frac{i}{k}\cdot\sqrt{1+k^2+\varrho};$$
$$D(\varepsilon) = i\sqrt{2k^2+\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{1+2k^2-\varrho};\quad \frac{1}{C(\varepsilon)} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+k^2-\varrho};$$
$$\frac{1}{D(\varepsilon)} = -\frac{1}{l}\cdot\sqrt{2k^2-\varrho};$$

$$S(\varepsilon') = \frac{1}{k}\cdot\sqrt{1+2k^2-\varrho};\quad C(\varepsilon') = \frac{i}{k}\cdot\sqrt{1+k^2-\varrho};$$
$$D(\varepsilon') = i\sqrt{2k^2-\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon')} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{1+2k^2+\varrho};\quad \frac{1}{C(\varepsilon')} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+k^2+\varrho};$$
$$\frac{1}{D(\varepsilon')} = -\frac{1}{l}\cdot\sqrt{2k^2+\varrho};$$

$$S(\varepsilon) \,.\, S(\varepsilon') = \frac{\sqrt{5}}{k}; \quad C(\varepsilon) \,.\, C(\varepsilon') = -\frac{l}{k} \cdot \sqrt{3};$$

$$D(\varepsilon) \,.\, D(\varepsilon') = -il$$

Nun soll die Lamé'sche Function zweiter Art dargestellt werden.

Es ist

$$T(x) = 7\,(x-d)\sqrt{x-c}\,\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-d)^2(z-c)\,\sqrt{\Pi\,(z-a)}}$$

$$-\frac{7}{(c-a)^2} \cdot \frac{S^2(\varepsilon) \,.\, C(w)}{S^3(w)}\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w)) \,.\, \int_0^w \frac{S^6(u) \,.\, du}{C^2(u) \,.\, (S^2(u)-S^2(\varepsilon))^2}$$

Weil nach früherem

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \,.\, Cu \,.\, Du}{p}\right) = k^2 p - \frac{1-2(1+k^2)S^2(\varepsilon)+3k^2S^4(\varepsilon)}{p}$$

$$-2 \,.\, \frac{S^2 2(\varepsilon) \,.\, C^2(\varepsilon) \,.\, D^2(\varepsilon)}{p^2}$$

und da

$$\frac{S^6(u)}{C^2(u) \,.\, (S^2(\varepsilon)-S^2(u))} = -1 + \frac{1}{C^4(\varepsilon) \,.\, C^2(u)}$$

$$+\frac{S^4(\varepsilon)}{C^4(\varepsilon)}\,(1+2C^2(\varepsilon))\,\frac{1}{p} + \frac{S^6(\varepsilon)}{C^4(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{p^2}$$

so erhält man

$$2C^4(\varepsilon) \,.\, D^2(\varepsilon) \,.\, \frac{S^6(u)}{C^2(u) \,.\, (S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} + S^4(\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \,.\, Cu \,.\, Du}{p}\right)$$

$$= k^2 p \,.\, S^4(\varepsilon) - 2C^4(\varepsilon) \,.\, D^2(\varepsilon) + 2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(u)}$$

$$+\frac{S^4(\varepsilon)}{p}\,(5-2\,(1+2k^2)S^2(\varepsilon)+k^2S^4(\varepsilon))$$

Wird $\frac{l^2}{C^2(\varepsilon)}$ durch $\frac{\partial}{du}\left(\frac{Su \,.\, Du}{C(u)}\right)+l^2-D^2(u)$ ersetzt, so kann man diesem Ausdrucke mit Hülfe der Relation

$$5-2(1+2k^2)S^2(\varepsilon)+k^2S^4(\varepsilon) = 0$$

auch folgende Form geben:

$$2C^4(\varepsilon) \,.\, D^2(\varepsilon) \,.\, \frac{S^6(u)}{C^2(u) \,.\, (S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} + S^4(\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \,.\, Cu \,.\, Du}{p}\right)$$

$$= D^2(\varepsilon)\,S^2(\varepsilon)\,(4-S^2(\varepsilon)) + \frac{1}{k^2 l^2}\,(5-7k^2-2(1+k^2-3k^4)S^2(\varepsilon)) \,.\, D^2(u)$$

$$+2\frac{D^4(\varepsilon)}{l^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \,.\, Du}{Cu}\right)$$

Schliesslich wird

$$T(x) = \frac{7}{2(c-a))^2 k^2 l^2} \cdot \frac{S^2(\varepsilon)}{C^4(\varepsilon) \,.\, D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{C(w)}{S^3(w)}$$
$$\,.\, (S^2(\varepsilon) - S^2(w)) \left[k^2 l^2 (S^4(\varepsilon)) \,.\, \frac{Sw \,.\, Cw \,.\, Dw}{S^2\varepsilon - S^2(w)} \right.$$
$$+ k^2 l^2 D^2(\varepsilon) S^2(\varepsilon) (4 - S^2(\varepsilon)) w + (5 - 7k^2 - 2(1 + k^2 - 3k^4) S^2(\varepsilon)) E\mathrm{am}\, w$$
$$\left. + 2k^2 D^2(\varepsilon) \,.\, \frac{Sw \,.\, Dw}{Cw} \right]$$

4) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), \nu = 1.$

Man hat sogleich

$$P(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)} = (c-a)^{3/2} \cdot \frac{C(w) \,.\, D(w)}{S^3(w)}$$

und

$$T(x) = 7\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot \tfrac{1}{2} \int_x^\infty \frac{dz}{(x-a)(z-b)(z-c)\sqrt{H(z-a)}}$$

$$= \frac{7}{(c-a)^2} \cdot \frac{C(w) \,.\, D(w)}{S^3(w)} \int_0^w \frac{S^6 u}{C^2 u \,.\, D^2 u} \cdot du$$

Nun ist

$$k^4 l^4 \frac{S^6 u}{C^2 u \,.\, D^2 u} = l^2(1 + l^2) - k^4 \left(- \frac{l^2 S^2 u}{C^2 u} \right) - \frac{l^2}{D^2 u} - l^4 D^2$$

folglich

$$T(x) = \frac{7}{(c-a)^2 k^4 l^4} \cdot \left\{ \frac{C(w) \,.\, D(w)}{S^3(w)} [l^2(1 + l^2) w - 2(1 - k^2 + k^4) E\mathrm{am}\, w] \right.$$
$$\left. + k^2 \frac{D^2(w)}{S^2(w)} + k^2 \frac{C^2(w)}{S^2(w)} \right\}$$

Die Lamé'sche Function zweiter Art soll eine andere Darstellung erhalten, die sich von $T(x)$ nur durch einen constanten Factor unterscheidet.

Es sei

$$P(x) = \Pi(x-a)^{1/2 - \alpha} f(x)$$

dann ist

$$f(x) = \Pi(x-a)^{2\alpha - 1/2} Q(x)$$

und wird in der Nähe von $x = a$, wenn $\alpha = 0$, gross von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$; wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, klein wie $\sqrt{x-a}$; ähnlich wie bei b und c. Daher convergiren die zwei Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_b^c f(x)\,dx$$

Nun soll die Differentialgleichung für $P(x)$ in eine solche für $f(x)$ verwandelt werden. Bekanntlich genügt $P(x)$ der Gleichung:

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = n(n+1)x + D$$

Es ist

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2\Pi(x-a)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \Pi(x-a)^{1-\alpha} \times \Sigma \frac{1-2\alpha}{x-a} \cdot f(x)$$

Statt mit $\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ behandle man den Ausdruck mit

$$\frac{f}{4P} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\Pi(x-a)^{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \text{Op.}$$

Op. (erster Term)

$$-\Pi(x-a)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \Pi(x-a) \cdot \Sigma \frac{1-\alpha}{x-a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

Der zweite Term des Ausdruckes für $\frac{\partial P}{\partial t}$ sei $M \cdot f(x)$. Um Op. M zu finden, schreibe man

$$\begin{aligned} M = {} & (1-2\alpha)(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{1-\beta}(x-c)^{1-\gamma} \\ & + (1-2\beta)(x-a)^{1-\alpha}(x-b)^{-\beta}(x-c)^{1-\gamma} \\ & + (1-2\gamma)(x-a)^{1-\alpha}(x-b)^{1-\beta}(x-c)^{-\gamma} \end{aligned}$$

vollständig hin. In Op. M bekommt $(x-a)^{-1}(x-b)(x-c)$ den Coeff.

$$-\tfrac{1}{2}\alpha(1-2\alpha) = 0$$

$x-a$ den Coeff.

$$\tfrac{1}{2}(1-2\beta)(1-\gamma) + \tfrac{1}{2}(1-2\gamma)(1-\beta) = 1 - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) + 2\beta\gamma$$

Weil

$$-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = -2(\beta+\gamma) + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = -2(\beta+\gamma) + \beta^2 + \gamma^2$$

so ist der Coeff. von $x-a$ gleich

$$1-2(\beta+\gamma)+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2 = -(1-\beta-\gamma)^2$$

also ist

$$\text{Op. } M = \Sigma(1-\beta-\gamma)^2(x-a)$$

folglich

Op. (zweiter Term)

$$= \tfrac{1}{2}\Pi(x-a)\,.\,\Sigma\frac{1-2\alpha}{x-a}\,.\,\frac{\partial f(x)}{\partial x}+\Sigma(1-\beta-\gamma^2(x-a)\,.\,f(x)$$

Daher ist

$$\frac{f}{4P}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \Pi(x-a)\,.\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}\Pi(x-a)\Sigma\frac{3-4\alpha}{x-a}\,.\,\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$
$$+\Sigma(1-\beta-\gamma)^2(x-a)\,.\,f(x) = \tfrac{1}{4}(n(n+1)x+E)\,.\,f(x)$$

Man hat nun für f als Function der unabhängigen Variabeln x eine homogene Differentialgl. zweiter Ordnung gewonnen, worin die Coefficienten der Abgeleiteten ganze Functionen resp. dritten, zweiten, ersten Grades von x sind. Bezeichnet man die drei Coeff der Kürze wegen mit

$$\varphi(x) = \Pi(x-a);\quad \chi(x) = \tfrac{1}{2}\Pi(x-a)\,.\,\Sigma\frac{3-4\alpha}{x-a};$$
$$\psi(x) = \Sigma(1-\beta-\gamma)^2(x-a)-\tfrac{1}{4}(n(n+1)x+E)$$

so genügt $f(x)$ der Gleichung:

$$\bigtriangledown f = \varphi(x)\,.\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\chi(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\psi(x)\,.\,f = 0$$

Es sei nun

$$V = \int\frac{f(z)}{x-z}\,dz$$

mit constanten Grenzen, die nicht von x abhangen, und vorläufig mit keinem der drei Punkte a, b, c zusammen fallen sollen. Man will $\bigtriangledown V(x)$ berechnen. Weil

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{x-z} = -\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{1}{x-z}$$

so ist

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \int-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x-z}\right)\cdot f(z)\,dz = -\left\{\frac{f(z)}{x-z}\right\}+\int\frac{f'(z)}{x-z}\,dz$$

Weil auch

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\int\frac{f'(z)}{x-z}\,dz = -\left\{\frac{f'(z)}{x-z}\right\}+\int\frac{f''(z)}{x-z}\,dz$$

so ist

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = \left\{\frac{f(z)}{(x-z)^2} - \frac{f'(z)}{x-z}\right\} + \int \frac{f''(z)}{x-z}\,dz$$

Wenn man nun ∇V hinschreibt, so setze man, um die Differentialgl. anwenden zu können, unter dem Integrationszeichen

$$\varphi(x) = \varphi(z) + (\varphi(x) - \varphi(z), \text{ etc.}$$

und beachte, dass

$$\int (\varphi(z) f''(z) + \chi(z) \cdot f'(z) + \psi(z) f(z)) \frac{dz}{x-z} = 0$$

Dann findet man:

$$\nabla V(x) = \left\{\frac{\varphi(x) \cdot f(z)}{(x-z)^2} - \frac{\varphi(x) \cdot f'(z) + \chi(x) \cdot f(z)}{x-z}\right\}$$
$$+ \int \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z} \cdot f''(z)\,dz + \int \frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z} \cdot f'(z)\,dz$$
$$+ \int \frac{\psi(x) - \psi(z)}{x-z} \cdot f(z)\,dz, \quad (\text{sei} = (0) + (\text{I}) + (\text{II}) + (\text{III})).$$

Die Brüche unter den Integrationszeichen sind der Reihe nach ganze Functionen zweiten, ersten Grades und eine Constante. Daher sind

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z}$$

Constante. Verwandelt man (I) durch zweimalige, (II) durch einmalige partielle Integration, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(\text{I}) = \left\{\frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z} \cdot f'(z) - \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{(x-z)^2} \cdot f(z) + \frac{\varphi'(z) \cdot f(z)}{x-z}\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z}\right) \cdot \int f(z)\,dz;$$

$$(\text{II}) = \left\{\frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z} \cdot f(z)\right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z}\right) \cdot \int f(z)\,dz$$

Also ist

$$\nabla V(x) = \left\{\frac{\varphi(z) \cdot f(z)}{(x-z)^2} - \frac{\varphi(z) f'(z) + (\chi(z) - \varphi'(z)) f(z)}{x-z}\right\}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z} + \frac{\psi(x) - \psi(z)}{x-z}\right] \cdot \int f(z)\,dz$$

Der Factor des Integrals ist eine Constante und werde mit M bezeichnet. Man untersuche den Functionsunterschied $\{\ldots\}$ in $z = a$, um zu sehen, ob hier vielleicht eine passende Grenze sich

findet. Man wird dann sogleich erfahren, was aus $\{\ldots\}$ in $z = b$, c wird. Der Wunsch ist, diesen Functionsunterschied zu null zu machen. Welchen Wert hat also der Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)\,.\,f(z)}{(x-z)^{\alpha}} - \frac{\varphi(z)\,.\,f'(z) + (\chi(z) - \varphi'(z))\,.\,f(z)}{x-z}$$

in $z = a$? Es sei $z = a + h$, h sehr klein. Weil

$$\varphi(z)\,.\,f(z) = \Pi(z-a)^{2\alpha+\frac{1}{2}}\,.\,Q(z)$$

so verschwindet $\varphi(z)\,.\,f(z)$ jedenfalls. 1^0. Wenn $\alpha = 0$, so ist

$f(z) = Ah^{-1/2} + Bh^{1/2} + \ldots$, $f'(z) = -\frac{1}{2}Ah^{-3/2} + \ldots$,
$\varphi(z) = (b-a)(c-a)h + \ldots$, $\varphi'(z) = (b-a)(c-a) + \ldots$,
$\chi(z) = \frac{3}{2}(b-a)(c-a) + \ldots$; also
$\varphi(z)\,f'(z) = -\frac{1}{2}A(b-a)(c-a)h^{-1/2} + \ldots$,
$\chi(z) - \varphi'(z) = \frac{1}{2}(b-a)(c-a) + \ldots$,
$[\chi(z) - \varphi'(z)]f(z) = \frac{1}{2}A(b-a)(c-a)h^{-1/2} + \ldots$

Der zweite Term ist daher mindestens klein von der Ordnung $h^{1/2}$, verschwindet also in $z = a$. 2^0. Wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, so ist

$$f(z) = Ah^{1/2} + \ldots, \quad f'(z) = \tfrac{1}{2}Ah^{-1/2} + \ldots,$$
$$\chi(z) = \tfrac{1}{2}(b-a)(c-a) + \ldots,$$

$\varphi(z)\,.\,f'(z)$ verschwindet,

$$\chi(z) - \varphi'(z) = -\tfrac{1}{2}(b-a)(c-a) + \ldots,$$

ist endlich, $f(z)$ verschwindet. Der Ausdruck verschwindet demnach auch in $z = a$: er verschwindet somit überhaupt in $z = a, b, c$. Die passenden Grenzen, für welche der Functionsunterschied wegfällt, sind gefunden; das eine Mal integrire man über $a < z < b$, das andere Mal über $b < z < c$. Man setze nun

$$V_1 = \int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz, \qquad V_2 = \int_b^c \frac{f(z)}{x-z}\,dz,$$

$$U_1 = \int_a^b f(z)\,dz, \qquad U_2 = \int_b^c f(z)\,dz$$

Dann gelten die zwei Differentialgl.

$$\bigtriangledown V_1(x) = M\,.\,U_1; \quad \bigtriangledown V_2(x) = M\,.\,U_2,$$

die nicht mehr homogen sind, sondern eine Constante als rechte Seite haben. Noch ist M zu berechnen. Weil

$$\frac{x^3 - z^3}{x - z} = x^2 + xz + z^2$$

so ist

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x - z} = 2$$

Der höchste Term in $\chi(x)$ ist

$$\left(\frac{9}{2} - 2\Sigma\alpha\right) \cdot x^2, \qquad \frac{x^2 - z^2}{x - z} = x + z$$

folglich

$$-\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\chi(x) - \chi(z)}{x - z} = -\frac{9}{2} + 2\Sigma\alpha$$

Endlich ist

$$\frac{\psi(x) - \psi(z)}{x - z} = \Sigma(1 - \beta - \gamma)^2 + \tfrac{1}{4}n(n+1) = 3 - 4\Sigma\alpha + 2\Sigma\alpha^2 + 2\Sigma\beta\gamma$$
$$-\tfrac{1}{4}n(n+1) = 3 - \tfrac{7}{2} \cdot \Sigma\alpha + (\Sigma\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}n(n+1)$$

Daher

$$M = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} \cdot \Sigma\alpha + (\Sigma\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}n(n+1) = \tfrac{1}{2}(1 - \Sigma\alpha)(1 - 2\Sigma\alpha) - \tfrac{1}{4}n(n+1)$$

Weil

$$\frac{n}{2} = v + \Sigma\alpha$$

also

$$\frac{n(n+1)}{4} = (v + \Sigma\alpha)(v + \Sigma\alpha + \tfrac{1}{2})$$

so ist

$$M = -(v+1)(v + 2\Sigma\alpha - \tfrac{1}{2})$$

und es bestehen die zwei Differentialgleichungen

$$\varphi(x)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \chi(x) \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x} + \psi(x) V_1 = MU_1,$$

$$\varphi(x)\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \chi(x) \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x} + \psi(x) V_2 = MU_2$$

Multiplicirt man dieselben und addirt, so sieht man, dass $U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x)$ derselben Differentialgl. wie $f(x)$, folglich

II. $$W(x) = \Pi(x-a)^{\frac{1}{2}-\alpha}(U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x))$$

derselben Differentialgl. wie $P(x)$ genügt, dass nämlich

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = (n(n+1)x + E) W$$

denkt man sich x sehr gross, so ist

$$V_1(x) = \frac{U_1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_a^b z f(z)\, dz + \ldots,$$

$$V_2(x) = \frac{U_2}{x} + \frac{1}{x^2}\int_b^c z f(z)\, dz + \ldots,$$

also $U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x)$ mindestens von der Ordnung $\frac{1}{x^2}$ des sehr kleinen. Da aber der Exponent $\frac{3}{2} - \Sigma\alpha$ nur der Werte $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, 0 fähig ist, so ist $W(x)$ mindestens von der Ordnung $x^{-1/2}$ der Kleinheit. Die Function $W(x)$ kann daher nicht mit

$$P(x) = x^{\frac{n}{2}} + \ldots$$

zusammenfallend gedacht werden, sondern sie unterscheidet sich von der Lamé'schen Function $T(x)$ zweiter Art nur durch einen constanten Factor und ist in Wirklichkeit von der Ordnung $x^{-1/2(n+1)}$ der Kleinheit, wenn x sehr gross wird. Heine bezeichnet diese Constante mit k und nennt sie eine numerische, sagt aber in seinen Arbeiten über die Art ihrer Berechnung kein Wort. Ich habe schon oben bemerkt, dass diese Benennung Heines nicht zutreffend ist, da sie in Wirklichkeit bei ihm eine algebraische Funct. von b^2 und c^2 ist. Will man nun nach Formel II. din Function $W(x)$ in elliptische Integrale umsetzen, um durch Vergleichung mit den entsprechenden Ausdrücken von $T(x)$ die fragliche Constante zu erkennen, so wird die Rechnung je weilen durch das Auftreten der beiden Perioden des elliptischen Integrales dritter Art sehr erschwert. Ich will nun der Function $W(x)$ noch eine andere Gestalt geben, welche die Umsetzung in elliptische Integrale in so fern erleichtert, als man nicht genötigt wird, beide Perioden des ellipt. Integrales dritter Art zu berechnen.

Stellt man im Ausdrucke für $W(x)$ den Factor $\Pi(z-a)^{1/2-\alpha}$ bei Seite, so kann man den Multiplicand $U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x)$ als Doppelintegral auffassen. Es gilt, dieses Doppelintegral in die Form eines einfachen Integrales zu bringen. Statt der Integrale U_1, U_2 mit geradlinigem Wege habe ich solche mit krummlinigem geschlossenen Wege, die sich resp. in eine Doppelgerade von a bis b und zurück, von b nach c und zurück, verwandeln lassen. Da ich über eine entsprechende Integrationsfunction mit beweglicher obern Grenze verfügen muss, so setze ich

$$\frac{\partial U(z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2} f(z) = \tfrac{1}{2} \Pi (z-a)^{\alpha - 1/2} \,.\, P(z) = \tfrac{1}{2} \Pi (z-a)^{2\alpha - 1/2} \,.\, Q(z)$$

Da 2α, 2β, 2γ ganze Zahlen (0 oder 1) sind, folglich $\Pi(z-a)^{2\alpha}$. $Q(z)$ eine ganze Function ist, so ist alle Irrationalität in der einzigen Quadratwurzel $\sqrt{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}$ vereinigt; daher reicht ein zweiblättriges Feld, in dem eine Uebergangslinie von $-N$ nach a, eine andere von b nach c gezogen ist, zur Aufnahme der Function $U(z)$ hin, und U_1, U_2 erscheinen als die zwei Perioden derselben. Wo sie verschwinde ist gleichgültig; man kann allenfalls $z = c$ als untere Grenze des Integrals $U(z)$ annehmen, damit, wenn z sich nur in der Realitätslinie des ersten Blattes von c gegen N hin bewegt, $\frac{\partial U(z)}{\partial z}$, folglich auch $U(z)$ stets positiv seien. (Denn $Q(z)$ ist dann pos., weil alle Wurzeln der Gleichung

$$Q(z) = 0$$

unterhalb c liegen). Die Variabele x liege weit östlich von c in der Realitätslinie und es sei

$$dZ = \tfrac{1}{2} \Pi (x-a)^{1/2-\alpha} dV = \Pi (x-a)^{1/2-\alpha} \frac{dU}{x-z}$$

$$= \tfrac{1}{2} \Pi \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{1/2-\alpha} \frac{P(z)}{x-z} dz$$

Man betrachte das Integral $\int U dZ$ (Weg wie in Fig. 2).

Ich habe den Weg geschlossen, weil U wirklich auf denselben Wert zurückkehrt, was sogleich gezeigt werden soll, und weil es sich von $\frac{\partial Z}{\partial z}$ von selbst versteht. Man denke sich nämlich den Weg auf die Realitätslinie und um die Punkte a und c zusammengezogen. Die Punkte C, C' des ersten Blattes zwischen a und b fallen dann zusammen, und, weil die durchgehenden Wegesteile entgegengesetzte Richtung haben, so heben die ihnen entsprechenden Incremente der Function U einander auf; dasselbe gilt von den zwei Wegesteilen ab im unteren Blatte. Der Punkt B des ersten Blattes ist mit dem Punkte B' des zweiten Blattes durch die Uebergangslinie hindurch in unmittelbare Verbindung gesetzt, die Incremente der Function U, die den entgegengesetzt gerichteten Wegesteilen bc durch B und B' entsprechen, heben einander auf; und dasselbe gilt von den zwei noch übrigen Wegesteilen bc. Der Weg ist also geschlossen. In der Figur 1. habe ich den Integrationsweg entfernt von der Reali-

tätslinie gezeichnet, nur um die Vorzeichen von $\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}$ jeweilen an der Aussenseite der Wegesteile anbringen zu können, denke mir aber den Weg, wie gesagt, auf die Realitätslinie zusammen gedrängt. Für die halben Perioden

$$\tfrac{1}{2}U_1 = \int_{z=a}^{z=b} dU, \quad \tfrac{1}{2}V_1 = \int_{z=a}^{z=b} \frac{dU}{x-z}$$

sei der Weg $a\zeta b$ (Vorzeichen 1) massgebend und für

$$\tfrac{1}{2}U_2 = \int_{z=b}^{z=c} dU, \quad \tfrac{1}{2}V_2 = \int_{z=b}^{z=c} \frac{dU}{x-z}$$

der Weg $b\beta c$ (Vorzeichen i). Auf dem Wege von b über ε und ζ zurück nach b (natürlich westlich von a durch die Uebergangslinie hindurch; ich werde später kurz „Weg $b\varepsilon\zeta b$" sagen, womit zugleich die Richtung des Weges angezeigt ist) gewinnt die Function $U(z)$ die ganze Periode U_1; wenn ihr Wert in α mit u bezeichnet wird, so beträgt derselbe in β nun U_1+u. In β ist das Wegelement dz positiv, in α negativ. Daher fällt auf bc für die zwei durch α und β gehenden Strecken als Teil des Integrals $\int UdZ$ der Betrag

$$\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot \frac{U_1 V_2}{2}$$

In ε hat die Function U das Vorzeichen -1; sie gewinnt daher auf dem Wege $b\eta\theta b$ die entgegengesetzte Periode $-U_1$; wenn sie in γ den Wert u' hatte, so bekommt sie in δ den Wert $-U+u'$. Auch $\frac{\partial Z}{\partial z}$ hat in γ und δ das frühere Vorzeichen i mit $-i$ vertauscht; daher fällt auf bc für die zwei Wegstrecken durch γ und δ wieder der Betrag

$$\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot \tfrac{1}{2}U_1 V_2$$

für alle vier Strecken bc der Betrag

$$\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot U_1 V_2$$

Wenn z den Weg $b\alpha\delta b$ (natürlich frei um c herum) zurück legt, so gewinnt die Function U die Periode U_2; wenn sie in ε den Wert u hatte, so bekommt sie in θ den Wert U_2+u. Weil in ε und θ für $\frac{\delta Z}{\partial z}$ das Vorzeichen -1 gilt, so entfällt

$$-\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot \tfrac{1}{2} U_2 V_1$$

als Anteil des Integrals $\int U dZ$ auf die zwei durch ε und θ geführten Strecken ab. Auf dem Wege $b\beta\gamma b$ wird U_2 von der Function U_2 gewonnen; wenn ihr Wert in η mit u' bezeichnet wird, so beträgt derselbe in ζ nur $-U_1+u'$. In beiden Punkten, ζ und η, hat $\frac{\delta Z}{\delta z}$ das zugehörige Vorzeichen 1; daher fällt auf die zwei durch η und ζ gehenden Strecken

$$-\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot \tfrac{1}{2} U_2 V_1$$

als Anteil des Integrals $\int U dZ$; für alle vier Strecken ab, somit

$$-\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot U_2 V_1$$

Also ist

$$\int U dZ \text{ (Weg in Fig. 1)} = \Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot (U_1 V_2 - U_2 V_1)$$

Wird nun der in Fig. 1. dargestellte Integrationsweg in die Ebene hinaus erweitert, so lässt sich derselbe in folgende drei geschlossene Wege zerlegen: der erste ist ein doppelter, rückläufiger Kreis um das endliche Gebiet, der also zweimal die westliche Uebergangslinie passirt; der zweite ist ein kleiner, rechtläufiger Kreis, der im ersten Blatte x umschliesst, und der dritte ein eben solcher im zweiten Blatte. Beim ersten Wege kann man nach fallenden Potenzen von z entwickeln. Der Anfangsterm von $\frac{\partial U}{\partial z}$ ist $\frac{1}{2} z^{n-\nu-3/2}$, derjenige von U also $\frac{1}{2(n+\nu)-1} z^{n-\nu-1/2}$. Die Exponenten befolgen eine arithmetische Differenz -1, wenn nicht eine allfällige Integrationsconstante A hinzutritt. Da es sich aber, wenn man den Factor $\Pi(x-a)^{1/2-\alpha}$ weg lässt, nur um das Integral $-\int \frac{U}{z-x} dU$ (Weg ein negativer, doppelter Kreis um das endliche Gebiet) handelt, und da die Exponenten in den mit dem Factor A behafteten Termen lauter ungerade Zahlen sind, so dass die bezüglichen Integrale sämtlich null werden, so ist A für den Wert des Integrals von keiner Bedeutung. Nimmt man daher $A=0$ an und erwägt, dass die Reihe für U so lange convergirt, als x absolut grösser denn c ist, so hat, wenn man vom Horizonte herkommt, U in beiden Blättern entgegengesetzte Werte und muss daher, wenn man z. B. von Osten her der Realitätslinie folgt, in c den Wert 0 annehmen. (Der allgemeine Wert in diesem Punkte ist dann $\lambda U_1 + \mu U_2$, wenn μ und λ

ganze Zahlen bedeuten.) Da nun $A = 0$ ist, so hat $\frac{1}{z-x} U \frac{\partial U}{\partial z}$ ausserhalb eines Kreises um 0, der a, b, c und x umschliesst, den Charakter einer ganzen Function von z; der zweite Umlauf gibt daher dem Integrale denselben Wert wie der erste. Lässt man z nur ein Mal in positivem Sinne umlaufen, so wird das Integral zu

$$\int \frac{1}{z-x} \cdot 2UdU = \int \left(\frac{U}{z-x}\right)^2 dz \quad \text{(Weg ein rechtläufiger Kreis um das endliche Gebiet)}$$

Der Wert ist also das $(2i\pi)$ fache des Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von

$$\left(\frac{U(z)}{z-x}\right)^2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a_\lambda z^{2(n-v)-1-\lambda} \times \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (\mu+1) \cdot \frac{x^\mu}{z^{2+\mu}}$$

wo

$$a_0 = \frac{1}{(2(n-v)-1))^2}$$

ist. Damit der Exponent von z gleich -1 werde, muss

$$\lambda + \mu = 2(n-v-1)$$

sein. Jenes Integral ist also

$$\int \left(\frac{U(z)}{z-x}\right)^2 dz \text{ (Weg ein pos. Kreis um das endliche Gebiet)}$$
$$= 2i\pi \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2(n-v-1)} (2n-2v-1-\lambda)\, a_\lambda x^{2n-2v-2-\lambda}$$

und ist eine ganze Function, deren höchster Term

$$\frac{2i\pi}{2n-2v-1} \cdot x^{2n-2v-2}$$

beträgt. Diese Function ist noch mit $\Pi(x-a)^{1+\alpha-\alpha}$ zu multipliciren, wodurch der höchste Term des Integrals $\int UdZ$ (Weg wie oben) zu

$$\frac{2i\pi}{2n-2v-1} \cdot x^{\frac{3n-1}{2}-v}$$

gemacht wird. Wir suchen den Wert des Integrals des zweiten Weges. Es ist

$\int U dZ$ (Weg ein kleiner, rechtläufiger Kreis um x im ersten Blatte)

$$= -\tfrac{1}{2}\int U(z)\Pi\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{1/2-\alpha} \times P(z)\frac{dz}{z-x} \quad \text{(Weg wie vorhin)}$$

also nach Cauchy

$$\int U dZ = -i\pi P(x)\, U(x_1)$$

Ebenso ist

$\int U dZ$ (Weg ein kleiner, pos. Kreis um x im zweiten Blatte)

$$= i\pi P(x)\,.\,U(x_2)$$

wenn für die Function $P(x)$ ihr Wert im ersten Blatte gilt. $U(x_1)$ und $U(x_2)$ bezeichnen die Werte, welche die Function $U(z)$ im Punkte x des ersten und des zweiten Blattes annimmt. Der Wert des Integrals $\int U dZ$ längs des zweiten und dritten Weges ist somit

$$-i\pi P(x)\,[U(x_1) - U(x_2)]$$

Nun ist aber

$$U(x_1) - U(x_2) = -\int d\,U(z)$$

Der Weg dieses Integrals ist eine rückläufige Schlinge, die aus dem Punkte x des zweiten Blattes um die Verzweigungspunkte a, b, c geworfen ist, die westliche Uebergangslinie durchdringt und im Punkte x des ersten Blattes endigt. Diese Schlinge zerfällt aber in eine nur die Punkte a und b einschliessende Curve, welche die östliche und westliche Uebergangslinie durchdringt, und in eine nur den Punkt b umgebende Schlinge, die allein die östliche Uebergangslinie zwischen b und c passirt. Der Wert des Integrales auf dem ersten Wege ist bekanntlich $-U_1$, und auf dem zweiten

$$\int_c^x \Pi(z-a)^{\alpha-1/2} P(z)\,dz, \quad \text{so ist}$$

$$U(x_1) - U(x_2) = \int_c^x \Pi(z-a)^{\alpha-1/2} F(z)\,dz - U_1$$

Weil

$$\Sigma(\alpha - \tfrac{1}{2}) = \frac{n}{2} - \nu - {}^3/_2$$

so ist $z^{n-\nu-3/2}$ der höchste Term in

$$\Pi(z-a)^{\alpha-1|4} \,.\, P(z)$$

folglich $\frac{2}{2n-2\nu-1} x^{n-\nu-1|2}$ der höchste in

$$U(x_1) - U(x_2)$$

und daher $\frac{-2i\pi}{2n-2\nu-1} x^{\frac{3n-1}{2}-\nu}$ der höchste in

$$-i\pi P(x)\,(U(x_1) - U(x_2))$$

und wird daher vom höchsten Terme in

$$\int U dZ \text{ (Weg ein pos. Kreis um das endliche Gebiet)}$$

aufgehoben. Da aber $W(x)$ nur die Ordnung $x^{-\frac{n+1}{2}}$ erreicht, so müssen $n-v$ Terme zerstört werden. Es ist somit

II. $W(x) = 2i\pi \times$ Coeff. von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} \times \Pi(x-a)^{1|2-\alpha} - \Big[\int_c^x \Pi(z-a)^{\alpha-1|2} \times P(z)\,dz - U\Big]_1 \,.\, i\pi P(x)$$

Diese Formel eignet sich allerdings viel weniger zur Auffindung des Coeff. von $x^{-\frac{n+1}{2}}$, als der Ausdruck I, offenbart aber sogleich, dass keine elliptischen Integrale dritter Art vorkommen. Nun soll die Function $W(x)$ für die Fälle $n = 0.\ 1,\ 2,\ 2$ mittelst der Formel II. in elliptische Integrale umgesetzt werden.

Bern, den 9. März 1888.

IX.

Zur Complanation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Coordinaten.

Von

Ferd. Jos. Obenrauch,

Professor an der L.-Oberrealschule in Brünn.

Bekanntlich hat zuerst J. Liouville [1]) in einem seiner an P. H. Blanchet gerichteten Briefe die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides durch elliptische Coordinaten dargestellt.

Liouville geht in seiner Abhandlung von dem homofocalen Flächensysteme zweiter Ordnung

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1\\ &\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1\\ &\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1 \end{aligned}\right\}$$

aus.

Unter den Voraussetzungen

$$b < c < \varrho,\quad b < \mu < c,\quad \nu > b > 0$$

1) „Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde," adressées à M. P. H. Blanchet; Paris, 29. mai 1846. S.: Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville, Tome onzième, Paris 1846, pag. 217—236.

erhalten wir eine Schaar dreiachsiger Ellipsoide mit den Halbachsen ϱ, $\sqrt{\varrho^2-b^2}$, $\sqrt{\varrho^2-c^2}$, geschnitten durch eine Schaar homofocaler oder confocaler einteiliger Hyperboloide und eine Schaar confocaler zweiteiliger Hyperboloide, von welcher die ersteren μ, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\mu^2}$, die letzteren ν, $\sqrt{b^2-\nu^2}$, $\sqrt{c^2-\nu^2}$ zu Halbachsen haben.

Dieses System confocaler Flächen zweiter Ordnung hat zuerst Lamé [1]) in seinem „Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température" im V. Bande der Mémoires présentés par divers savans à l'Académie des sciences de l'institut de France, Paris 1837 in die analytische Geometrie eingeführt und gab den veränderlichen Parametern ϱ, μ, ν, welche den Raumpunkt $M(x, y, z)$ bestimmen, den Namen elliptische Coordinaten.

Lamé gelangte in diesem Mémoire u. a. zu dem die Oberfläche eines Kugeloctanten vom Halbmesser $r = 1$ darstellenden Doppelintegral

$$(2) \qquad \int_0^b \int_b^c \frac{\nu^2-\varrho^2}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\varrho^2}\,\sqrt{c^2-\varrho^2}}\,d\nu\,d\varrho = \frac{\pi}{2}$$

$$c > b > 0$$

dessen Wert Herr Hofrath Dr. Ant. Winckler [2]) durch Specialisirung eines durch Gamma-Functionen ausgedrückten Doppelintegrales von allgemeinerer Form bestimmte.

Liouville weist auf pag. 218 seiner Abhandlung auf die von Jacobi [3]) verwendeten und für die Complanation des dreiachsigen Ellipsoides nicht so bequemen Integrationsvariabeln φ und ψ [4]) hin und gelangte auf pag. 219 zu dem Differential dw der Oberfläche des durch die Gleichung

---

1) S. a.: „Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville, tome II, Paris 1837, pag. 147—183."

2) „Allgemeine Transformation der bestimmten Doppelintegrale". Von Dr. Ant. Winckler. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, XX. Bd., vorgelegt in der Sitzung vom 7. Januar 1859.

3) „De transformatione et determinatione integralium duplicium". Crelle's Journal Bd. X, Berlin 1833, pag. 101.

4) Winkel der Normalen mit den Coordinatenachsen.

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1$$

bestimmten dreiachsigen Ellipsoides

$$dw=\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\mu\,d\nu.$$

Die Oberfläche S des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen ϱ, $\sqrt{\varrho^2-b^2}$, $\sqrt{\varrho^2-c^2}$ ist demnach dargestellt durch das Doppelintegral

(3) $$S(\varrho, \sqrt{\varrho^2-b^2}, \sqrt{\varrho^2-c^2})$$
$$=\int_b^c\int_0^b \frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\mu\,d\nu$$

Den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet die Bestimmung der Oberfläche des Octanten $S(a, b, c)$ eines dreiachsigen Ellipsoides mit Hilfe des confocalen Flächensystemes zweiter Ordnung:

(4)
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\
&\frac{x^2}{a^2-\mu^2}+\frac{y^2}{b^2-\mu^2}+\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1\\
&\frac{x^2}{a^2-\nu^2}+\frac{y^2}{b^2-\nu^2}+\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1
\end{aligned}\right\}$$

Unter den Voraussetzungen

$$a>b>c>0,\quad a>\mu>b,\quad b>\nu>c$$

erhält man ein dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c, geschnitten durch eine confocale Schaar zweiteiliger Hyperboloide mit den Halbachsen $\sqrt{a^2-\mu^2}$, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{\mu^2-c^2}$ und eine confocale Schaar einteiliger Hyperboloide mit den Halbaxen $\sqrt{a^2-\nu^2}$, $\sqrt{b^2-\nu^2}$, $\sqrt{\nu^2-c^2}$.

Durch Auflösung dieses Gleichungssystemes ergeben sich für die orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes des Ellipsoides die Werte:

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2} \\ y &= \frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_3}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2} \\ z &= \frac{c}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\nu^2-c^2} \end{aligned}\right\}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\varepsilon_1 = \sqrt{b^2-c^2},\quad \varepsilon_2 = \sqrt{a^2-c^2},\quad \varepsilon_3 = \sqrt{a^2-b^2}$$

Die Oberfläche des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides kann nun unter Benutzung des Gleichungssystemes (5) aus der allgemeinen Complanationsformel oder mit Benutzung der unter rechten Winkeln sich schneidenden Bogenelemente $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien beider Arten in elliptischen Coordinaten direct dargestellt werden.

Wählen wir die letztere Methode, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\mu} &= -\frac{a\mu}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\frac{\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{a^2-\mu^2}}, & \frac{dx}{d\nu} &= -\frac{a\nu}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{a^2-\nu^2}} \\ \frac{dy}{d\mu} &= \frac{b\mu}{\varepsilon_1\varepsilon_3}\frac{\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}, & \frac{dy}{d\nu} &= -\frac{b\nu}{\varepsilon_1\varepsilon_3}\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}} \\ \frac{dz}{d\mu} &= \frac{c\mu}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\sqrt{\nu^2-c^2}}{\sqrt{\mu^2-c^2}}, & \frac{dz}{d\nu} &= -\frac{c\nu}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}}{\sqrt{\nu^2-c^2}} \end{aligned}\right\}$$

für die Bogenelemente $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien der ersten und zweiten Art die Werte:

$$(7)\qquad \left.\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\mu^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}\,d\mu \\ d\sigma_1 &= \frac{\nu^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{a^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\nu \end{aligned}\right\}$$

folglich mit Rücksicht auf das Dupin'sche Theorem für das von den Bogenelementen $d\sigma$, $d\sigma_1$ begrenzte Flächenelement dF des Ellipsoides (a, b, c) einen, dem Liouville'schen Ausdruck analogen Ausdruck

$$dF = \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

Lassen wir μ alle Werte von b bis a und ν alle Werte von c bis b durchlaufen, so erhalten wir die Oberfläche $S(a, b, c)$ des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides dargestellt durch das Doppelintegral

(8) $S(a, b, c)$

$$= \int_b^a \int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\, d\mu\, d\nu$$

welches somit im Sinne der Complanations-Theorie als eine stereometrische Erweiterung des Lamé'schen Doppelintegrales betrachtet werden kann.

Um das vorliegende Doppelintegral, welches auch in der Form

$$(9) \int_b^a \int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\, d\mu\, d\nu$$

$$= \int_b^a \frac{\mu^4}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}\, d\mu \cdot \int_c^b \frac{\nu^2}{\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}} d\nu$$

$$- \int_b^a \frac{\mu^2}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}\, d\mu \cdot \int_c^b \frac{\nu^4}{\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\, d\nu$$

geschrieben werden kann, auf den bekannten Legendre'schen Ausdruck zu reduciren, führen wir in das erste und dritte Integral, beziehungsweise in das zweite und vierte Integral, statt μ und ν die neuen Integrationsvariabeln θ und φ mittelst der Gleichungen

$$(10) \qquad \frac{\mu^2-b^2}{a^2-\mu^2} = \operatorname{cotg}^2\theta, \quad \frac{\nu^2-c^2}{b^2-\nu^2} = \operatorname{tg}^2\varphi$$

ein, und erhalten wegen

$$d\mu = -\frac{ak^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\, d\theta, \quad k = \frac{\varepsilon_3}{a} < 1$$

$$d\nu = \frac{bk_1^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\varphi}}\, d\varphi, \quad k_1 = \frac{\varepsilon_1}{b} < 1$$

$$(11)\int_b^a\int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

$$-\frac{a^3b}{\varepsilon_2^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\theta)^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\theta}}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k_1^2\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\varphi}\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$-\frac{ab^3}{\varepsilon_2^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\theta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\theta}}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k_1^2\cos^2\varphi)^2}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\varphi}\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

wobei

$$\varkappa=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}<1,\quad \varkappa_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}<1,\quad \varkappa^2+\varkappa_1^2=1$$

Wenden wir auf die nunmehr erhaltenen einfachen Integrale die bekannten Reductionsformeln an, so gelangen wir schliesslich zu dem von Legendre [1]) durch elliptische Integrale der ersten und zweiten Art dargestellten Ausdruck

$$(12)\int_b^a\int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

$$=\frac{\pi}{4}c^2+\frac{\pi}{4}\frac{b}{\varepsilon_2}\cdot\{c^2F(k,\varphi)+\varepsilon_2^2E(k,\varphi)\}$$

wobei

$$k=\frac{a\varepsilon_1}{b\varepsilon_2}=\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$\varphi=\arcsin\frac{\varepsilon_2}{a}=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$$

Lassen wir c gegen die null convergiren, so geht der Ellipsoidoctant in einen Ellipsenquadranten über, und wir erhalten wegen

$$E(k,\varphi)=1$$

den Wert eines mit dem Lamé'schen Doppelintegral

---

1) „Exercices de calcul intégral, tome Ier, Paris 1811, pag. 191“ und „Traité des fonctions elliptiques, tome Ier, Paris 1825, pag. 357“.

$$(2)\quad \int_b^a\int_0^b \frac{\mu^2-\nu^2}{\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}}\,d\mu\,d\nu = \frac{\pi}{2}$$
$$a > b > 0$$

verwandten Doppelintegrales, nämlich

$$(13)\quad \int_b^a\int_0^b \frac{\mu\nu(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}}\,d\mu\,d\nu = \frac{\pi}{4}\,ab$$
$$a > b > 0$$

Um das vorliegende Doppelintegral (8) in das Liouville'sche Doppelintegral zu transformiren, setzen wir statt der constanten Parameter a, b, c beziehungsweise ϱ_1, $\sqrt{\varrho_1^2-b_1^2}$, $\sqrt{\varrho_1^2-c_1^2}$, wobei $\varrho_1 > c_1 > b_1$ und führen statt μ, ν die neuen Integrationsvariabeln μ_1, ν_1 mittelst der simultanen Substitution

$$(14)\quad \left.\begin{aligned} \sqrt{\varrho_1^2-\mu^2}\,\sqrt{\varrho_1^2-\nu^2} &= \mu_1\nu_1 \\ \sqrt{\mu^2-(\varrho_1^2-b_1^2)}\,\sqrt{(\varrho_1^2-b_1^2)-\nu^2} &= \sqrt{\mu_1^2-b_1^2}\,\sqrt{b_1^2-\nu_1^2} \end{aligned}\right\}$$

ein.

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen nach μ und ν liefert

$$(15)\quad \mu^2 = \varrho_1^2-\nu_1^2,\quad \nu^2 = \varrho_1^2-\mu_1^2$$

Folglich ist

$$c_1 > \mu_1 > b_1,\quad b_1 > \nu_1 > 0$$

Für die Euler'sche Functionsdeterminante

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{d\mu}{d\mu_1}, & \frac{d\mu}{d\nu_1} \\ \frac{d\nu}{d\mu_1}, & \frac{d\nu}{d\nu_1} \end{vmatrix}$$

erhalten wir wegen

$$\mu\frac{d\mu}{d\mu_1} = 0,\quad \mu\frac{d\mu}{d\nu_1} = -\nu_1,\quad \nu\frac{d\nu}{d\mu_1} = -\mu_1,\quad \nu\frac{d\nu}{d\nu_1} = 0$$

$$\Omega = \frac{\mu_1\nu_1}{\sqrt{\varrho_1^2-\mu_1^2}\,\sqrt{\varrho_1^2-\nu_1^2}}$$

Die Oberfläche des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen ϱ_1, $\sqrt{\varrho_1^2-b_1^2}$, $\sqrt{\varrho_1^2-c_1^2}$, beziehungsweise ϱ, $\sqrt{\varrho^2-b^2}$,

$\sqrt{\varrho^2-c^2}$, ist somit dargestellt durch das zuerst von Liouville angegebene Doppelintegral

$$(16)\quad S(\varrho, \sqrt{\varrho^2-b^2}, \sqrt{\varrho^2-c^2}) = -\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\, d\mu\, d\nu$$

welches in einfache Integrale zerlegt, die Gleichung liefert

$$(17)\quad S(\varrho, \sqrt{\varrho^2-b^2}, \sqrt{\varrho^2-c^2}) = -\int_0^b \frac{\mu^2\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\, d\mu \cdot \int_b^c \frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\, d\nu$$

$$-\int_0^b \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\, d\mu \cdot \int_b^c \frac{\nu^2\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\, d\nu$$

wobei

$$c > \mu > b, \quad b > \nu > 0 \quad \text{ist.}$$

Führen wir in das vorliegende Doppelintegral (8) statt μ und ν die neuen Integrationsvariabeln u und v mittelst der Gleichungen

$$\mu^2 = u, \quad \nu^2 = v$$

ein und ersetzen die neuen Grenzenpaare b^2, a^2; c^2, b^2 durch b, a; c, b, so erhalten wir für die Oberfläche des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbaxen $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ den Ausdruck

$$(18)\quad S(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) = \tfrac{1}{4}\int_b^a \int_c^b \frac{(u-v)\sqrt{uv}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}\, dv\, dv$$

Zerlegen wir das letzte Doppelintegral in seine einfachen Integrale, so erhalten wir für die Oberfläche eines Octanten des dreiachsigen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

den Ausdruck

(19) $S(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$

$$= \tfrac{1}{4}\int_b^a \frac{u\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}\,du \cdot \int_c^b \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}\,dv$$

$$- \tfrac{1}{4}\int_b^a \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}\,du \cdot \int_c^b \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}\,dv$$

welchen K. H. Schellbach in seiner „Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen“Berlin 1864, pag. 310—315“ auf anderem Wege, jedoch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen gefunden hat.

Schellbach geht nämlich bei Bestimmung der Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ von der bekannten Complanationsformel

$$dS = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,du\,dv$$

aus, wobei X, Y, Z die Determinanten der partiellen Differentialquotienten

$$X = \begin{vmatrix} \frac{dy}{du}, & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} \frac{dz}{du}, & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dx}{dv} \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du}, & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du}, & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$

sind, und führt als neue Integrationsvariabele die variabelen Parameter u, v des Flächensystems zweiter Ordnung

(20)
$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &= 1 \\ \frac{x^2}{a(a-u)} + \frac{y^2}{b(b-u)} + \frac{z^2}{c(c-u)} &= 0 \\ \frac{x^2}{a(a-v)} + \frac{y^2}{b(b-v)} + \frac{z^2}{c(c-v)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ein, und gelangt unter den Voraussetzungen

$$a > b > c, \quad a > u > b, \quad b > v > c$$

zu folgendem Ausdruck

$$(21)\quad O = \int_c^b \frac{2v\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}dv \cdot \int_b^a \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}du$$
$$-\int_c^b \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}dv \cdot \int_b^a \frac{u\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}du$$

durch welchen in seinem Werke auf pag. 315 die Oberfläche des ganzen Ellipsoides ausgedrückt erscheint.

Von der Richtigkeit des die Oberfläche eines Ellipsoidoctanten ($\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$) darstellenden Doppelintegrales (19) kann man sich auch mit Hilfe des Dupin'schen Theoremes überzeugen, wenn man das Flächenelement der Krümmungslinien, welche durch den Schnitt der beiden Strahlenflächen

$$(20)\quad \left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a(a-u)} + \frac{y^2}{b(b-u)} + \frac{z^2}{c(c-u)} &= 0 \\ \frac{x^2}{a(a-v)} + \frac{y^2}{b(b-v)} + \frac{z^2}{c(c-v)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

mit dem dreiachsigen Ellipsoide

$$(20)\quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

entstehen, direct ableitet.

Durch Auflösnng des letzten Gleichungssystemes (20) erhalten wir

$$(22)\quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{a-u}\sqrt{a-v}}{\sqrt{a-b}\sqrt{a-c}}\sqrt{a} \\ y &= \frac{\sqrt{u-b}\sqrt{b-v}}{\sqrt{a-b}\sqrt{b-c}}\sqrt{b} \\ z &= \frac{\sqrt{u-c}\sqrt{v-c}}{\sqrt{a-c}\sqrt{b-c}}\sqrt{c} \end{aligned}\right\}$$

und für die Bogenelemente $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien der ersten und zweiten Art

$$d\sigma = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{u-v}\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}du$$

$$d\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{u-v}\,\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,dv$$

Das von den Bogenelementen $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien begrenzte Flächenelement dF des Ellipsoides $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ ist somit bestimmt durch die Gleichung

$$dF = \tfrac{1}{4}\,\frac{(u-v)\sqrt{uv}}{\sqrt{a-u}\,\sqrt{u-b}\,\sqrt{u-c}\,\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,du\,dv$$

Lassen wir u alle Werte von b bis a und v alle Werte von c bis b durchlaufen, so durchläuft die Doppelschaar der Krümmungslinien sämtliche Punkte des Ellipsoidoctanten, dessen Oberfläche somit durch das Doppelintegral

(18) $S(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$

$$= \tfrac{1}{4}\int_b^a\int_c^b \frac{(u-v)\sqrt{uv}}{\sqrt{a-u}\,\sqrt{u-b}\,\sqrt{u-c}\,\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,du\,dv$$

ausgedrückt erscheint.

Um von den Lamé'schen Coordinaten auf elliptische Coordinaten in trigonometrischer Form überzugehen, führen wir in das vorliegende Doppelintegral (8) die neuen Integrationsvariabeln ϑ, φ mittelst des simultanen Gleichungssystemes

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2} &= \varepsilon_2\varepsilon_3 \sin\vartheta\,\sqrt{1-\varkappa_1\sin^2\varphi} \\ \sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2} &= \varepsilon_1\varepsilon_2 \cos\vartheta\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ein, wobei

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}, \quad \varkappa_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \varkappa^2 + \varkappa_1{}^2 = 1$$

und erhalten den von F. Joachimsthal [1]) gefundenen Ausdruck

(25)

$$\int_b^a\int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

---

1) S: F. Joachimsthal: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1872, pag. 127". (III. Auflage. Leipzig 1890, pag. 149).

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}\ \sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}\ \sqrt{1-\varkappa_1{}^2\sin^2\varphi}}$$

$$\times (x^2\cos^2\vartheta + x_1{}^2\sin^2\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$$

Setzen wir

$$\lambda^2 = \frac{\mu^4\nu^4(\mu^2-\nu^2)^2}{(a^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)(a^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)(\nu^2-c^2)} \tag{26}$$

und betrachten wir in geometrischer Auffassung u. zw. im Sinne der Cubaturen-Theorie die Werte der elliptischen Coordinaten als orthogonale Coordinaten, so drückt das vorliegende Doppelintegral (8) das Volumen eines Körpers aus, welcher von den Ebenen $\lambda = 0$, $\mu = a$, $\mu = b$, $\nu = b$, $\nu = c$ und von der Fläche (26) der vierzehnten Ordnung begrenzt wird. Die das Volumen begrenzende krumme Fläche hat acht reelle Asymptotenebenen, davon vier an den Grenzen des Integrationsgebietes. Vier reelle und vier imaginäre Asymptotenebenen liegen ausserhalb des Integrationsgebietes.

Wird $c = 0$, so geht das Doppelintegral (8) in das Doppelintegral (13) über. Die zu diesem Doppelintegral zugehörige Fläche

$$\lambda^2 = \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)^2}{(a-\mu^2)(\mu^2-b^2)(a^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)} \tag{27}$$

ist eine Fläche der zehnten Ordnung und hat sechs reelle Asymptotenebenen, davon vier an den Grenzen des Integrationsgebietes. Zwei reelle und zwei imaginäre Asymptotenebenen liegen ausserhalb der Grenzen des Integrationsgebietes. Das Volumen des zu diesem Doppelintegral gehörigen Körpers ist gleich dem vierten Teil des Volumens eines elliptischen Cylinders, welcher das Ellipsoid (a, b, c) längs des Hauptschnittes (a, b) berührt und die Masseinheit zur Höhe hat.

Zum Schlusse können wir mit Rücksicht auf die Untersuchungen von Tortolini [1]) und Roberts [2]) nicht unerwähnt lassen, dass das

---

1) „Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie, curve e cubature de solidi, dal D. B. Tortolini". Crelle's Journal, 1846, Bd. XXXI, pag. 12—39.

2) „Note sur l'évaluation de l'aire de la surface nommée dans l'optique surface d'élasticité, par William Roberts". Journal de math. 1846, t. XI, pag. 81—86.

vorliegende Doppelintegral (8), sowie alle mit demselben geometrisch verwandten, d. h. die Oberfläche eines Ellipsoidoctanten mit den Halbachssen a, b, c darstellenden Doppelintegrale gleichzeitig die Oberfläche eines Octanten der zu dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{(\sqrt{bc})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{ac})^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{ab})^2}=1 \tag{28}$$

gehörigen Fusspunktfläche vierter Ordnung

$$(x^2+y^2+z^2)^2=bcx^2+acy^2+abz^2 \tag{29}$$

mit dem Coordinatenursprung als Projectionscentrum darstellen. Diese Fusspunktfläche zog zuerst Fresnel[1]) bei seinen Untersuchungen über die doppelte Strahlenbrechung in den Kreis seiner analytischen Forschungen und gab ihr den Namen Elasticitätsfläche (la surface d'élasticité).

1) „Mémoire sur la double réfraction. I, II". Paris 1821. (Recueil des savants étrangers.)

X.

Osculirende Parabel.

Von

R. Hoppe.

Ein Punkt P einer Curve s sei Anfang der Coordinaten x, y, z eines variabeln Curvenpunkts in Bezug auf Axen von beliebiger fester Richtung und zugleich Anfang der Coordinaten u, u_1 eines variabeln Punkts auf einer Parabel in den Richtungen ihrer Axe Scheiteltangente, überdies $u = m$ und $u_1 = n$ die ihres Scheitels. Die Gleichung der Parabel ist also:

$$(n + u_1)^2 = 2p(m + u) \tag{1}$$

Es sollen nun die Constanten m, n, p und die Lage der Parabel so bestimmt werden, dass die Punkte (uu_1) und (xyz) nebst ihren unendlich kleinen Verrückungen bis auf die zur Bestimmung hinreichende Ordnung bei Verschwinden einer gemeinsamen Unabhängigen zusammenfallen.

Die Wahl der Unabhängigen, als deren gleichzeitig verschwindende Functionen die 5 Coordinaten zu denken sind, hat wie leicht erhellt, auf das Resultat keinen Einfluss; doch eignet sich hinsichtlich der Einfachheit der Rechnung keine besser als der Krümmungswinkel der Curve, weil durch dessen Annahme alle Differentiation von Brüchen vermieden wird. Die Differentiation nach demselben sei durch Striche bezeichnet.

Den Fall einer ebenen Curve, weil er immer der Hauptfall bleibt, wollen wir getrennt behandeln.

§ 1. Osculirende Parabel einer ebenen Curve.

Da mit x, y, z gleichzeitig u, u_1 verschwinden sollen, so verlangt Gl. (1) allgemein, dass

$$a^2 = 2pm \tag{2}$$

sei. Für ebene Curven ($z = 0$) seien die Coordinatenrelationen:

$$\left.\begin{aligned} u &= x\cos\mu - y\sin\mu \\ u_1 &= x\sin\mu + y\cos\mu \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Bezeichnet τ den Krümmungswinkel beginnend in der x Axe, so hat man:

$$x' = s'\cos\tau; \quad y' = s'\sin\tau \tag{4}$$

woraus nach Gl. (3):

$$u' = s'\cos(\tau+\mu); \quad u_1' = s'\sin(\tau+\mu) \tag{5}$$

Differentiirt man hiernach Gl. (1) 3 mal und setzt in allen 3 Gleichungen dann $u_1 = 0$, so erhält man:

$$n\sin(\tau+\mu) - p\cos(\tau+\mu) = 0 \tag{6}$$

$$n\cos(\tau+\mu) + p\sin(\tau+\mu) + s'\sin^2(\tau+\mu) = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} -n\sin(\tau+\mu) + p\cos(\tau+\mu) + 3s'\sin(\tau+\mu)\cos(\tau+\mu) \\ + s''\sin^2(\tau+\mu) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Die beiden ersten Gleichungen geben:

$$n = -s'\sin^2(\tau+\mu)\cos(\tau+\mu); \quad p = -s'\sin^3(\tau+\mu) \tag{9}$$

die erste und dritte:

$$\operatorname{tg}(\tau+\mu) = -\frac{3s'}{s''} \tag{10}$$

und nach Gl. (2) wird dann:

$$m = -\tfrac{1}{2}s'\sin(\tau+\mu)\cos^2(\tau+\mu) \tag{11}$$

nach Gl. (4) in Verbindung mit (10):

$$\tau = \operatorname{arc\,tg}\frac{\partial y}{\partial x}; \quad \mu = -\operatorname{arc\,tg}\frac{3s'}{s''} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{12}$$

Nachdem jetzt $\tau+\mu$ durch Gl. (10) bekannt ist, wird die Parabel absolut durch die zweite Gl. (9), ihr Scheitel durch Gl. (11) und

(9) und ihre Axenrichtung durch Gleichung (12) gemäss Gl. (3) bestimmt. Die Gleichung der Parabelaxe ist $u_1 = \text{const}$, für den Scheitel aber $u_1 = n$, folglich allgemein:

$$x \sin\mu + y \cos\mu = n \tag{13}$$

Um den Brennpunkt zu bestimmen, ist zu dieser Gleichung hinzuzufügen:

$$u = x \cos\mu - y \sin\mu = m + \tfrac{1}{2}p$$

woraus als Coordinaten desselben hervorgehen:

$$\left.\begin{aligned} x &= (m + \tfrac{1}{2}p)\cos\mu + n \sin\mu \\ y &= -(m + \tfrac{1}{2}p)\sin\mu + n\cos\mu \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Um alle Bestimmungen auf einen beliebigen Coordinatenanfang zu übertragen, sind nur zu x, y die Coordinaten von P zu addiren.

§ 2. Osculirende Parabel einer Raumcurve.

Die Relationen der Coordinaten seien:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\,x + B\,y + C\,z \\ u_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z \\ u_2 &= A_2 x + B_2 y + C_2 z \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo bzhw. die Parabelaxe, die Scheiteltangente und die Normale der Parabelfläche die Richtungen der Axen der u, u_1, u_2 haben. Sind ferner $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale von s und

$$\left.\begin{aligned} a &= A\,\alpha + B\,\beta + C\,\gamma; \quad b = A\,\alpha_1 + B\,\beta_1 + C\,\gamma_1 \quad \text{etc.} \\ a_1 &= A_1\alpha + B_1\beta + C_1\beta; \quad b_1 = A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 \quad \text{etc.} \\ a_2 &= A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma; \quad b_2 = A_2\alpha_1 + B_2\beta_1 + C_2\gamma_1 \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

die Richtungscosinus der Axe, Scheiteltangente und Normale gegen die Fundamentalaxen der Curve s, so ist

$$\left.\begin{aligned} u' &= s'a\,; \quad a' = b\,; \quad b' = c\,\vartheta' - a\,; \quad c' = -b\,\vartheta' \\ u_1' &= s'a_1; \quad a_1' = b_1; \quad b_1' = c_1\vartheta' - a_1; \quad c_1' = -b_1\vartheta' \\ u_2' &= s'a_2; \quad a_2' = b_2; \quad b_2' = c_2\vartheta' - a_2; \quad c_2' = -b_2\vartheta' \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wo ϑ' das Krümmungsverhältniss (d. h. Torsion dividirt durch Krümmung) bezeichnet. Differentiirt man nach diesen Formeln Gl. (1) 4 mal und setzt in allen 4 Gleichungen $u_1 = 0$, so erhält man:

$$n a_1 - p a = 0 \tag{17}$$

$$n b_1 - p b + s' a_1^2 = 0 \tag{18}$$

$$n(c_1\vartheta' - a_1) - p(c\vartheta' - a) + 3s' a_1 b_1 + s'' a_1^2 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &n[c_1\vartheta'' - b_1(\vartheta'^2+1)] - p[e\vartheta'' - b(\vartheta'^2+1)] \\ &\quad + s'[4a_1(c_1\vartheta' - a_1) + 3b_1^2] + 5s'' a_1 b_1 + s''' a_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Die Gl. (17) (18) geben:

$$n c_2 = -s' a_1^2 a; \quad p c_2 = -s' a_1^3 \tag{21}$$

und die Gl. (19) (20) werden nach Einführung dieser Werte:

$$\vartheta' a_1 \frac{b_2}{c_2} + 3b_1 + \frac{s''}{s'} a_1 = 0 \tag{22}$$

$$\vartheta'' a_1^2 \frac{b^2}{c^2} + \left(\vartheta'^2 - 3 + \frac{s'''}{s'}\right) a_1^2 + 4a_1 c_1 \vartheta' + 3b_1^2 + 5\frac{s''}{s'} a_1 b_1 = 0$$

Da aber die Parabelebene durch die Tangente von s gehen muss, so hat man $a_2 = 0$, und das Orthogonalcoefficientensystem hat die Form:

$$\left.\begin{array}{lll} a = -\sin\varphi & b = \cos\varphi\cos\psi & c = \cos\varphi\sin\psi \\ a_1 = \cos\varphi & b_1 = \sin\varphi\cos\psi & c_1 = \sin\varphi\sin\psi \\ a_2 = 0 & b_2 = \sin\psi & c_2 = -\cos\psi \end{array}\right\} \tag{23}$$

so dass die Gl. (22) lauten:

$$3\operatorname{tg}\varphi\cos\psi = \vartheta'\operatorname{tg}\psi - \frac{s''}{s'} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\vartheta'^2 - 3 + \frac{s'''}{s'} - \vartheta''\operatorname{tg}\psi + \left(4\vartheta'\operatorname{tg}\psi + 5\frac{s''}{s'}\right)\operatorname{tg}\varphi\cos\psi \\ &\quad + 3(\operatorname{tg}\varphi\cos\psi)^2 = 0 \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von φ:

$$5\vartheta'^2\operatorname{tg}^2\psi - \left(3\vartheta'' + \vartheta'\frac{s''}{s'}\right)\operatorname{tg}\psi + 3\vartheta'^2 - 9 - 4\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 + 3\frac{s'''}{s'} = 0$$

und nach Auflösung:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{10\vartheta'}\left(3\frac{\vartheta''}{\vartheta'} + \frac{s''}{s'} \pm \sqrt{\Theta}\right) \tag{25}$$

$$\Theta = 9\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\right)^2 + 6\frac{s''}{s'}\frac{\vartheta''}{\vartheta'} + 81\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 + 120 - 60\vartheta'^2 - 60\frac{s'''}{s'}$$

Ist hiernach ψ, dann nach Gl. (24) φ berechnet, so erhält man nach Gl. (21) und (2):

$$m = s'\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{2\cos\psi}; \quad n = -s'\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{\cos\psi} \tag{26}$$

$$p = s'\frac{\cos^3\varphi}{\cos\psi} \tag{27}$$

und hiermit die Parabel nebst ihrer Lage relativ zum Fundamentalaxensystem von s. Die Coefficienten A, B . . . erhält man aus den Gl. (16), nachdem a, b, . . . nach Gl. (23) in φ, ψ ausgedrückt sind.

§ 3. Beispiele.

I. Die Curve s sei die Cykloide

$$x = -x_0 + h(1 - \cos\omega); \quad y = -y_0 + h(\omega - \sin\omega)$$

Ihre Gleichungen geben differentiirt:

$$x' = s'\cos\tau = h\,\omega'\sin\omega$$

$$y' = s'\sin\tau = h\,\omega'(1 - \cos\omega)$$

woraus:

$$s' = 2h\,\omega'\sin\frac{\omega}{2}; \quad \tau = \frac{\omega}{2}$$

also

$$\omega' = 2; \quad s' = 4h\sin\frac{\omega}{2}; \quad s'' = 4h\cos\frac{\omega}{2}$$

Daher ist nach Gl. (10)

$$\operatorname{tg}[\tau + \mu] = -3\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

und nun nach Gl. (9) (11)

$$p = \frac{108h}{N^3}\sin^4\frac{\omega}{2}$$

$$m = \frac{6h}{N^3}\sin^2\frac{\omega}{2}\cos^2\frac{\omega}{2}; \quad n = -\frac{36h}{N^3}\sin^3\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}$$

wo zur Abkürzung

$$N = \sqrt{1+8\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

gesetzt ist. Im Rückkehrpunkt verschwinden p, m, n und τ, die Parabel degenerirt in ihre Axe. Im Scheitel verschwinden m und n, Scheitel und Scheiteltangente von Parabel und Cykloide fallen zusammen, und es wird

$$p = 4h$$

gleich dem Krümmungsradius.

Nach Gl. (12) wird

$$\mu = -\operatorname{arctg}\left(3\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\omega}{2} = \operatorname{arctg}\frac{2\sin\omega}{1-2\cos\omega}$$

II. Die Curve s sei die Kreisevolvente

$$x = -x_0 + r(\cos\omega + \omega\sin\omega)$$
$$y = -y_0 + r(\sin\omega - \omega\cos\omega)$$

woraus durch Differentiation:

$$s'\cos\tau = r\,\omega\omega'\cos\omega; \quad s'\sin\tau = r\,\omega\omega'\sin\omega$$

also:

$$s' = r\omega\omega'; \quad \tau = \omega; \quad \omega' = 1$$

mithin:

$$s + s_0 = \tfrac{1}{2}r\omega^2; \quad s' = r\omega; \quad s'' = r$$

daher nach Gl. (10):

$$\operatorname{tg}(\tau+\mu) = -3\omega$$

Jetzt hat man:

$$p = \frac{27r\omega^4}{N^3}; \quad m = \frac{3r\omega^2}{2N^3}; \quad n = \frac{9r\omega^4}{N^3}; \quad N = \sqrt{1+9\omega^2}$$

$$\mu = -\operatorname{arctg}(3\omega) - \omega$$

III. Die Curve s sei die Schraubenlinie

$$x = -x_0 + r\cos\omega; \quad y = -y_0 + r\sin\omega; \quad z = -z_0 + r\,\omega\operatorname{tg}\lambda$$

dann sind der Krümmungs- und Torsionswinkel:

$$\tau = \omega \cos\lambda; \quad \vartheta = \omega \sin\lambda$$

der Krümmungsradius:

$$s' = \frac{r}{\cos^2\lambda}$$

woraus:

$$\vartheta' = \operatorname{tg}\lambda; \quad \vartheta'' = 0; \quad s'' = 0$$

und nach Gl. (25):

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{3\cot^2\lambda - 1}; \quad \cos\psi = \sqrt{\frac{5}{9\cot^2\lambda + 2}} \tag{28}$$

und nach Gl. (24):

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{3 - \operatorname{tg}^2\lambda}{75}}\sqrt{9\cot^2\lambda + 2}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{75}{27\cot^2\lambda + 72 - 2\operatorname{tg}^2\lambda}}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$L^2 = -3 - \operatorname{tg}^2\lambda; \quad M^2 = 9 + 2\operatorname{tg}^2\lambda; \quad N^2 = 27 + 72\operatorname{tg}^2\lambda - 2\operatorname{tg}^4\lambda$$

so wird

$$p = \frac{75\sqrt{15} \cdot r M \operatorname{tg}^2\lambda}{N^3 \cos^2\lambda}$$

$$m = \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{r L^2 M^3}{N^3 \cos^2\lambda}; \quad n = -15\sqrt{3}\frac{L M^2 \operatorname{tg}\lambda}{N^3 \cos^2\lambda}$$

Aus Gl. (28) ist zu ersehen, dass ψ imaginär wird für $\lambda > \frac{2}{3}R$, Eine steilere Schraubenlinie wird also von keiner Parabel osculirt.

Im Grenzfalle, wo

$$\cos\lambda = \tfrac{1}{2}; \quad \sin\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

ist, wird $\varphi = 0$; $\psi = 0$, die Scheiteltangente der Parabel fällt mit der Tangente, die Normale ihrer Ebene mit der Hauptnormale und die Parabelaxe mit der Binormale von s (letztere in umgekehrter Richtung) zusammen. Ferner ist

$$L = 0; \quad M = \sqrt{15}; \quad N = 15$$

$$p = 2r; \quad m = 0; \quad n = 0$$

§ 4. Specielles über die Bewegung der osculirenden Parabel einer ebenen Curve.

Im Vorhergehenden ist die osculirende Parabel nur relativ zu einem Punkte der Curve bestimmt worden. Will man sie als fortrückend mit ihrem Berührungspunkte auffassen, so muss man zu ihrer Bestimmung durch ein festes Coordinatensystems übergehen. Dazu ist indes nichts weiter nötig als 1) in den Coordinatenrelationen (3) (15) für x, y, z zu setzen x_0+x, y_0+y, z_0+z, wo x_0, y_0, z_0 als Coordinaten des Berührungspunkts die Gleichungen der Curve zu erfüllen haben, also gegebene Functionen einer Unabhängigen sind, während x, y, z durch die Lösung des Problems bestimmt werden, 2) die Richtungswinkel der Fundamentalaxen der Curve, also τ, α, β, γ nicht mehr einem Punkte (xyz), sondern dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ entsprechend darzustellen, weil nämlich $\partial(x_0+x)$ für $x=$ const mit nachfolgendem $x=0$ gleich ∂x_0 ist, wenn nur x_0 und x_0+x der Curve entsprechen.

Im übrigen bleiben alle Formeln in unveränderter Geltung und drücken nach Vollzug der 2 genannten Aenderungen den Ort der osculirenden Parabel sowie die Orte des Scheitels und Brennpunkts aus.

Man kann nun das Problem umkehren und aus irgend welchen Bestimmungen der osculirenden Parabel auf die der osculirten Curve zu schliessen versuchen. Beim Krümmungskreise einer ebenen Curve ist der Radius als Function des Bogens ausreichend zur Bestimmung der Curve; der Parameter der Parabel ist es nicht, es müssen 2 Stücke gegeben sein. Lässt man deren Beziehung allgemein, so sind die Integrationen nicht ausführbar.

Bemerkenswert ist der Fall, wo μ lineare Function von τ ist. Sei

$$\mu = \varepsilon\tau+\zeta$$

dann gibt die Integration von Gl. (10):

$$\sin(\tau+\mu) = k s^{-\frac{1+\varepsilon}{3}} \qquad (k \text{ const}) \tag{28}$$

woraus nach Einführung in Gl. (9):

$$p = k^3 s^{1-\varepsilon} \tag{29}$$

Diese Gleichung zeigt, dass p und μ nur gleichzeitig constant sein können.

Aus Gl. (28) gehen ferner sogleich die Gleichungen der Curve hervor:

$$x = k^{\frac{3}{1+\varepsilon}} \int \{-\sin(\tau+\mu)\}^{-\frac{3}{1+\varepsilon}} \cos\tau\, \partial\tau$$

$$y = k^{\frac{3}{1+\varepsilon}} \int \{-\sin(\tau+\mu)\}^{-\frac{3}{1+\varepsilon}} \sin\tau\, \partial\tau$$

beispielsweise für $\varepsilon = 2$; $\tau + \frac{1}{3}\zeta = \varphi$:

$$x\cos\tfrac{1}{3}\zeta - y\sin\tfrac{1}{3}\zeta = \tfrac{1}{6}\log\{\sin^2 3\varphi(3-4\sin^2\varphi)^3\}$$

$$x\sin\tfrac{1}{3}\zeta + y\cos\tfrac{1}{3}\zeta = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi}$$

XI.

Teilung eines beliebigen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile mit Hülfe von Modellen.

Von

Arthur Strauss,

Lehrer der Mathematik am Realprogymnasium zu Schwelm.

Vorwort.

Um die hier in Frage kommenden Constructionen auszuführen, habe ich mich nicht auf die sonst üblichen Hülfsmittel beschränken können.

Es liegt da die Frage sehr nahe: Ist denn die Zahl der Instrumente, deren wir uns beim mathematischen Zeichnen bedienen dürfen, eine unbegrenzte oder haben wir nur eine beschränkte Auswahl? —

Die Antwort hierauf ergiebt sich von selbst, wenn wir die Bedeutung der Hülfsmittel in's Auge fassen.

Wir wissen: jede Kante des Lineals stellt eine gerade Linie vor, die wir uns theoretisch construirt denken, etwa indem wir eine beliebige Linie zwischen zwei Punkten ausspannten.

Ferner betrachten wir die Fläche des Papiers, auf der wir planimetrische Constructionen ausführen, als eine Ebene, die in

unserer Vorstellung vielleicht in der Weise construirt worden ist, dass wir über zwei sich schneidende gerade Linien eine dritte gleiten liessen.

Wir sehen also: wir haben es in beiden Fällen mit — mehr oder weniger unvollkommenen — Darstellungen mathematisch construirter Gebilde zu tun und benutzen dieselben als bereits ausgeführte Hülfsconstructionen. Mit demselben Rechte werden wir natürlich das Modell einer jeden mathematischen Zeichnung als Hülfsmittel anwenden dürfen.

So erforderten die Constructionen, die hier behandelt werden sollen, zunächst die Anwendung des Modells eines rechten Winkels.

Die Benutzung eines Winkelmasses beim mathematischen Zeichnen ist ja eigentlich nichts neues. Während man sich jedoch bisher dieses Instrumentes nur der Bequemlichkeit wegen bediente und ihm, ich möchte sagen, eine geringere mathematische Wertigkeit als etwa dem Lineal zumass, so ist dasselbe, wie ich schon bemerkte, für die hier auszuführenden Zeichnungen unbedingt notwendig und nach obigen Bemerkungen auch genau von derselben mathematischen Wertigkeit wie das Lineal.

Das Winkelmass setzt uns zunächst in den Stand, eine Curve zu construiren, die uns unmittelbar die Dreiteilung eines beliebigen Winkels ergiebt. Das Modell dieser Curve kann ich dann wieder benutzen, um eine zweite Curve für die Fünfteilung, das der zweiten, um eine dritte für die Siebenteilung zu construieren u. s w. Mit Hülfe der ungeraden und der Zweiteilung ist es mir nunmehr möglich, jeden beliebigen Winkel in eine beliebige Zahl gleicher Teile zu teilen.

Aus dem Gesagten geht allerdings hervor, dass wir es hier mit ziemlich umständlichen Constructionen zu tun haben. Es ist jedoch zu bedenken, dass die angedeuteten Schwierigkeiten der Mechaniker bei der Construction der Curvenmodelle zu überwinden hat, ähnlich wie bei der Herstellung des Lineals.

Ist uns ein Curvenmodell gegeben, so lässt sich, wie wir unten sehen werden, die entsprechende Teilung mit der grössten Leichtigkeit ausführen.

Der Winkelteiler.

Die wesentlichsten Bestandteile des Instruments, welches ich hier anwende, sind das Lineal l (Fig. I) und das Winkelmass w. TNL ist ein rechter Winkel. Der Punkt M liegt auf der Verlängerung des Schenkels LN, und zwar ist $LN = NM$. Der kurze Schenkel bei M dient dazu, diesen Punkt als Ecke festzulegen. Ausserdem befindet sich bei M eine Feder p. Fig. II stellt einen verticalen Durchschnitt dieser Feder dar. In die nach oben spitz zulaufende Vertiefung K ragt der an beiden Enden zugespitzte und sonst vollständig frei bewegliche Bleistift b mit der oberen Spitze hinein, so dass die Feder die untere Spitze des Bleistifts genau in die den Punkt M bildende Ecke drückt. Ein kleiner Längsstab s, etwas niedriger als das Lineal l, ist mit diesem durch einen Querstab q, welcher mit den Schrauben n fest an das Lineal angeschroben ist, in der Weise verbunden, dass zwei Stifte von s in zwei entsprechende Oeffnungen o des Querstabes q lose hineinragen. Wir sind also im Stande, die untere Fläche des Lineals l unabhängig von dem Längsstab s in der Ebene festzulegen. An s befindet sich eine Feder f, welche den Schenkel TN des rechten Winkels TNL gegen den Endpunkt B der Geraden BA (Kante des Lineals) drückt. Der Ausschnitt a am Winkelmass ist für den Finger bestimmt, mit dem der Zeichner das Winkelmass in der Richtung von A nach B fortzuschieben und dabei den Punkt L gegen AB zu drücken hat. Das Nähere betreffs der Anwendung des beschriebenen Instruments lehrt die nachfolgende Ausführung.

I. Die Dreiteilung.

Analysis.

Angenommen, der Winkel ABC (Fig. III) sei durch die Geraden BD und BC in drei gleiche Teile geteilt. Wir nehmen eine beliebige Strecke in den Zirkel und schlagen um B einen Bogen. Dieser schneide die Linien BA, BD, BE und BC bzhw. in den Punkten F, G, H, J. Wir ziehen nun die Sehnen FG und GH und fällen von B auf FG das Lot; der Fusspunkt desselben heisse K. Es sei

$$FK = m$$

dann ist

$$FG = GH = 2m$$

Es sei ferner Winkel TNL ein rechter und

$$LN = NM = m$$

Den rechten Winkel lassen wir sich so in der Ebene in der Richtung von A nach B fortbewegen, dass L fortwährend auf BA verbleibt, und der Schenkel TN beständig durch B geht. Dann beschreibt der Punkt M eine Curve MP, die durch G hindurchgeht. Nehmen wir ferner an, der Winkel ABC sei durch die Linie BQ halbirt und RS eine Parallele zu BQ im Abstande m. Dann geht auch diese Parallele durch den Punkt G, da der Abstand des Punktes G von BQ gleich

$$GV = m$$

ist. Es fällt mithin der Punkt G mit dem Schnittpunkte der Curve MP und der geraden Linie RS zusammen Diese Betrachtung ergiebt uns folgende

Construction.

Wir legen die unteren Flächen des Lineals und des Winkelmasses in der Ebene des Papiers so fest, wie es die Figur I darstellt, d. h. so, dass L auf BA und B auf TN zu liegen kommt.

Dann marquiren wir die Richtungen BA, TN und LN (Fig. IV) und bewegen den rechten Winkel TNL in der Richtung von A nach B so fort, dass die Punkte L und B bzhw. auf BA und TN verbleiben. Es beschreibt alsdann Punkt M (d. h. die Spitze des Bleistifts) eine Curve M_1P_1, die wir die Teilcurve I. Ord: nennen wollen. Wir verlängern nun die den Richtungen nach marquirten Linien BA, TN und LN, bis sie sich schneiden, und erhalten so den festen Punkt B und die der Länge nach constante Linie

$$LN = m$$

B heisse der Scheitel, BL die Basis und

$$LN = m$$

die Amplitude der Curve M_1P_1. Wir tragen jetzt an BA in B den gegebenen Winkel

$$\beta = ABC$$

an und halbiren denselben. Zu der Halbirungslinie ziehen wir im Abstande m die Parallele RS, für die wir die Bezeichnung „Bestimmungsgerade" einführen wollen. Wir verbinden den Schnittpunkt G der Bestimmungsgeraden RS und der Curve M_1P_1 mit B durch eine

Gerade und schlagen mit der Zirkelöffnung BG um B einen Kreisbogen, der die Schenkel BA und BC des Winkels ABC bzhw. in den Punkten F und J schneide. Es ist dann die zu FG gehörige Sehne gleich der doppelten Amplitude $2m$. Tragen wir nun von G aus den Bogen FG bis H ab und ziehen die Gerade BH, so ist der Winkel

$$\beta = ABC$$

durch BG und BH in 3 gleiche Teile geteilt.

Der Beweis ergiebt sich aus der Analysis.

II. Die Fünfteilung.

Es wird in diesem Falle das Lineal l des Winkelteilers (Fig. I) durch das Modell der Teilcurve I. Ord. (Fig. IV) ersetzt. Wir legen zuerst in der Ebene des Papiers die Basisrichtung BL_1 und den Scheitel B der Teilcurve I. Ord., letzteren als Schnittpunkt der Geraden P_1B und L_1B_1 fest und lassen dann den rechten Winkel des Winkelteilers sich in der Ebene so fortbewegen, dass der eine Schenkel wieder beständig durch B (Fig. IV) geht, der Endpunkt L der Amplitude LN aber fortwährend auf der Curve M_1P_1 verbleibt. Während dann L den Weg M_1P_1 zurücklegt, beschreibt der Punkt M des Winkelteilers die Curve M_2P_2. Es sei dies die Teilcurve II. Ord. Wir tragen nun an BA im Punkte B den gegebenen Winkel

$$\beta = ABC$$

an, halbiren denselben und ziehen die Bestimmungsgerade RS. Diese schneide die Curve M_2P_2 im Punkte G_2. Dann schlagen wir mit BG_2 um B einen Bogen, der BA und BC bzhw. in F und J schneide, und tragen in diesen Bogen von F und J aus die doppelte Amplitude $2m$ nach einander bis G_1, H_1 und H_2 als Sehne ein. Es wird dann der Winkel ABC durch die Geraden BG_1, BG_2, BH_2 und BH_1 in fünf gleiche Teile geteilt.

Der Beweis ergiebt sich mit Leichtigkeit aus der Entstehungsweise der Teilcurve II. Ord. M_2P_2.

III. Die Mehrteilung.

Ebenso wie wir mit Hülfe der Teilcurve I. Ord. diejenige II. Ord. erhielten, gelangen wir von dieser zur Teilcurve III. Ord. und in gleicher Weise nach einander zu den Teilcurven IV., V.,

VI. Ord. u. s. w. Die Schnittpunkte dieser Curven und der Bestimmungsgeraden ergeben uns dann die Sieben-, Neun-, Elf-, Dreizehnteilung u. s. w. Allgemein ausgedrückt, können wir also mit der Teilcurve $n$ter Ordnung die Teilung eines Winkels in $(2n+1)$ gleiche Teile ausführen.

IV. Der Verlauf der Teilcurven und die Bestimmung der Teilpunkte eines Winkels.

Fig. VI giebt uns ein Bild von der Gestalt der Teilcurven der ersten 3 Ordnungen. S ist der Scheitel, SL die Basisrichtung und AL die doppelte Amplitude dieser Curven. Die Winkel, die wir in gleiche Teile teilen sollen, dehnen sich vom festen Schenkel SL aus von rechts nach links, d. h. in der Richtung des Pfeils bei A aus.

Fassen wir die Punkte D und F auch als Schnittpunkte der Curven I und III und der Basis auf, so finden wir, dass die Teilcurve I. Ord. in 1 Punkte, die Curve II. Ord in 2 Punkten und allgemein die Curve $n$ter Ord. in n Punkten von der Basis geschnitten wird. Die Teilcurven winden sich also an der einen Seite um den Scheitel herum, und zwar wächst jede höhere Ordnung um eine halbe Windung. An der anderen Seite dagegen, d. h. über A, A_1, A_2, . . . hinaus erstrecken sich die Curven ins Unendliche.

Wir wollen nun die Schnittpunkte der Bestimmungsgeraden eines Winkels und der Teilcurven die Teilpunkte des Winkels nennen, und zwar den Schnittpunkt der Teilcurve $n$ter Ord. den Teilpunkt $n$ter Ordn. Da die Teilcurven von jeder Geraden in mehreren (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten werden, so ist es von Wichtigkeit, die Lage der Teilpunkte oder vielmehr die Bestimmungsgerade genauer zu definiren.

Wir wissen: die Entfernung der Bestimmungsgeraden von den Halbirungslinien der Winkel ist gleich der Amplitude m; sie sind deshalb sämtlich Tangenten an den Kreis, den ich mit m um den Scheitel S schlage. Ihre Richtung ist die der entsprechenden Halbirungslinie und ihr Anfangspunkt derjenige, welcher dem Anfangspunkte der Halbirungslinie, dem Scheitel S, entspricht, d. h. von diesem die Entfernung m hat; das ist aber der Berührungspunkt der Bestimmungsgeraden und des Kreises um S. Die Bestimmungsgerade eines Winkels ist demnach, genauer definirt, die Tangente an den Kreis um den Scheitel S, die, vom Berührungspunkte ausgehend,

der Halbirungslinie des Winkels parallel und gleichgerichtet ist und, vom Scheitel aus gesehen, die Teilcurven rechts von der Halbirungslinie schneidet.

Betrachten wir daraufhin die 4 Tangenten FM, GN, DP und HQ, von denen zwei, nämlich FM und DP, auf der Basis senkrecht stehen, während die beiden anderen GN und HQ derselben parallel laufen. Es ergiebt sich dann, dass FM die Bestimmungsgerade der Winkel π, 5π, 9π, . . . , GN die Bestimmungsgerade der Winkel 2π, 6π, 10π, . . . , DP diejenige der Winkel 3π, 7π, 11π, . . . und schliesslich HQ die Bestimmungsgerade der Winkel 4π, 8π, 12π, . . . ist.

Daraus folgt für die Teilcurve I. Ord.: B, C, D sind die Teilpunkte der Winkel π, 2π, 3π. Die Curve zerfällt demnach in 3 Teile: das Stück ∞AB enthält die Teilpunkte der Winkel von 0 bis π, BC diejenigen der Winkel von π bis 2π und CD die Teilpunkte der Winkel von 2π bis 3π.

Ebenso enthält das Stück ∞A_1B_1 der Teilcurve II. Ord. die Teilpunkte der Winkel von 0 bis π, B_1C_1 die Teilpunkte der Winkel von π bis 2π, C_1D_1 diejenigen der Winkel von 2π bis 3π, D_1E diejenigen der Winkel von 3π bis 4π und EF die Teilpunkte der Winkel von 4π bis 5π.

In gleicher Weise finden wir: das Curvenstück ∞A_2B_2 der Teilcurve III. Ord. enthält die Teilpunkte der Winkel von 0 bis π und die Stücke B_2C_2, C_2D_2, D_2E_1, E_1F_1, F_1G, GD bzhw. die Teilpunkte der Winkel von π bis 2π, von 2π bis 3π, von 3π bis 4π, von 4π bis 5π, von 5π bis 6π, von 6π bis 7π.

Wir können also theoretisch mit Hülfe einer Curve $n$ter Ord. alle Winkel von 0 bis $(2n+1)\pi$ in $(2n+1)$ gleiche Teile teilen.

Praktisch lässt sich dies jedoch nicht durchführen, schon deswegen, weil wir die Curven nach beiden Richtungen hin nur unvollständig construiren können. Für die Ausführung der Teilung ist dieser Umstand ja auch bedeutungslos, da wir durch Zweiteilung bzhw. wiederholte Zweiteilung die Teilung eines grösseren Winkels stets auf diejenige eines kleineren zurückführen können, und umgekehrt.

Anmerkung 1. Es ist selbstverständlich, dass die Amplituden aller Curven, die successive auseinander entstehen, einander gleich

sind. Wir wollen alle derartigen Curven mit gleicher Amplitude correspondirende Curven und eine ununterbrochene Reihe solcher correspondirenden Curven eine Curvenreihe nennen.

Jede Curvenreihe ist natürlich unendlich gross.

Anmerkung 2. Bei der Herstellung der Modelle der Curven II. und höherer Ord. stossen wir auf gewisse Schwierigkeiten, die sich auf verschiedene Weise überwinden lassen. Wie z. B. Fig. VI zeigt, werden wir, damit der Schenkel TN des rechten Winkels TNL durch den Punkt B gelegt werden kann, das Modell P_1LL_1WZB der Curve I. Ord. P_1L in die beiden Teile YLL_1WZBC und P_1YXB zerlegen.

Wir lassen dann den Punkt L sich zunächst auf dem Curvenstück LY und darauf, nach Einschaltung des Vierecks P_1YXB, auf YP_1 fortbewegen.

XII.

Ueber das Problem eine Fläche zweiten Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden.

Von

M. Krewer.

Das Problem, eine Oberfläche 2ten Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden, bietet trotz eines elementaren Charakters doch viel Interessantes. Die Betrachtung von sehr mannigfaltigen Combinationen von Flächen 2ter Ordnung und Kegelschnitten löst sich in die von Raumcurven 3ter Ordnung auf. Dieselben hangen, falls der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Kreis ist, ihrer Species nach nur von der gegebenen Fläche ab, degeneriren, falls die Fläche Rotationsfläche ist, in 3 Gerade und gehen in ebene Curven 3ter Ordnung über, wenn der Kegelschnitt eine Parabel oder gleichseitige Hyperbel ist. Eine Ausnahme bildet das Paraboloid, bei dem die Untersuchung direct an einer sich ergebenden Curve höherer Ordnung aufgestellt ist. In den weniger complicirten Fällen lässt sich allgemein die Frage entscheiden, wann die gegebene Fläche in einem gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden kann oder nicht. Es lassen sich auch die Beweise vieler Sätze der analytischen Geometrie als specieller Fälle der allgemeinen Lösung des Problems führen; dieselben sind jedoch hier ihrer Einfachheit wegen unterlassen worden.

---

§ 1. Reduction des Problems, wenn die gegebene Fläche ein Ellipsoid, Hyperboloid oder Kegel ist, auf die Discussion einer Raumcurve dritter Ordnung.

Es sei eine Fläche 2ten Grades gegeben, deren Gleichung

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

ist, welche je nachdem a, b, c positiv oder negativ sind, ein Ellipsoid, ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid darstellt. Diese Fläche, welche wir im Folgendem durch das Symbol $[abc]$ bezeichnen wollen, soll durch eine Ebene in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden. Diese Ebene sei durch die Gleichung

$$ux+vy+wz-p=0$$

gegeben, und wir wollen sie durch das Symbol $[uvw]$ bezeichnen Um den gemeinsamen Schnitt der Fläche $[abc]$ und der Ebene $[uvw]$ zu erhalten, führen wir ein neues System mit den Variablen ξ, η, ζ ein, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des Lotes von dem ursprünglichen Coordinatenanfang oder Mittelpunkte der Fläche auf die Ebene $[uvw]$ ist und dessen ζ-Achse die Richtung dieses Lotes hat.

$$\begin{aligned} x &= pu+f\xi+f'\eta+f''\zeta \\ y &= pv+g\xi+g'\eta+g''\zeta \\ z &= pw+h\xi+h'\eta+h''\zeta \end{aligned}$$

Hier ist unserer Voraussetzung nach $f''=u$, $g''=r$, $h''=w$.

Transformiren wir die Gleichung der Fläche $[abc]$ in Bezug auf die neuen Coordinaten und setzen in der so erhaltenen Gleichung $\zeta=0$, so haben wir die Gleichung des durch den Schnitt der Ebene $[uvw]$ und der Fläche $[abc]$ hervorgebrachten Kegelschnittes:

$$a(pu+f\xi+f'\eta)^2+b(pv+g\xi+g'\eta)^2+c(pw+h\xi+h'\eta)^2-1=0$$

Schreiben wir die Gleichung des Kegelschnittes in der Form:

$$\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+2\mathfrak{C}\xi\eta+2\mathfrak{D}\xi+2\mathfrak{E}\eta+\mathfrak{F}=0$$

so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= af^2+bg^2+ch^2 \\ \mathfrak{B} &= af'^2+bg'^2+ch'^2 \\ \mathfrak{C} &= aff'+bgg'+chh' \\ \mathfrak{D} &= p(afu+bgv+chw) \\ \mathfrak{E} &= p(af'u+bg'v+ch'w) \\ \mathfrak{F} &= p^2(au^2+bv^2+cw^2)-1 \end{aligned}$$

Ein Kegelschnitt ist vollständig bestimmt, wenn seine Achsen A und B bestimmt sind, oder, was dasselbe ist, wenn die Ausdrücke $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}$ und $\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}$ feste Werte haben. Aus den Ausdrücken $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}$ und $\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}$ ist ein neuer zu bilden, der für die folgenden Entwickelungen geeigneter ist:

$$\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\right)^2 : \left(\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}\right) = \left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)^2$$

In dem gegebenen Kegelschnitte seien diese Ausdrücke bestimmt, indem

$$\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\right) = R \quad \text{und} \quad \left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)^2 = S$$

ist. Sollen nun die Achsen des durch den Schnitt der Ebene $[u\,v\,w]$ und der Fläche $[a\,b\,c]$ entstandenen Kegelschnittes A' und B' gleich A und B sein, so muss

$$\frac{1}{A'^2}+\frac{1}{B'^2} = R \quad \text{und} \quad \left(\frac{A'}{B'}+\frac{B'}{A'}\right)^2 = S$$

sein. Da nun A' und B' durch u, v, w, p sich ausdrücken lassen, so werden sich 2 Bedingungsgleichungen für diese Variablen ergeben. Um die Ausdrücke

$$\frac{1}{A'^2}+\frac{1}{B'^2} - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2)}{\delta} \quad \text{und} \quad \left(\frac{A'}{B'}+\frac{B'}{A'}\right)^2 - \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2}$$

zu bilden, müssen wir zuerst die Discriminante des Kegelschnittes berechnen

$$\delta = p^2 \begin{vmatrix} af^2+bg^2+ch^2 & afu+bgv+chw & aff'+bgg'+chh' \\ aff'+bgg'+chh' & af'u+bg'v+ch'w & af'^2+bg'^2+ch'^2 \\ afu+bgv+chw & au^2+bv^2+cw^2 & af'u+bg'v+ch'w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} af^2+bg^2+ch^2 & aff'+bgg'+chh' \\ aff'+bgg'+chh' & af'^2+bg'^2+ch'^2 \end{vmatrix}$$

$$\delta = -p^2abc\begin{vmatrix} f & f' & u \\ g & g' & v \\ h & h' & w \end{vmatrix}^2 - (aff'+bgg'+chh')^2 + (af^2+bg^2+ch^2)(af'^2+bg'^2+ch'^2)$$

Da

$$u = gh' - hg', \quad v = hf' - fh', \quad w = fg' - gf'$$

so ist

$$\delta = -p^2abc + bcu^2 + acv^2 + abw^2$$

Ferner ist

$$f^2 + f'^2 = 1 - u^2 = v^2 + w^2, \quad g^2 + g'^2 = u^2 + w^2, \quad h^2 + h'^2 = u^2 + v^2$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a(v^2 + w^2) + b(u^2 + w^2) + c(u^2 + v^2)$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = bcu^2 + acv^2 + abw^2$$

Jetzt können wir die Ausdrücke $\frac{1}{A'^2} + \frac{1}{B'^2}$ und $\left(\frac{A'}{B'} + \frac{B'}{A'}\right)^2$ bilden. Zugleich sehen wir den Grund ein, warum $\frac{1}{A'^2} \cdot \frac{1}{B'^2}$ durch $\left(\frac{A'}{B'} + \frac{B'}{A'}\right)^2$ ersetzt wurde. Denn, da

$$\frac{1}{A'^2} \cdot \frac{1}{B'^2} = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2)^2}{\delta^2}$$

ist, würden wir sechste Potenzen von u, v, w erhalten, was durch Einführung des Ausdrucks

$$\left(\frac{A'}{B'} + \frac{B'}{A'}\right)^2 = \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}$$

vermieden ist

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein, die sich später als zweckmässig erweisen.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a(v^2 + w^2) + b(u^2 + w^2) + c(u^2 + v^2) = U$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = bcu^2 + acv^2 + abw^2 = \ldots\ldots V$$
$$\delta = -p^2abc + bcu^2 + acv^2 + abw^2 = \ldots\ldots W$$

Alsdann nehmen die Bedingungsgleichungen für u, v, w, p die Form an:

$$RW - UV = 0, \quad SV - U^2 = 0, \quad T = u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Diese Gleichungen sind höchstens vom 4ten Grade in Bezug auf die Veränderlichen u, v, w. Wir ersetzen die directe Untersuchung der durch die Bedingungsgleichungen dargestellten Curve durch die Untersuchung einer Raumcurve dritter Ordnung, welche zu diesen Gleichungen nnd den Grössen u. v, w in einer einfachen Beziehung steht. Führen wir nämlich die Substitution ein:

$$\frac{u^2}{p^2} = x, \quad \frac{v^2}{p^2} = y, \quad \frac{w^2}{p^2} = z$$

so sind die Ausdrücke $\frac{U}{p^2}, \frac{V}{p^2}, \frac{W}{p^2}, \frac{T}{p^2}$ linear in Bezug auf x, y, z. Setzen wir $\lambda = -U$, so folgt:

$$\frac{U}{p^2} + \lambda \frac{T}{p^2} = 0, \quad \frac{SV}{p^2} + \lambda \frac{U}{p^2} = 0, \quad \frac{RW}{p^2} + \lambda \frac{V}{p^2} = 0$$

Die Division durch p^2 ist nicht erlaubt, wenn $p = 0$ ist, also wenn die Schnittebene $[uvw]$ durch den Coordinatenanfang geht, in welchem Falle ihre Lage direct aus den obigen Gleichungen zu bestimmen ist. Es ist alsdann $W = U$ und und die Gleichungen nehmen die Gestalt an:

$$U = R, \quad V = \frac{R^2}{S}, \quad T = 1$$

Aus diesen 3 Gleichungen sind die Werte u, u, w zu bestimmen. Die 3 obigen Gleichungen stellen 3 projective Ebenenbüschel dar, welche eine Raumcurve 3ter Ordnung erzeugen. Einem Punkte x', y', z' der Raumcurve entsprechen die Werte

$$u = \pm p \sqrt{x'}, \quad v = \pm p \sqrt{y'}, \quad w = \pm p \sqrt{z'}$$

also die Ebene

$$\pm \sqrt{x'} \,.\, x \pm \sqrt{y'} \,.\, y \pm \sqrt{z'} \,.\, z - 1 = 0$$

wo x, y, z die Veränderlichen sind. Die Gleichung stellt 8 symmetrisch zu den Coordinatenebenen gelegene Ebenen dar, entsprechend den 8 Zeichencombinationen von $\pm \sqrt{x'}$, $\pm \sqrt{y'}$, $\pm \sqrt{z'}$.

Ferner entsprechen nach dieser Abbildung nur Punkten der Raumcurve, die im 1ten (pos.) Octanten liegen, reelle Ebenen. Die zu untersuchende Raumcure ist als Schnitt 3ter projectiver Ebenenbüschel gegeben:

A)
1) $(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z+\lambda(x+y+z) = 0$
2) $R(bcx+acy+abz-abc)+\lambda(bcz+acy+abz) = 0$
3) $S(bcx+aey+abz)+\lambda\{(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z\} = 0$

Die Achsen dieser Büschel sind zu bestimmen aus den Gleichungen:

1) $(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z = 0; \quad x+y+z = 0$
2) $R(bcx+acy+abz-abc) = 0; \quad bcx+acy+abz = 0$
3) $S(bcx+acy+abz) = 0; \quad (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z = 0$

Ist $B = iB_1$ und $A = B_1$, so ist

$$R = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B_1^2} = 0$$

Alsdann ist

$$S = R : \frac{1}{A^2 B^2} = 0$$

Wenn $R = S = 0$ ist, so reduciren sich die Gleichungen

$$RW - UV = 0 \quad \text{und} \quad SV - U^2 = 0$$

auf die Gleichung $U = 0$

In diesem, die gleichseitige Hyperbel charakterisirenden Falle, müssen wir die Ausdrücke $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}$ und $\frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{B^2}$ benutzen, weil $R = 0$ ist und wir durch Multiplication mit R die 2te Bedingungsgleichung verwischen.

Sehen wir also von dem speciellen Falle der gleichseitigen Hyperbel ab, so sind die Achsen der 3 Büschsel gegeben durch die Gleichungen:

1) $(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0; \quad x + y + z = 0$
2) $bcx + acy + abz - abc = 0, \quad bcx + acy + abz = 0$
3) $bcx + acy + abz = 0; \quad (b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0$

Aus einer eingehenden Betrachtung der gegenseitigen Lage der Ebenenbüschel und ihrer Achsen unter Berücksichtigung ihres Verhältnisses zu der unendlich fernen Ebene ergiebt sich, dass die zu untersuchende Raumcurve als Schnitt von 3 Flächen zu erhalten ist: einem Paraboloid, parabolischen Cylinder und Kegel. Sie enthält 3 unendlich ferne Punkte, von denen aber 2 zusammenfallen, so dass die unendlich ferne Gerade die Raumcurve berührt. Nach Leydewitz ist also diese Raumcurve eine durch den Coordinatenanfang gehende parabolische Hyperbel.

Ist die gegebene Fläche ein Kegel, dessen Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

ist, so ist die Discriminante

$$\delta = -p^2 abc$$

und wir gelangen durch dieselbe Substitution, wie pag. 188 zur Discussion einer Raumcurve 3ter Ordnung, welche durch die 3 projectiven Ebenenbüschel

$$\text{B)}\quad \begin{aligned} &1)\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z+\lambda(x+y+z)=0\\ &2)\ R(ox+oy+oz-abc)+\lambda(bcx+acy+abz)=0\\ &3)\ S(bcx+acy+abz)+\lambda\{(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z\}=0 \end{aligned}$$

erzeugt wird. Auch hier muss der Fall der gleichseitigen Hyperbel ausgeschlossen werden. Durch ganz analoge Betrachtungen, wie vorhin, gelangen wir zu dem Resultate, dass diese Raumcurve eine kubische Parabel ist.

§ 2. Die Darstellung der Raumcurve durch einen Parameter und ihre Beziehung zu dem gegebenen Problem.

Aus den Gleichungen (A) drücken wir die Coordinaten der Raumcurve durch den Parameter λ aus

$$\text{A)}\quad \begin{aligned} &1)\ (b+c+\lambda)x+(a+c+\lambda)y+(a+b+\lambda)z=0\\ &2)\ bc(R+\lambda)x+ac(R+\lambda)y+ab(R+\lambda)z-Rabc=0\\ &3)\ \{Sbc+\lambda(b+c)\}x+\{Sac+\lambda(a+c)\}y\\ &\qquad\qquad +\{Sab+\lambda(a+b)\}z=0 \end{aligned}$$

$$x=\frac{Rabc(c-b)}{\Delta}(\lambda^2+\lambda Sa+Sa^2)$$

$$y=-\frac{Rabc(c-a)}{\Delta}(\lambda^2+\lambda Sb+Sb^2)$$

$$z=\frac{Rabc(b-a)}{\Delta}(\lambda^2+\lambda Sc+\lambda Sc^2)$$

$$\Delta=(R+\lambda)(c-a)(c-b)(b-a)\lambda^2$$

Die Coordinaten der Raumcurve sind demnach ausgedrückt:

$$x=k_x f(\lambda, a),\quad y=k_y f(\lambda, b),\quad z=k_z f(\lambda, c)$$

wo

$$k_x=\frac{Rabc}{(a-b)(a-c)},\quad k_y=\frac{Rabc}{(b-c)(b-a)},\quad k_z=\frac{Rabc}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(a, t)=\frac{\lambda^2+\lambda St+St^2}{(R+\lambda)\lambda^2}$$

Es ist

$$k_x+k_y+k_z=0$$

so dass diese Coefficienten nicht zugleich dasselbe Vorzeichen haben können.

Wir stellen die Forderung (pag. 189), es sollen x, y, z positiv sein und untersuchen, in welchen Grenzen sich λ bewegen muss, damit diese Forderung in jedem vorliegenden Falle erfüllt sei. Die Coefficienten k haben von λ unabhängige Werte. Es bliebe also übrig den Verlauf der Function $f(\lambda, t)$ zu verfolgen. Die Coefficienten a, b, c der Fläche $[abc]$ können positiv oder negativ sein, so dass wir 2 Hauptfälle $t > 0$ und $t < 0$ unterscheiden müssen.

Die Function $f(\lambda, t)$ hat 2 Nullpunkte

$$\lambda_{1t} = \frac{t}{2}(-S + \sqrt{S(S-4)}) \text{ und } \lambda_{2t} = \frac{t}{2}(-S - \sqrt{S(S-4)})$$

Es war

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2$$

Bilden wir

$$S - 4 = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 - 4 = \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right)^2$$

so sehen wir, dass die Quadratwurzel $\sqrt{S(S-4)}$ immer ausziehbar ist, da sowol S als auch $S-4$ vollständige Quadrate sind. Nun kann der Wert der Wurzel gleich $\frac{A^2}{B^2} - \frac{B^2}{A^2}$ oder $\frac{B^2}{A^2} - \frac{A^2}{B^2}$ sein.

Wir setzen fest, dass immer derjenige von den beiden Werten genommen werden soll, welcher positiv ist. Auch in allen anderen Fällen, wo eine Grösse unter der Quadratwurzel ein vollständiges Quadrat sein wird, werde durch das Wurzelzeichen der positive Wert der Quadratwurzel bezeichnet. Die 2 Unendlichkeitspunkte der Function $f(\lambda, t)$ sind

$$\lambda_3 = -R \quad \text{und} \quad \lambda_4 = 0$$

Ferner ist zu berücksichtigen, dass, wenn eine Ellipse ausgeschnitten werden soll, $S > 4$ sein muss.

Ist m der Mittelwert zwischen A und B, so ist

$$A = m + \varepsilon \quad \text{und} \quad B = m - \varepsilon$$

so dass

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 = \left(\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon} + \frac{m-\varepsilon}{m+\varepsilon}\right)^2 = 4\left(\frac{m^2+\varepsilon^2}{m^2-\varepsilon^2}\right)^2 > 4$$

ist. Bei der Hyperbel ist

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 = \left(\frac{A}{iB_1} + \frac{iB_1}{A}\right)^2 = -\left(\frac{A^2 B_{11}}{AB_1}\right)^2 < 0$$

Ferner ist R bei der Ellipse stets positiv, bei der Hyperbel dagegegen positiv oder negativ. Bei dem Kreise ist

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 - 4$$

da $A = B$ ist. Nach diesem Schema werden wir die Fälle der Ellipse, des Kreises und der Hyperbel zu unterscheiden haben.

$\underline{t \geq 0.}$ I) $S > 4$, $R > 0$ . . . Ellipse $\lambda_{2t} < \lambda_{1t} < 0$, $\lambda_3 < 0$

1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < \lambda_{1t} < 0$

2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < \lambda_{1t} < 0$

3) $\lambda_{2t} < \lambda_{1t} \leqq \lambda_3 < 0$

II) $S = 4$, $R > 0$ . . . Kreis $(\lambda_{1t} = \lambda_{2t} < 0,\ \lambda_3 < 0)$

III) $S < 0$, $R \gtrless 0$ . . . Hyperbel $(\lambda_{1t} > 0,\ \lambda_{2t} < 0,\ \lambda_3 \gtrless 0)$

1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < 0 < \lambda_{1t}$

2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{1t}$

3) $\lambda_{2t} < 0 < \lambda_3 \leqq \lambda_{1t}$

4) $\lambda_{2t} < 0 < \lambda_{1t} \leqq \lambda_3$

Der Fall II) führt auf die bekannten Kreisschnitte.

Die Function $f(\lambda, t)$ kann das Zeichen nur dann ändern, wenn sie durch einen Null- oder Unendlichkeitspunkt geht. Da es uns nur auf das Vorzeichen von $f(\lambda, t)$ ankommt, betrachten wir diese Function in Bezug auf die 4 Punkte λ_{1t}, λ_{2t}, λ_3, λ_4.

Im Falle I) ist $f(\varepsilon, t)$, wenn ε eine beliebig kleine Zahl sein soll, unbedingt positiv, einerlei ob $\varepsilon > 0$ oder $\varepsilon < 0$ ist. Wir können nun den Verlauf der Function $f(\lambda, t)$, in sofern sie oberhalb oder unterhalb der λ-Achse sich befindet, wenn wir die λ als Abscissen und $f(\lambda, t)$ als Ordinaten auftragen, zeichnen, wenn wir noch berücksichtigen, dass $\lim_{\lambda = +\infty} f(\lambda, t) > 0$ und $\lim_{\lambda = -\infty} f(\lambda, t) < 0$ beständig ist. (S. Beilage.)

Im Falle III) ist $f(\varepsilon, t)$ positiv oder negativ, je nachdem $R \lessgtr 0$, oder je nachdem $\lambda_3 \gtrless 0$. Demnach hat $f(\varepsilon, t)$ immer das Zeichen der Grösse λ_3. (S. Beilage.)

Ist $t < 0$, so gestaltet sich der Verlauf der Function $f(\lambda, t)$ anders. Wir haben alsdann folgende Fälle:

$t < 0$. I') $S > 4$, $R > 0$ . . . Ellipse $(\lambda_{2t} > \lambda_{1t} > 0,\ \lambda_3 < 0$

II') $S = 4$, $R > 0$ . . . Kreis $(\lambda_{1t} = \lambda_{2t} > 0,\ \lambda_3 < 0$

III') $S < 0$, $R \gtrless 0$ . . . Hyperbel $(\lambda_{2t} > 0,\ \lambda_{1t} < 0,\ \lambda_3 \gtrless 0)$

1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t}$

2) $\lambda_{1t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{2t}$

3) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_3 < \lambda_{2t}$

4) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t} \leqq \lambda_3$

Der Fall II') ist erledigt. Der Verlauf der Curven im Falle III') ist analog dem im Falle III), nur dass λ_{1t} und λ_{2t} vertauscht sind. (Ueber den Verlauf der Curve im Falle I') siehe Fig. III, 1 bis 4.)

Zur Uebersichtlichkeit stellen wir die gewonnenen Resultate in einer Tabelle zusammen.

		$f(\lambda, t) > 0$, wenn	$f(\lambda, t) < 0$, wenn
$t > 0$	I) $S > 4$, $R > 0$		
	1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < \lambda_{1t} < 0$	$\lambda_3 \leqq \lambda \leqq \lambda_{2t}$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$
	2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < \lambda_{1t} < 0$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{1t}$
	3) $\lambda_{2t} < \lambda_{1t} \leqq \lambda_3 < 0$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_{1t} \leqq \lambda \leqq \lambda_3$

$f(\lambda, t) > 0$, wenn

	III) $S<0$, $R \gtrless 0$	
$t>0$	1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < 0 < \lambda_{1t}$	$\lambda_3 \leqq \lambda \leqq \lambda_{2t}$: $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$
	2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{1t}$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$
	3) $\lambda_{2t} < 0 < \lambda_3 < \lambda_{1t}$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$
	4) $\lambda_{2t} < 0 < \lambda_{1t} \leqq \lambda_3$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < +\infty$

$f(\lambda, t) < 0$, wenn

$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$
$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{1t}$
$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{1t}$
$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_{1t} \leqq \lambda \leqq \lambda_3$

$f(\lambda, t) > 0$, wenn

	I') $S>4$, $R>0$	$\lambda_3 < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$
	III') $S<0$, $R \gtrless 0$	
$t<0$	1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t}$	$\lambda_3 \leqq \lambda \leqq \lambda_{1t}$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$
	2) $\lambda_{1t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{2t}$	$\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$
	3) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_3 < \lambda_{2t}$	$\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$
	4) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t} \leqq \lambda_3$	$\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < +\infty$

$f(\lambda, t) < 0$, wenn

I') $S>4$, $R>0$	$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_{2t}$
III') $S<0$; $R \gtrless 0$	$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_{2t}$
I') $S>4$, $R>0$	$-\infty < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{2t}$
	$-\infty < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{2t}$
	$-\infty < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_{2t} \leqq \lambda \leqq \lambda_3$

Ist λ gleich dem Grenzwerte λ_{1t} oder λ_{2t}, so ist

$$f(\lambda, t) = 0$$

In den Fällen, wo

$$\lambda_{1t} = \lambda_3 \quad \text{oder} \quad \lambda_{2t} = \lambda_3$$

ist $f(\lambda, t)$ unbestimmt, da es den Wert $\frac{0}{0}$ annimmt. Man kann in jedem Falle den Wert der Function bestimmen, indem man Zähler und Nenner differentiirt. Die Gleichheitszeichen in den Wertgebieten der λ sind für diese Fälle hinzugefügt.

Nachdem wir in dieser Weise die Function $f(\lambda, t)$ vollständig untersucht haben, gehen wir zu der Raumcurve über. Da die gesuchten Schnittebenen nur dann reell sind, wenn die Punkte der Raumcurve im 1ten Octanten liegen, so ist es von Wichtigkeit, die Lage derselben in Bezug auf den 1ten Octanten in jedem Falle bestimmen zu können. Es waren die Coordinaten der Raumcurve ausgedrückt:

$$x = k_x f(\lambda, a), \quad y = k_y f(\lambda, b), \quad z = k_z f(\lambda, c)$$

wo k_x, k_y, k_z durch R, a, b, c ausgedrückt sind. Ein Punkt der Raumcurve liegt im 1ten Octanten, wenn x, y, z zugleich positiv sind. Ist die Fläche gegeben, also a, b, c bekannt, und auch der Kegelschnitt festgezetzt, also R und S zu bestimmen, so bietet die Berechnung der Coefficienten k keine Schwierigkeit. Entsprechend den Vorzeichen von k sind alsdann $f(\lambda, a)$, $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$ so zu wählen, dass x, y, z positiv resultiren.

Wir betrachten die Function $f(\lambda, t)$ jedesmal von den 4 Punkten λ_{1t}, λ_{2t}, λ_3, λ_4 ausgehend, die mit $+\infty$ und $-\infty$ immer die Grenzen bestimmen, innerhalb deren sich λ bewegen muss, damit $f(\lambda, t)$ sein Zeichen beibehalte. So treten auch für die Functionen $f(\lambda, a)$, $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$ jedesmal die Grenzwerte auf:

$$\left.\begin{matrix} \lambda_{1a}, \lambda_{2a} \\ \lambda_{1b}, \lambda_{2b} \\ \lambda_{1c}, \lambda_{2c} \end{matrix}\right\} \lambda_3, \ \lambda_4, \ +\infty, \ -\infty$$

Da

$$f(\lambda_{1a}, a) = f(\lambda_{2a}, a) = 0$$

ist, so entsprechen den Werten λ_{1a}, λ_{2a} Punkte in der yz-Ebene ($x = 0$). Es mögen den Werten λ_{1a}, λ_{2a}, λ_{1b}, λ_{2b}, λ_{1c}, λ_{2c} die 6 Punkte P_{yz}', P_{yz}'', P_{xz}', P_{xz}'', P_{xy}', P_{xy}'' entsprechen. Die Reihenfolge dieser 6 Punkte hängt von der Reihenfolge der 6 λ-Werte ab, von dem kleinsten zum grössten gezählt. Die Raumcurve kann in den ersten Octanten treten resp. aus ihm heraustreten nur durch die 6 Punkte P', P'' und ∞, wie auch 0, welche den obigen λ-Werten entsprechen, die in der Tabelle ausschliesslich als Grenzwerte auftreten. Wir bestimmen also in jedem gegebenen Falle die Werte λ_{1a}, λ_{2a}, λ_{1b}, λ_{2b}, λ_{1c}, λ_{2c} und λ_3 und tragen sie der grösseren Anschaulichkeit

wegen auf einer Geraden ab. Darauf bestimmen wir das Gebiet der λ-Werte, für welche $f(\lambda, a)$ das passende Zeichen hat, indem wir den den Werten λ_{1a}, λ_{2a}, λ_3, λ_4 entsprechenden Fall in der Tabelle aufsuchen. Ebenso verfahren wir mit $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$, wobei $t \gtrless 0$, je nachdem a, b, c grösser oder kleiner als 0 ist. Das gemeinsame Gebiet dieser 3 besonderen Gebiete ist dasjenige, für welches $f(\lambda, a)$, $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$ zugleich das richtige Zeichen haben, für welches also x, y, z zugleich positiv sind. Allen Werten λ in diesem Gebiete entsprechen Punkte der Raumcurve, die in dem 1ten Octanten liegen, und allen diesen Punkten entsprechen reelle Ebenen, welche die gegebene Fläche in dem gegebenen Kegelschnitte schneiden. Die Lage der Schnittebenen, welche continuirlich und zwischen 2 Grenzebenen verlaufen, die im allgemeinen einer Achse der Fläche parallel sind, da für die Grenzwerte λ_{1t}, $\lambda_{2t} - x$, y, oder z verschwindet, ändert sich allmählich. Tritt λ_3 als Grenzwert auf, so haben wir den früher ausgeschlossenen Grenzfall, wo $p = 0$ ist, die Schnittebene also durch den Coordinatenanfang geht. Im speciellen kann die Grenzebene auch einer Coordinatenebene parallel laufen nämlich, wenn 2 Wurzeln, z. B. λ_{2b} und λ_{1c} zusammenfallen und zugleich als Grenzwerte auftreten, wie aus dem folgenden Beispiele zu ersehen ist. Die Werte $+\infty$ und $-\infty$, welchen die unendlich ferne Ebene als Schnittebene entspricht, können, wie aus der Tabelle leicht zu ersehen ist, nicht als Grenzwerte auftreten.

Es sei z. B. die Fläche

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$$

gegeben, und es soll dieselbe in dem Kegelschnitte

$$\xi^2 + 4\eta^2 = 1$$

geschnitten werden.

$$a = \tfrac{1}{3}, \quad b = \tfrac{1}{4}, \quad c = 1, \quad A = 1, \quad B = \tfrac{1}{2}, \quad R = 4 + 1 = 5$$

$$S = (2 + \tfrac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}, \quad \sqrt{S(S-4)} = \frac{15}{4}$$

$$\lambda_{2a} = -\tfrac{5}{3}, \quad \lambda_{2b} = -\tfrac{5}{4}, \quad \lambda_{2c} = -5$$

$$\lambda_{1a} = -\frac{5}{36}, \quad \lambda_{1b} = -\frac{5}{16}, \quad \lambda_{1c} = -\tfrac{5}{4}, \quad \lambda_3 = -5$$

Die Reihenfolge der λ-Werte ist

$$\lambda_3 = \lambda_{2c} < \lambda_{2b} = \lambda_{1c} < \lambda_{2a} < \lambda_{1b} < \lambda_{1a}$$

$$k_x = \tfrac{9}{8}, \quad k_y = -\tfrac{4}{3}, \quad k_z = \frac{5}{24}, \quad k_x + k_y + k_z = 0$$

Es muss $f(\lambda, a) > 0$, $f(\lambda, b) < 0$, $f(\lambda, c) > 0$ sein, wobei wir überall den Fall I), 1) zu nehmen haben.

Für alle λ grösser als λ_{2b} und kleiner als λ_{2a} haben wir Punkte der Raumcurve, die im 1ten Octanten liegen $(-\frac{5}{4} < \lambda < -\frac{5}{9})$. Sei z. B. $\lambda = -1$. Alsdann ist

$$f(-1, \tfrac{1}{5}) = \frac{31}{324}, \quad f(-1, \tfrac{1}{4}) = -\frac{11}{256}$$

$$f(-1, 1) = \tfrac{1}{4}, \quad x' = \frac{31}{288}, \quad y' = \frac{11 \cdot 4}{3 \cdot 256}, \quad z' = \frac{5}{96}$$

Die Gleichung der Schnittebene für $\lambda = -1$ ist:

$$\pm \frac{1}{12}\sqrt{\frac{31}{2}}\, x \pm \frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{3}}\, y \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}\, z - 1 = 0$$

Dem Grenzwerte λ_{2a} entspricht eine Ebene parallel zur x-Achse und dem Grenzwerte $\lambda_{2b} = \lambda_{1c}$ eine Ebene parallel zur yz-Ebene.

Ist die gegebene Fläche ein Kegel, dessen Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

so lässt sich, wie wir bereits pag. 190 gesehen haben, das Problem auf die Discussion einer kubischen Parabel reduciren, und zwar sind, wie aus dem Gleichungsystem (B) zu berechnen ist, die Coordinaten derselben gegeben:

$$x = k_x F(\lambda, a), \quad y = k_y F(\lambda, b), \quad z = k_z F(\lambda, c), \quad \text{wo}$$

$$k_x = \frac{Rabc}{(a-b)(a-c)}, \quad k_y = \frac{Rabc}{(b-a)(b-c)}, \quad k_z = \frac{Rabc}{(c-a)(c-b)}$$

$$F(\lambda, t) = \frac{\lambda^2 + \lambda St + St^2}{\lambda^3}$$

Wir berücksichtigen die Fälle der Ellipse ($S > 4$) und Hyperbel ($S < 0$) — R kommt in $F(\lambda, t)$ überhaupt nicht vor — und gelangen zur folgenden Tabelle.

		$F(\lambda, t) > 0$, wenn	$F(\lambda, t) < 0$, wenn
$t > 0$	$S > 4$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$; $0 < \lambda < +\infty$	$\lambda_{1t} < \lambda < 0$; $-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$
	$S < 0$	$\lambda_{2t} < \lambda < 0$; $\lambda_{1t} < \lambda < \infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $0 < \lambda < \lambda_{1t}$
$t < 0$	$S > 4$	$0 < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_{2t} < \lambda < \infty$	$-\infty < \lambda < 0$; $\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_{2t}$
	$S < 0$	$\lambda_{1t} < \lambda < 0$; $\lambda_{2t} < \lambda < \infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{1t}$; $0 < \lambda < \lambda_{2t}$

§ 3. Discussion des Problems, wenn die gegebene Fläche Rotationsfläche ist.

Die obigen Betrachtungen wurden unter der (pag. 192) Bedingung gemacht, dass die Fläche $[abc]$ keine Rotationsfläche sei.

Ist dieses der Fall, so wird die Darstellung der Raumcurve durch den Parameter λ illusorisch. Die 3 Ebenenbüschel nehmen, wenn wir beispielsweise $b = c$ festsetzen, die Gestalt an:

1) $(2b + \lambda)x + (a + b + \lambda)(y + z) = 0$
2) $b^2(R + \lambda)x + ab(R + \lambda)(y + z) = Rab^2$
3) $(Sb^2 + 2\lambda b)x + \{Sab + \lambda(a + b)\}(y + z) = 0$

Die Determinante der Coefficienten der Variablen in diesem Gleichungssystem ist gleich null.

Betrachten wir die Büschel (1) und (3), so ist zu ersehen, dass beide Gleichungen für

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

befriedigt sind. Demnach muss die Gerade

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

welche für jedes λ in den Ebenen beider Ebenenbüschel enthalten ist, die Achse derselben sein. Die Richtung dieser Achse im Raume ist gegeben durch die Richtungscos. $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Richtungscos. der Ebenen des Parallelebenenbüschels (2) sind $\varrho b^2(R + \lambda)$, $\varrho ab(R + \lambda)$, $\varrho ab(R + \lambda)$, so dass beide Richtungen auf einander senkrecht stehen. Es ist also die Achse der coaxialen Ebenenbüschel (1) und (3) d. h. die Gerade

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

in einer Ebene der Schaar (2) enthalten. Dieser Ebene des Büschels (2) entsprechen 2 Ebenen in (1) und (3), die durch die Gerade

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

hindurchgehen müssen, so dass diese Gerade sich offenbar von der Curve losgelöst hat. Die Raumcurve kann aber nur in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in 3 Gerade zerfallen. Letzteres ist wirklich der Fall. Es ist nicht schwer, ausser der Geraden

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

noch 2 zu finden, welche sich ebenfalls von der Curve losgelöst haben. Wir suchen die Doppelebenen der Büschel (1) und (3), welche wir erhalten, indem wir λ den Wert geben, der aus der Gleichung resultirt:

$$\begin{vmatrix} 2b+\lambda & a+b+\lambda \\ Sb^2+2\lambda b & Sab+\lambda(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-b)(\lambda^2+\lambda Sb+Sb^2) = 0$$

Da $a-b \gtrless 0$, so muss

$$\lambda^2+\lambda Sb+Sb^2 = 0$$

also

$$\lambda_b = \frac{b}{2}(-S \pm \sqrt{S(S-4)})$$

sein. Geben wir also λ den Wert

$$\lambda_{1b} = \frac{b}{2}(-S+\sqrt{S(S-4)})$$

oder

$$\lambda_{2b} = \frac{b}{2}(-S-\sqrt{S(S-4)})$$

so fallen die entsprechenden Ebenen der Büschel (1) und (3) zusammen, und der Schnitt mit den entsprechenden Ebenen der Parallelebenenschaar wird die 2 gesuchten Geraden liefern.

$$(2b+\lambda)x+(a+b+\lambda)(y+z) = 0$$
$$b^2(R+\lambda)x+ab(R+\lambda)(y+z) = 0$$

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & a+b+\lambda \\ Rab^2 & ab(R+\lambda) \end{vmatrix}; \quad y+z = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2b+\lambda & 0 \\ b^2(R+\lambda) & Rab^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = b(R+\lambda)(a-b)(b+\lambda)$$

Die 3 Geraden, in welche die Raumcurve im Falle $b = c$ zerfällt, sind demnach

1) $x = 0, \quad y+z = 0$

$$2)\quad x = -\frac{Rab(a+b+\lambda_{1b})}{(R+\lambda_{1b})(b+\lambda_{1b})(a-b)}$$

$$y+z = \frac{Rab(2b+\lambda_{1b})}{(R+\lambda_{1b})(b+\lambda_{1b})(a-b)}$$

$$3)\quad x = -\frac{Rab(a+b+\lambda_{2b})}{(R+\lambda_{2b})(b+\lambda_{2b})(a-b)}$$

$$y+z = \frac{Rab(2b+\lambda_{2b})}{(R+\lambda_{2b})(b+\lambda_{2b})(a-b)}$$

wo λ_{1b}, λ_{2b} bekannte Werte haben. Es ist zu bemerken, dass diese 3 Geraden parallel laufen, also sich im unendlich fernen Punkte schneiden.

Hiermit ist eigentlich das Problem im Falle, dass die gegebene Fläche ein Rotationsellipsoid oder Hyperboloid ist, gelöst. Denn man braucht nur die Gleichungen der Geraden zu bestimmen und die Punkte derselben im 1 ten Octanten auf die bekannte Weise abzubilden, um die gesuchten Schnittebenen zu erhalten.

Von der Geraden (1) ist nur der Punkt

$$x = y = z = 0$$

wesentlich, dem die unendlich ferne Ebene entspricht, da die anderen Punkte nicht im 1 ten Octanten liegen. Betrachten wir die Gleichungen der Geraden (2) und (3), so sehen wir, dass sie allgemein geschrieben werden können in der Form:

$$x = c_1, \quad y+z = c_2$$

Da

$$\frac{u^2}{p^2} = x \quad \text{und} \quad \frac{v^2}{p^2} = y, \quad \frac{w^2}{p^2} = z$$

so folgt

$$\frac{u^2}{p^2} = c_1, \quad \frac{v^2}{p^2}+\frac{w^2}{p^2} = c_2, \quad v^2+w^2 = c_2 p^2$$

$$u^2+v^2+w^2 = (c_1+c_2)p^2 = 1, \quad p = \text{const.}, \quad u = \text{const.}$$

Geometrisch kann man sich dieses Resultat so vorstellen, dass alle Schnittebenen 2 Kegel umhüllen, deren Spitzen auf der Rotationsfläche liegen, was auch aus der Symmetrie der Schnittebenen zu ersehen ist. Es ist zunächst die Möglichkeit noch nicht ausgeschlossen, dass die beiden Geraden (2) und (3) im 1 ten Octanten verlaufen. Im Folgenden wird der Beweis geliefert werden, dass es unmöglich ist, so dass es nur 2 symmetrisch liegende Kegel von der obigen Art giebt.

Es werden bei den Rotationsflächen verschiedene Fälle eintreten, die wir auf folgende Weise classificiren wollen.

I. $a > 0,\ b > 0$ . . . Rotationsellipsoid
1) $S > 4,\ R > 0$ . . . Ellipse
2) $S = 4,\ R > 0$ . . . Kreis

II. $a > 0,\ b < 0$ . . . Rotationshyperboloid
1) $S > 4,\ R > 0$ . . . Ellipse
2) $S = 4,\ R > 0$ . . . Kreis
3) $S < 0,\ R \gtrless 0$ . . . Hyperbel

Die Fälle I., 2) und II., 2) führen auf die bekannten Kreisschnitte.

Gehen wir zum Falle I., 1) über. Zuvor bemerken wir noch, dass, wenn $R > 0$, $S > 4$ ist, $0 < S - 2 - \sqrt{S(S-4)} < 2$ ist. Denn setzen wir $S = 4 + \varepsilon^2$, so ist

$$4 + \varepsilon^2 - 2 - \sqrt{(4+\varepsilon^2)\varepsilon^2} = 2 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2} < 2$$

Andererseits ist

$$S - 2 - \sqrt{S(S-4)} = \sqrt{S(S-4)+4} - \sqrt{S(S-4)} > 0$$

Ferner ist

$$b + \lambda_{1b} = b + \frac{b}{2}(-S + \sqrt{S(S-4)}) = -\frac{b}{2}(S - 2 - \sqrt{S(S-4)})$$

so dass $|b + \lambda_{1b}| < |b|$ ist. Im Falle I., 1) ist also:

$$b + \lambda_{1b} < 0,\quad 2b + \lambda_{1b} > 0,\quad b + \lambda_{2b} < 0,\quad 2b + \lambda_{2b} < 0$$

Wir unterscheiden für die Geraden (2) und (3) die Fälle:

(2)
Wenn $R + \lambda_1 > 0$, so ist $\begin{cases} y+z > 0, & \text{wenn } a < b \\ y+z < 0 & \text{,, } a > b \end{cases} x > 0,$ wenn $\frac{a+b+\lambda_1}{a-b} > 0$

,, $R + \lambda_1 < 0$, ,, $\begin{cases} y+z > 0, & \text{,, } a > b \\ y+z < 0, & \text{,, } a < b \end{cases} x > 0,$ wenn $\frac{a+b+\lambda_1}{a-b} < 0$

$$(3)\quad \begin{cases} \text{Wenn } R+\lambda_2>0, \text{ so ist } \begin{cases} y+z>0, & \text{wenn } a>b \\ y+z<0, & \text{„ } a<b \end{cases} \Big\} x>0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{wenn } \dfrac{a+b+\lambda_2}{a-b}>0 \\ \text{„ } R+\lambda_2<0, \text{ „ } \begin{cases} y+z>0, & \text{„ } a<b \\ y+z<0, & \text{„ } a>b \end{cases} \Big\} x>0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{wenn } \dfrac{a+b+\lambda_2}{a-b}<0 \end{cases}$$

Die zweite Gerade kann, falls die gegebene Fläche ein Rotationsellipsoid und der Kegelschnitt eine Ellipse ist, durch den ersten Octanten gehen, wenn

$$R+\lambda_1>0,\quad a<b,\quad \frac{a+b+\lambda_1}{a-b}>0$$

oder

$$R+\lambda_1<0,\quad a>b,\quad \frac{a+b+\lambda_1}{a-b}<0 \quad \text{ist.}$$

Ist $a>b$, so ist $a+b+\lambda_1>0$ und $a-b>0$. Die 2te Bedingung ist nie erfüllt. Ist $a<b$, so kann $a+b+\lambda_1<0$ sein, und in diesem Falle läuft die Gerade (2) durch den 1ten Octanten.

Die Gerade (3) kann den 1ten Octanten durchschneiden, wenn

$$R+\lambda_2>0,\quad a>b,\quad \frac{a+b+\lambda_2}{a-b}>0$$

oder

$$R+\lambda_2<0,\quad a<b,\quad \frac{a+b+\lambda_2}{a-b}<0 \quad \text{ist.}$$

Ist $a<b$, so ist $a+b+\lambda_2<0$ und $a-b<0$, also $\frac{a+b+\lambda_2}{a-b}>0$.

Ist $a>b$, so kann $a+b+\lambda_2>0$ sein und in diesem Falle läuft die Gerade (3) durch den ersten Octanten.

Aus dieser Auseinandersetzung ist zu ersehen, unter welchen Bedingungen ein gegebenes Rotationsellipsoid in einem gegebenen Kegelschnitt geschnitten werden kann, wie auch dass die beiden Geraden (2) und (3) sich gegenseitig aus dem 1ten Octanten ausschliessen, da die beiden Bedingungen $a>b$ und $a<b$ nicht zugleich bestehen können.

Im Falle II., 1) ist $a>0$, $b<0$, $S>4$, $R>0$, $\lambda_{1b}>0$, $\lambda_{2b}>0$, $b+\lambda_1>0$, $2b+\lambda_1<0$, $b+\lambda_2>0$, $2b+\lambda_2>0$.

(2) Wenn $R+\lambda_1 > 0$, so ist $y+z > 0$, $x > 0$, wenn $a+b+\lambda_1 > 0$

(3) „ $R+\lambda_2 > 0$, „ $y+z < 0$, $x > 0$, „ $a+b+\lambda_2 > 0$

$R+\lambda_1 < 0$ und $R+\lambda_2 < 0$ ist unmöglich. Nur die 2te Gerade kann durch den 1ten Octanten gehen, vorausgesetzt, dass $\frac{a+b+\lambda_1}{a-b} > 0$ ist.

Es bleibt noch der letzte Fall zu erledigen:

$\lambda_{1b} < 0$, $\lambda_{2b} > 0$, $b+\lambda_1 < 0$, $2b+\lambda_1 < 0$, $b+\lambda_2 < 0$, $2b+\lambda_2 < 0$

Wir trennen die 2 Fälle $R > 0$ und $R < 0$

$$\underline{R > 0}$$

(2) Wenn $R+\lambda_1 < 0$, so ist $y+z > 0$, $x > 0$, wenn $a+b+\lambda_1 > 0$

$$\underline{R < 0}$$

(3) „ $R+\lambda_2 > 0$, so ist $y+z > 0$, $x > 0$, wenn $a+b+\lambda_2 > 0$

Nur in diesen Fällen kann, wie man sich leicht überzeugen kann, die 2te oder 3te Gerade durch den 1ten Octanten laufen, wobei sie ebenso wie $R > 0$ und $R < 0$, sich gegenseitig aus demselben ausschliessen. Hiermit ist die pag. 201 ausgesprochene Behauptung, dass es nur 2 Kegel von der bekannten Eigenschaft gebe, vollständig bewiesen. Ferner ist aus der obigen Betrachtung folgender Satz zu folgern:

Eine Rotationsfläche 2ter Ordnung kann dann und nur dann von einer Ebene in einem gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden, wenn $\frac{a+b+\lambda_{1b}}{a-b} > 0$ oder $\frac{a+b+\lambda_{2b}}{a-b} > 0$ ist, vorausgesetzt, dass die Gleichung der Fläche in der Form

$$ax^2+by^2+bz^2-1=0$$

gegeben ist und dass λ_{1b} und λ_{2b} die obigen Werte haben.

Dieser Satz gilt auch für den Rotationskegel, in welchem Falle die pag. 191 erhaltene kubische Parabel in 3 Geraden

1) $x=0$, $y+z=0$

2) $x=-\frac{Rab(a+b+\lambda_{1b})}{(a-b)(b+\lambda_{1b})\lambda_{1b}}$; $\quad y+z=-\frac{Rab(2b+\lambda_{1b})}{(a-b)(b+\lambda_{1b})\lambda_{1b}}$

3) $x=-\frac{Rab(a+b+\lambda_{2b}b)}{(a-b)(b+\lambda_{2b})\lambda_{2b}}$; $\quad y+z=-\frac{Rab(2b+\lambda_{2b})}{(a-b)(b+\lambda_{2b})\lambda_{2b}}$

zerfällt.

Diese 3 Geraden schneiden sich in dem unendlich fernen Punkte. Die Gleichungen derselben unterscheiden sich von den pag. 200 aufgestellten bloss dadurch, dass $R+\lambda$ durch λ ersetzt ist. Auch von diesen 3 Geraden kann nur eine durch den 1ten Octanten gehen.

Die Annahme $b = c$ kann unsere Beweise nicht beeinflussen, da ja a, b, c von vornherein als gleichberechtigte Grössen auftreten. Wir erhalten die Gleichugen der Geraden in den Fällen, wo $a = c$ und $a = b$ ist, aus den gefundenen durch cyklische Vertauschung.

Es soll z. B. der Kegel

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 0$$

in der Hyperbel

$$\frac{\xi^2}{16} - \frac{\eta^2}{4} = 1$$

geschnitten werden

$$b = c = -\frac{1}{9}, \quad a = \frac{1}{25}, \quad A = 4, \quad B = \sqrt{-4} = 2i, \quad R = -\frac{3}{16}$$

$$S = -\frac{9}{4}, \quad \sqrt{S(S-4)} = \frac{15}{4}, \quad \lambda_{1b} = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_{2b} = \frac{1}{12}$$

In der Geraden (2) ist $y+z < 0$

$$(3) \qquad x = \frac{99}{3400}, \quad y+z = \frac{45}{136}, \quad \frac{a+b+\lambda_2}{a-b} = \frac{\frac{1}{25}+\frac{1}{12}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{9}} > 0$$

$$p = \frac{5}{3}, \quad u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{34}}$$

§ 4. Discussion des Problems, wenn die gegebene Fläche ein Paraboloid ist.

Von der Gleichung des Paraboloids

$$ax^2+by^2 = 2z$$

ausgehend, gelangen wir auf einem Wege, analog dem im § 1. eingeschlagenen, zu den Bedingungsgleichungen:

$$RW_1 = U_1 V_1, \quad SV_1 = U_1^2, \quad T = u^2+v^2+w^2 = 1$$

wo

$$\delta = -2p\,abw + av^2 + bu^2 = W_1$$
$$\mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2 = abw^2 = \ldots\ldots V_1$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a(v^2 + w^2) + b(u^2 + w^2) = U_1$$

Die obigen Bedingungsgleichungen lassen sich in der Form schreiben:

$$\frac{U_1}{p^2} + \lambda\frac{T}{p^2} = 0, \quad \frac{RW_1}{p^2} + \lambda\frac{V_1}{p^2} = 0, \frac{SV_1}{p^2} + \lambda\frac{U_1}{p^2} = 0$$

Ist $p = 0$, so kann man die Werte der Variablen u, v, w direct aus den obigen Gleichungen berechnen. Da die Substitution

$$\frac{u^2}{p^2} = x, \quad \text{etc.}$$

jetzt zu keinem Resultate leiten würde, weil in W_1 die erste Potenz von w vorkommt, so führen wir eine lineare Substitution ein:

$$\frac{u}{p} = x, \quad \frac{v}{p} = y, \quad \frac{w}{p} = z$$

nach welcher jedem reellen Wertsysteme x, y, z eine reelle Ebene entspricht. Die Bedingungsleichungen sind alsdann:

1) $(b+\lambda)x^2 + (a+\lambda)y^2 + (a+b+\lambda)z^2 = 0$
2) $Rbx^2 + Ray^2 - 2Rabz + \lambda abz^2 = 0$
3) $\lambda bx^2 + \lambda ay^2 + \{Sab + \lambda(a+b)\}z^2 = 0$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$-2Rab\lambda z + \lambda^2 abz^2 - SRabz^2 - R\lambda(a+b)z^2 = 0$$

Diese Gleichung hat 2 Lösungen:

$$z = \frac{2Rab\lambda}{ab\lambda^2 - R(a+b)\lambda - RSab} \quad \text{und} \quad z = 0$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (3) drücken wir auch x und y durch λ aus:

$$x^2 = \frac{b(\lambda^2 + \lambda Sa + Sa^2)}{\lambda^2(b-a)}z^2$$

$$y^2 = \frac{a(\lambda^2 + \lambda Sb + Sb^2)}{\lambda^2(b-a)}z^2$$

$$z = \frac{2Rab\lambda}{ab\lambda^2 - R(a+b)\lambda - RSab}$$

Einem Punkte x, y, z entsprechen 4 symmetrisch zu den Coordinatenebenen liegende Ebenen. Dem Werte $z = 0$ entspricht

$$x = y = 0$$

also die unendlich ferne Ebene.

Beschränken wir uns auf reelle Schnittebenen, so müssen x^2, y^2, z^2 positiv sein, x, y, z positiv oder negativ. Nehmen wir an,

$$\lambda = i\lambda'$$

sei imaginär, so ist z ein Ausdruck von der Form

$$\frac{ci}{c_1 + c_2 i} = \frac{cc_2}{c_1^2 + c_2^2} + \frac{cc_1}{c_1^2 + c_2^2} i = c' + c'' i$$

also eine complexe Grösse.

Demnach ist, vorausgesetzt, dass λ immer reell bleibt, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein gegebenes Paraboloid

$$ax^2 + by^2 = 2z$$

in einem gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden kann:

$$\frac{b(\lambda^2 + \lambda Sa + Sa^2)}{b - a} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{a(\lambda^2 + \lambda Sb + Sb^2)}{b - a} > 0$$

Die Function $\lambda^2 + \lambda St + St^2$ hat 2 Nullpunkte:

$$\lambda_{1t} = \frac{t}{2}(-S + \sqrt{S(S-4)}) \quad \text{und} \quad \lambda_{2t} = \frac{t}{2}(-S - \sqrt{S(S-4)})$$

Da

$$\lim_{\lambda = +\infty} (\lambda^2 + \lambda St + St^2) = +\infty \text{ und } \lim_{\lambda = -\infty} (\lambda^2 + \lambda St + St^2) = +\infty$$

ist, so muss diese Function im Gebiete der λ-Werte zwischen λ_{1t} und λ_{2t} negativ sein. Im Falle des Kreises, wo

$$\lambda_{1t} = \lambda_{2t}$$

berührt die durch die Function dargestellte Curve die λ-Achse.

Die obigen Bestimmungen setzen die gegenseitige Lage der 4 Wurzeln λ_{1a}, λ_{2a}, λ_{1b}, λ_{2b} fest, für welche es reelle Schnittebenen giebt. Einem Punkte x', y', z' entspricht die Schnittebene:

$$\pm x' \,.\, x \pm y' \,.\, y + z' \,.\, z - 1 = 0$$

wo x, y, z die laufenden Coordinaten sind.

Ist die Gleichung des Paraboloids in der Form

$$ax^2+bz^2-2y=0 \quad \text{oder} \quad by^2+az^2-2x=0 \quad \text{etc.}$$

gegeben, so muss in den Resultaten eine der Axenvertauschung entsprechende Vertauschung der Grössen u, v, w durchgeführt werden.

Bei dem Rotationsparaboloid lauten die Bedingungsgleichungen:

1) $(b+\lambda)(x^2+y^2)+(2b+\lambda)z^2=0$
2) $R(x^2+y^2)-2Rbz+\lambda bz^2=0$
3) $\lambda(x^2+y^2)+(Sb+2\lambda)z^2=0$

Hier ist λ nicht mehr ein willkürlicher Parameter, sondern kann nur die 2 Werte

$$\lambda_{1b}=\frac{b}{2}(-S+\sqrt{S(S-4)}) \quad \text{und} \quad \lambda_{2b}=\frac{b}{2}(-S-\sqrt{S(S-4)})$$

annehmen. Die 3 Gleichungen sind demnach befriedigt durch

1) $x^2+y^2=0; \quad z^2=0$

2) $x^2+y^2=-\dfrac{2b+\lambda_1}{b+\lambda_1}z^2, \quad z=\dfrac{2Rb\lambda_1}{b\lambda_1^2-2R\lambda_1-RSb}$

3) $x^2+y^2=-\dfrac{2b+\lambda_2}{b+\lambda_2}z^2, \quad z=\dfrac{2Rb\lambda_2}{b\lambda_2^2-2R\lambda_2-RSb}$

Berücksichtigen wir, dass, wenn $S>4$, $b+\lambda_1<0$, $2b+\lambda_1>0$, $b+\lambda_2<0$, $2b+\lambda_2<0$ ist, so sehen wir ein, dass im Falle (2) $x^2+y^2>0$, im Falle (3) $x^2+y^2<0$ ist.

Das Rotationsparaboloid kann demnach in jeder Ellipse geschnitten werden.

Der Fall $S=4$ führt auf den Kreisschnitt.

§ 5. Discussion des Problems, wenn der gegebene Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist.

Soll eine Oberfläche 2ten Grades in einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden, so muss

$$R=S=0$$

sein. Wir sind gezwungen, direct $\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}$ in die Rechnung zu

ziehen, um der Forderung, dass die Achse der Hyperbel einen bestimmten Wert habe, Genüge zu leisten. Die beiden Bedingungsgleichungen für u, v, w, p nehmen, wenn die Fläche die Gleichung

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

hat, die Form an:

$$a(v^2+w^2)+b(u^2+w^2)+c(u^2+v^2)-U=0$$

$$\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}=-\frac{1}{A^4}=\frac{V^2}{W^2}$$

wo U, V, W dieselben Werte, wie in § 1. haben. Aus der letzten Gleichung folgt, wenn wir berücksichtigen, dass

$$T=u^2+v^2+w^2=1$$

$$\left(\frac{V}{p^2}\right)^2=-\frac{1}{A^4}\left(\frac{W}{p^2}\right)^2\frac{T}{p^2}$$

Führen wir hier

$$\frac{u^2}{p^2}=x,\quad \frac{v^2}{p^2}=y,\quad \frac{w^2}{p^2}=z$$

ein, so verwandeln sich die obigen Gleichungen in

1) $(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0$

2) $(bcx+acy+abz)^2+\frac{1}{A^4}(bcx+acy+abz-abc)^2(x+y+z)=0$

Aus der Gleichung 1) ist zu ersehen, dass das Ellipsoid, wie auch das zweischalige Hyperboloid, wenn die reelle Achse die grösste ist, in einer gleichseitigen Hyperbel nicht geschnitten werden können. Für die übrigen Fälle suchen wir x, y, z durch einen veränderlichen Parameter darzustellen. Die Gleichung der ebenen Curve 3ter Ordnung, welche durch die obigen Gleichungen dargestellt ist, ist zu erhalten, indem man die Gleichung (2) auf ein neues Coordinatensystem transformirt, in welchem die ζ-Achse die Richtungscos. der Ebene (1) hat, und $\zeta=0$ setzt

$$x=f'\xi+f'\eta+f''\zeta$$
$$y=g'\xi+g'\eta+g''\zeta$$
$$z=h'\xi+h'\eta+h''\zeta$$

$$f''=q(b+c),\quad g''=q(a+c),\quad h''=q(a+b)$$

$$q=\frac{1}{\sqrt{(b+c)^2+(a+c)^2+(a+b)^2}}$$

$$(2)\quad \{(bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta)\}^3$$
$$+\frac{1}{A^4}\{[(bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta-abc]^2 .$$
$$.\ [(f+g+h)\xi+(f'+g'+h')\eta]\}=0$$

Wir setzen:

$$(bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta \quad = x_1$$
$$(bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta-abc . = x_2$$
$$(f+g+h)\xi+(f'+g'+h')\eta \quad = x_3$$

wobei sich x_1, x_2, x_3 höchstens um Constante, als Factoren von homogenen Coordinaten unterscheiden können. Die ebene Curve hat alsdann die Gleichung

$$x_1^3+\frac{1}{A^4}x_2^2x_3=0$$

sie ist eine Unicursalcurve, die einen Rückkehrpunkt

$$x_1=0.\quad x_2=0$$

besitzt. Da die beiden Geraden

$$x_1=0,\quad x_2=0$$

parallel sind, so liegt der Rückkehrpunkt im Unendlichen. Die Curve besteht aus 2 Zweigen, was auch ganz plausibel ist, weil sie als Projection der parabolischen Hyperbel (pag. 190) aufgefasst werden kann.

Wir können

$$x_1=\lambda x_2 \quad \text{und} \quad \lambda^2 x_1=-\frac{1}{A^4}x_3$$

setzen, wo λ ein willkürlicher Parameter ist. Da nun

$$x_2=x_1-abc$$

ist, so ist

$$x_1=\lambda x_2=\lambda(x_1-abc)$$

woraus folgt:

$$x_1=-\frac{abc}{1-\lambda}\lambda \quad \text{und} \quad x_3=\frac{abcA^4\lambda^3}{1-\lambda}$$

Aus den obigen Substitutionsgleichungen sind ξ, η durch x_1 und x_3 auszudrücken:

$$\xi = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & bcf'+acg'+abh' \\ x_3 & f'+g'+h' \end{vmatrix}; \quad \eta = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & bcf+acg+abh \\ x_3 & f+g+h \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a-b)(b-c)(a-c)$$

Die Coordinaten der ebenen Curve 3ter Ordnung sind durch den Parameter λ ausgedrückt:

$$x = k_x f(\lambda, a), \quad y = k_y f(\lambda, b), \quad z = k_z f(\lambda, c)$$

wo

$$k_x = \frac{abc}{(a-b)(a-c)}, \quad k_y = \frac{abc}{(b-a)(b-c)}, \quad k_z = \frac{abc}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(\lambda, t) = \frac{\lambda}{\lambda-1}(1-A^4t^2\lambda^2), \quad k_x+k_y+k_z = 0$$

Wir untersuchen nun den Verlauf der Function $f(\lambda, t)$. Dieselbe hat 3 Null- und einen Unendlichkeitspunkt, in denen sie ihr Zeichen wechseln kann. Vorausgesetzt, dass $1 \gtrless A^4t^2$, sind die Nullpunkte 0, $\frac{1}{A^2t}$ und $-\frac{1}{A^2t}$ und der Unendlichkeitspunkt $\lambda = 1$. Das Vorzeichen von t hat augenscheinlich keinen Einfluss auf das Zeichen von $f(\lambda, t)$. Ist ε eine hinreichend kleine, positive oder negative reelle Zahl, so ist $f(\varepsilon, t) > 0$, wenn $\varepsilon < 0$, und $f(\varepsilon, t) < 0$, wenn $\varepsilon > 0$ ist. Ferner ist

$$\lim_{\lambda=+\infty} f(\lambda, t) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda=-\infty} f(\lambda, t) = -\infty$$

Daraus ist schon der Verlauf der Curve ersichtlich (S. Fig. H_1H_2)

Im Grenzfalle $1 = A^4t^2$ hat $f(\lambda, t)$ für $\lambda = 1$ den Wert $^0/_0$, so dass

$$f(\lambda, t) = f'(\lambda, t) = f''(\lambda, t) = -\infty$$

ist. (S. Fig. H_3).

Nun können wir die Gebiete angeben, in welchen $f(\lambda, t)$ positiv oder negativ ist.

$t > 0$ $\qquad f(\lambda, t) > 0$, wenn

$1 > A^2t$	$-\frac{1}{A^2t} < \lambda < 0; \quad 1 < \lambda < \frac{1}{A^2t}$
$1 < A^2t$	$-\frac{1}{A^2t} < \lambda < 0; \quad \frac{1}{A^2t} < \lambda < 1$
$1 = A^2t$	$-\frac{1}{A^2t} < \lambda < 0$

$t \gtrless 0$ $\qquad f(\lambda, t) \lessgtr 0$, wenn

$1 \gtrless A^2t$ $\quad -\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2t};\ 0 < \lambda < 1;\ \frac{1}{A^2t} < \lambda < \infty$

$1 \lessgtr A^2t$ $\quad -\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2t};\ 0 < \lambda < \frac{1}{A^2t};\ 1 < \lambda < \infty$

$1 = A^2t$ $\quad -\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2t};\ 0 < \lambda < +\infty$

Ist $t < 0$, so muss überall das Zeichen von $\frac{1}{A^2t}$ resp. $-\frac{1}{A^2t}$ in das entgegengesetzte geändert werden. Diese Tabelle giebt die Möglichkeit, in jedem gegebenen Falle die Lösung des Problems anzugeben (pag. 196).

Ist die gegebene Fläche eine **Rotationsfläche** und beispielsweise $b = c$, so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

1) $2bx+(a+b)(y+z) = 0$

2) $\{b^2x+ab(y+z)\}^3+\frac{1}{A^4}(b^2x+ab(y+z)-ab^2)^2(x+y+z) = 0$

Die frühere Methode verlässt uns hier, weil $\Delta = 0$ ist.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\frac{x}{y+z} = -\frac{a+b}{2b}$$

oder

$$x = -\frac{a+b}{2b}(y+z)$$

$$y+z = -\frac{2b}{a+b}x$$

Setzen wir diesen Wert von $y+z$ in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir eine kubische Gleichung, welche die Wurzel $x = 0$ hat. Dem Werte $x = 0$ entspricht

$$y+z = 0$$

Das Problem reducirt sich also auf die Auflösung der übrigbleibenden quadratischen Gleichung, deren 2 Wurzeln a und b seien. Die ebene Curve 3ter Ordnung zerfällt im Falle, dass die gegebene Fläche eine Rotationsfläche

$$ax^2+b(y^2+z^2) = 1$$

ist, in 3 Gerade

1) $x = 0, \quad y + z = 0$

2) $x = \alpha, \quad y + z = -\frac{2b}{a+b}\alpha$

3) $x = \beta, \quad y + z = -\frac{2b}{a+b}\beta$

Im Falle des Kegels sind die Bedingungsgleichungen:

1) $(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0$

2) $(bcx + acy + abz)^3 + \frac{1}{A^4} a^2 b^2 c^2 (x+y+z) = 0$

Nur ein solcher Kegel kann in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden, bei dem die reelle Achse nicht die grösste ist, wie man aus der Gleichung (1) folgern kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so transformiren wir die Gleichung der Fläche (2) auf ein neues Coordinatensystem ξ, η, ζ, so dass $\zeta = 0$ der Durchschnitt der Fläche (2) und der Ebene (1) sei.

$$2) \quad \{(bcf + acg + abh)\xi + (bcf' + acg' + abh')\eta\}^3 + \frac{a^2 b^2 c^2}{A^4}\{(f+g+h)\xi + (f'+g'+h')\eta\} = 0$$

Wir setzen:

$$(bcf + acg + abh)\xi + (bcf' + acg' + abh')\eta = \bar{x}_1$$
$$(f+g+h)\xi + (f'+g'+h')\eta = \bar{x}_3$$

wo $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_3$ zunächst als rein analytische Ausdrücke eingeführt sind. Wir wissen aber, dass sie sich von Coordinaten eines schiefwinkligen Systems höchstens um Constante, als Factoren, unterscheiden können, so dass bei einer strengen Discussion der Curve in Bezug auf die Coordinatenaxen man die Gleichung der Curve in der Form

$$\bar{\alpha}^3 \bar{x}_1^3 + \frac{\bar{\beta}}{A^4} a^2 b^2 c^2 \bar{x}_3 = 0$$

schreiben müsste, wo $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ leicht zu bestimmende Werte haben.

$$(2) \qquad \bar{x}_1^3 + \frac{a^2 b^2 c^2}{A^4} \bar{x}_3 = 0$$

Diese ebene Curve 3ter Ordnung ist als Projection der früher für den Kegel erhaltenen kubischen Parabel zu betrachten.

Führen wir hier den Parameter λ ein, indem wir setzen:

$$\bar{x}_1 = abc\lambda, \quad \bar{x}_3 = -A^4 abc\lambda^3$$

Wir hatten (pag. 211)

$$x_1 = \frac{abc\lambda}{\lambda - 1}, \quad x_3 = -\frac{A^4 abc\lambda^3}{\lambda - 1}$$

so dass

$$\bar{x}_1 = x_1(\lambda - 1) \quad \text{und} \quad \bar{x}_3 = x_3(\lambda - 1)$$

Es ist x, y, z auf folgende Weise durch λ ausgedrückt:

$$x = k_x F(\lambda, a), \quad y = k_y F(\lambda, b), \quad z = k_z F(\lambda, c)$$

wo

$$k_x = \frac{abc}{(a-b)(a-b)} \text{ etc.}, \quad F(\lambda, t) = \lambda(1 - A^4 t^2 \lambda^2)$$

Die Function $F(\lambda, t)$ hat 3 Nullpunkte:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{1}{A^2 t}, \quad \lambda = -\frac{1}{A^2 t}$$

Ferner ist

$$F(+\infty, t) = -\infty, \quad F(-\infty, t) = +\infty$$

so dass der Verlauf der Curve klar ist. (S. Fig. H_4).

$F(\lambda, t) > 0$, wenn

$t > 0$	$-\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2 t}; \quad 0 < \lambda < \frac{1}{A^2 t}$
$t < 0$	$-\infty < \lambda < \frac{1}{A^2 t}; \quad 0 < \lambda < -\frac{1}{A^2 t}$

$F(\lambda, t) < 0$, wenn

$$-\frac{1}{A^2 t} < \lambda < 0; \quad \frac{1}{A^2 t} < \lambda < \infty$$

$$\frac{1}{A^2 t} < \lambda < 0; \quad -\frac{1}{A^2 t} < \lambda < \infty$$

Ist der Kegel ein Rotationskegel, so dass z. B. $b = c$ ist, so bestimmen wir aus der 1ten Gleichung

$$\frac{x}{y+z} = -\frac{a+b}{2b}$$

woraus folgt:

$$y + z = -\frac{2b}{a+b} x = \mu \cdot x$$

wo $0 < \mu < 1$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass der Rotationskegel in der gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden kann. Die Gleichung (2) geht über in

$$(b^2 x + \mu a b x)^3 + \frac{a^2 b^2 c^2}{A^4}(x + \mu x) = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist

$$x = 0, \quad (y + z = 0)$$

$$(b + \mu a) b x^2 + \frac{a^2 c^2}{A^4}(1 + \mu) = 0$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich 2 Wurzeln:

$$x = +a^2 \quad \text{und} \quad x = -a^2$$

x kann nicht imaginär sein, denn wir haben

$$x = \pm \sqrt{-\frac{a^2 c^2 (1+\mu)}{A^4 (b + \mu a) b}}$$

x könnte imaginär werden, wenn $b + \mu a$ negativ wird, also wenn

$$|b| > \mu a, \quad \left|\frac{b}{a}\right| > \mu, \quad \left|\frac{b}{a}\right| > -\frac{2b}{a+b}, \quad \left|\frac{b}{a}\right| > -\frac{b+b}{a+b}$$

$$\left|\frac{b}{a}\right| > \left|\frac{b+b}{a+b}\right|$$

$\frac{b}{a}$ ist ein echter Bruch. Wenn wir zum Zähler und Nenner eines echten Bruches das Gleiche hinzuaddiren, so wird der Bruch grösser, so dass die obige Ungleichung unmöglich ist, mithin x reell.

Die einzige Gerade, deren Abbildung reelle Ebenen liefert, ist

$$x = a^2, \quad y + z = \mu a^2$$

Hiermit ist gezeigt, wie die Raumcurve im Falle, dass der gegebene Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, in eine ebene Curve 3ter Ordnung deformirt, resp. in 3 Gerade degenerirt, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist.

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo ein Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden soll. Die beiden Bedingungsgleichungen lauten, wenn

$$ax^2 + by^2 - 2z = 0$$

die Gleichung der Fläche ist:

$$U_1 = a(v^2+w^2)+b(u^2+w^2) = 0$$

$$-\frac{1}{A^4} = \frac{a^3b^3w^6}{(-2pabw+av^2+bu^2)(u^2+v^2+w^2)}$$

Führen wir hier die Substitution $\frac{u}{p} = x$ etc. ein.

$$bx^3+ay^3+(a+b)z^2 = 0$$
$$a^3b^3A^4z^6+(bx^2+ay^2-2abz)^2(x^2+y^2+z^2) = 0$$

Beide Gleichungen sind für

$$x = y = z = 0$$

befriedigt. Schliessen wir diesen Wert aus, so erhalten wir:

1) $bx^2+ay^2+(a+b)z^2 = 0$
2) $a^3b^3A^4z^4+((a+b)z+2ab)^2(x^2+y^2+z^2) = 0$

Die Gleichung (1) stellt einen Kegel dar. Es darf nicht a und b zugleich positiv sein, wenn der Kegel reell sein soll, d. h. das Paraboloid muss ein hyperbolisches sein. Wir führen nun Polarcoordinaten ein:

$$x = \varrho l, \quad y = \varrho m, \quad z = \varrho n$$

Dabei variirt ϱ von 0 bis ∞ und l, m, n sind die Cos. der Winkel, welche die Richtung ϱ mit den Achsen bildet.

Da $z = 0$ ausgeschlossen ist, so ist auch $\varrho = 0$ ausgeschlossen, so dass die Gleichungen (1) und (2) lauten

(1) $bl^2+am^2+(a+b)n^2 = 0$
(2) $a^3b^3A^4\varrho^4n^4+((a+b)\varrho n+2ab)^2\varrho^2 = 0$

woraus folgt:

$$\varrho = -\frac{2ab(a+b\pm A^2n\sqrt{-ab})}{a^3b^3A^4n^3+(a+b)^2n}$$

Das Zeichen + oder − muss immer so genommen werden, dass ϱ positiv resultirt. Aus den Gleichungen

$$bl^2+am^2 = -(a+b)n^2$$
$$l^2+m^2 = 1-n^2$$

folgt:

$$l^2 = \frac{a+bn^2}{a-b}, \quad m^2 = \frac{b+an^2}{b-a}$$

$$x^2 = \varrho^2\frac{a+bn^2}{a-b}, \quad y^2 = \varrho^2\frac{b+an^2}{b-a}, \quad z = \varrho n$$

wo ϱ eine bekannte Function von n ist, so dass x, y, z durch den Parameter n ausgedrückt sind.

Sollen die Schnittebenen reell sein, so ist n gewissen Bedingungen unterworfen, und zwar darf n bloss zwischen den Grenzen 0 und $\pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$ oder $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ variiren, was daraus folgt, dass

$$\frac{a+bn^2}{a-b} = \alpha^2 \quad \text{und} \quad \frac{b+an^2}{a-b} = -\beta$$

sein muss, wenn α, β reell sind. Dabei müssen wir von den beiden Werten $\pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$ und $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ immer den kleinern nehmen, damit sowol x^2 als auch y^2 positiv resultiren. Diese Grenzgebiete für n ergeben sich auch geometrisch aus der Betrachtung des Kegels

$$bx^2+ay^2+(a+b)z^2 = 0$$

§ 6. Discussion des Problems, wenn der gegebene Kegelschnitt eine Parabel ist.

Die allgemeine Gleichung 2ten Grades des durch den Schnitt der Ebene

$$ux+vy+wz-p = 0$$

und einer Oberfläche 2ten Grades hervorgebrachten Kegelschnittes war:

$$\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+2\mathfrak{C}\xi\eta+2\mathfrak{D}\xi+2\mathfrak{E}\eta+\mathfrak{F} = 0$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ bekannte Functionen sind. Soll die Schnittcurve eine Parabel sein, so muss

$$\mathfrak{AB}-\mathfrak{C}^2 = 0$$

sein. Der Parameter derselben ist bestimmt:

$$q^2 = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}^2+\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2-2\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^3} = \frac{W}{U_1^3}$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Gestalt an:

$$q^2 U_1^3 = W, \quad V = 0, \quad T = u^2+v^2+w^2 = 1$$

Wir sehen daraus, dass dieselbe Untersuchung zugleich für die Hyperboloide und den Kegel giltig ist, da diese Bedingungsgleichungen alle von F unabhängig sind, das constante Glied 1 aber nur in F vorkam.

Nehmen wir also an, die gegebene Fläche habe die Gleichung

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0 \quad \text{oder} \quad ax^2+by^2+cz^2=0$$

und setzen dementsprechend die Werte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ ein, so erhalten wir:

$$\overline{W}=\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{E} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{D} & 0 & \mathfrak{E} \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} af^2+bg^2+ch^2 & p(afu+bgv+chw) & aff'+bgg'+chh' \\ aff'+bgg'+chh' & p(af'u+bg'v+ch'w) & af'^2+bg'^2+ch'^2 \\ p(afu+bgv+chw) & 0 & p(afu+bgv+chw) \end{vmatrix}$$

$$\overline{W}=p^2\{abw^2[(a-c)u^2+(b-c)v^2]+acv^2[(c-b)w^2+(a-b)u^2] \\ +bcu^2[(b-a)v^2+(c-a)w^2]\}$$

Durch Einführung der Substitution

$$\frac{u^2}{p^2}=x, \quad \frac{v^2}{p^2}=y, \quad \frac{w^2}{p^2}=z$$

transformiren sich die Gleichungen:

(1) $V=bcx+acy+abz=0$

(2) $$q^2\frac{U^3}{p^6}-\frac{\overline{W}T}{p^6}=q^2\{(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z\}^3 \\ -p^2\{a(b-c)^2yz+b(c-a)^2xz+c(a-b)^2xy\}(x+y+z)=0$$

Die Combination beider Gleichungen stellt eine ebene Curve 3ter Ordnung dar und zwar eine semikubische Parabel.

Um dieses zu beweisen, brauchen wir nur ein passendes Coordinatensystem zu legen. Es seien die Grössen x_1, y_1 unabhängig veränderlich und

$$x=\frac{a(b-c)}{\Delta}(x_1-ay_1)$$

$$y=\frac{b(c-a)}{\Delta}(x_1-by_1)$$

$$z=\frac{c(a-b)}{\Delta}(x_1-cy_1)$$

$$\Delta=(a-b)(b-c)(c-a)=(c-b)a^2+(a-c)b^2+(b-a)c^2$$

Die Gleichung

$$bcx + acy + abz = \frac{x_1 abc}{\Delta}(b-c+c-a+a-b)$$
$$- y_1 \frac{abc}{\Delta}(a(b-c)+b(c-a)+c(a-b))$$

ist identisch null, so dass die Gleichung (1) für jedes System x_1, y_1 befriedigt ist. Setzen wir also die Werte für x, y, z in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir eine Gleichung in x_1, y_1, welche den Schnitt der durch die beiden Bedingungsgleichungen dargestellten Flächen liefert. Berücksichtigen wir, dass

$$(b+c)x+(a+c)y)+(a+b)z = x_1$$
$$a(b-c)^2yz+b(c-a)^2xz+c(a-b)^2xy = -abc\,y_1^2$$
$$x+y+z = y_1$$

so lautet die Gleichung (2):

$$(2) \quad q^2x_1^3+p^2\,abc\,y_1^3 = 0$$

Nun ist aber

$$y_1 = x+y+z = \frac{1}{p^2}$$

so dass die Gleichung resultirt:

$$(2) \quad q^2x_1^3+abc\,y_1^2 = 0$$

wo x_1, y_1 sich von schiefwinkligen Coordinaten höchstens um Constante unterscheiden, die als Factoren auftreten. Dieses ist die Gleichung einer semikubischen Parabel, deren Spitze im Anfangspunkte

$$x = y = z = 0$$

liegt. Denn setzen wir

$$x_1 = y_1 = 0$$

so erhalten wir:

$$(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z = 0$$
$$x+y+z = 0$$
$$bcx+acy+abz = 0$$

Dieses System von homogenen linearen Gleichungen kann nur durch die Werte

$$x = y = z = 0$$

befriedigt werden.

Für die Werte

$$x_1 = -p\lambda^2, \quad \text{wo} \quad p = abc \quad \text{ist, und} \quad q\lambda^3 = y_1$$

geht die Gleichung

$$q^2 x_1^3 + p^3 y_1^2 = 0$$

in die Identität

$$-q^2 p^3 \lambda^6 + q^2 p^3 \lambda^6 = 0$$

über. Dabei ist λ sehr einfach durch p auszudrücken und wir könnten sogar p als Parameter einführen, was jedoch nicht zweckmässig erscheint.

Die Coordinaten der Curve nehmen die Gestalt an:

$$x = k_x' \lambda^2 \left(\lambda + \frac{p}{aq}\right), \quad y = k_y' \lambda^2 \left(\lambda + \frac{p}{bq}\right), \quad z = k_z' \lambda^2 \left(\lambda + \frac{p}{cq}\right)$$

wo

$$k_x' = \frac{a^2 q}{(a-b)(a-c)}, \quad k_y' = \frac{b^2 q}{(b-c)(b-a)}, \quad k_z' = \frac{c^2 q}{(c-a)(c-b)}$$

Die 3 Coefficienten k_x', k_y', k_z' können nicht alle zugleich dasselbe Vorzeichen haben, weil die Zähler wesentlich positiv sind, von den Nennern dagegen wenigstens einer negativ sein muss.

$$(a-b)(a-c) = K^2, \quad (b-a)(b-c) = L^2, \quad (a-c)(b-c)(a-b)^2 = -K^2 L^2$$
$$(c-a)(c-b) < 0$$

Demnach wird von den 3 Ausdrücken $\lambda + \frac{p}{aq}$, $\lambda + \frac{p}{bq}$, $\lambda + \frac{p}{cq}$ wenigstens einer negativ sein müssen, damit x, y, z positiv seien.

Bei den Rotationsmittelpunktsflächen ist die Lage der Schnittebenen eine der früher erhaltenen ganz analoge.

Soll ein Paraboloid

$$ax^2 + by^2 = 2z$$

von der Ebene

$$ux + vy + wz - p = 0$$

in einer Parabel geschnitten werden, so muss die Gleichung

$$\mathfrak{AB} - \mathfrak{C}^2 = ab\, w^2 = 0$$

erfüllt sein, aus welcher $w = 0$ folgt.

Eine Schaar von Parallelebenen schneidet das Paraboloid in Parabeln, welche der Gestalt und der Grösse nach gleich sind. Denn transformiren wir die Coordinaten, indem wir setzen:

$$x = x'u - y'v + \alpha$$
$$y = x'v + y'u + \beta$$
$$z = z' + \gamma$$

und die Gleichung

$$ax^2 + by^2 - 2z = 0$$

in Bezug auf diese Coordinaten, so erhalten wir, wenn wir $x' = 0$ setzen, die Gleichung der Schnittcurve der Ebene

$$ux + vy - p = 0$$

mit dem Paraboloid.

$$y'^2(av^2 + bu^2) + 2y'(b\beta u - a\alpha v) - 2(z' + \gamma) + a\alpha^2 + b\beta^2 = 0$$

Wir wählen α, β, γ so, dass

$$b\beta u - a\alpha v = 0, \quad a\alpha^2 + b\beta^2 = 2\gamma$$

Alsdann geht die obige Gleichung über in

$$y'^2 = \frac{2}{av^2 + bu^2} z' = 2qz'$$

Dieses ist die Gleichung einer Parabel, wobei q von p unabhängig ist.

Aus der obigen Gleichung folgt ferner:

$$u^2 = \frac{1 - aq}{q(b - a)}, \quad v^2 = -\frac{1 - bq}{q(b - a)}$$

Ausserdem muss noch die Bedingung

$$u\alpha + v\beta - p = 0$$

erfüllt sein.

Aus den beiden Gleichungen

$$b\beta u - av\alpha = 0 \quad \text{und} \quad v\beta + u\alpha = p$$

ergiebt sich

$$\alpha = bupq \quad \text{und} \quad \beta = avpq$$

woraus

$$2\gamma = ab p^2 q$$

wo p variabel ist.

Es ist leicht einzusehen, dass wenn umgekehrt

$$u^2 = \frac{1 - aq}{q(b - a)} \quad \text{und} \quad v^2 = -\frac{1 - bq}{q(b - a)}$$

für ein gegebenes q feste Werte haben, das Paraboloid

$$ax^2 + by^2 - 2z = 0$$

von der Schaar der Ebenen

$$ux + vy - p = 0$$

in Parabeln geschnitten wird, deren Parameter gleich q ist, und deren Scheitelpunkte die Coordinaten

$$\alpha = bupq, \quad \beta = avpq, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}abp^2q$$

haben.

Dieselben Resultate können wir, allerdings in einer nicht so übersichtlichen Form, nach der allgemeinen Methode ableiten.

Ist das Paraboloid ein Rotationsparaboloid, so dass $a = b$ ist, so schneiden alle zur Rotationsaxe parallelen Ebenen dasselbe in gleichen Parabeln, deren Parameter gleich dem reciproken Werte des Coefficienten der quadratischen Glieder ist, vorausgesetzt, dass die Gleichung der Fläche in der Form

$$a(x^2+y^2) = 2z$$

gegeben ist.

Dorpat, den 6. Februar 1893.

XIII.

Miscellen.

1.

Ueber die Transformation eines Integrals.

Im Arch. d. Math. u. Phys. (2), T VII, pag. 110—112 reducirt Herr W. Láska die zwei Integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^6+at^3+1}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^8+at^4+1}}$$

auf elliptische, und zwar das erste auf eine Summe von zwei elliptischen Integralen, aber das zweite auf ein einziges elliptisches Integral. Letzteres geschieht durch die successiven Substitutionen

$$t = \frac{1}{z}, \quad z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \cos\varphi = x$$

d. h. durch die Substitution

$$t^2 = \frac{1+x}{1-x}$$

Setzt man einfach $t^2 = u$, so sinkt das Geschlecht des Integrals von 3 zu 2 herab; es muss unmöglich sein, nachher durch eine lineare Substitution das Geschlecht noch um eine Einheit zu vermindern, da eine solche Substitution das Geschlecht eines Abel'schen Integrals überhaupt nicht verändern kann. In der Tat zeigt auch eine nähere Untersuchung, dass Herr Láska in seiner Rechnung ein Versehen begangen hat (eine Verwechselung von $\sin\varphi$ und $\sin^2\frac{\varphi}{2}$). — Zu einer Summe zweier elliptischen Integrale transformirt sich das fragliche Integral bei der Substitution

$$t^2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

sowie das erste Integral für

$$t = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

wie schon Legendre gezeigt hat (vergl. Enneper, Ellipt. Functionen, Aufl. 1, p. 435).

Die unbrauchbare Substitution erwähnt Hr. L. auch in seiner „Sammlung von Formeln etc.", 2te Lieferung, p. 323.

Lund, März 1893. T. Brodén.

2.

Aufgabe.

Es soll folgender Satz bewiesen werden.

Beschreibt man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks als Grundlinien gleichschenklige Dreiecke mit lauter gleichen Basiswinkeln, so schneiden sich die 3 Hauptdiagonalen des von den Schenkeln gebildeten Sechsecks in einem Punkte.

Dieser Satz gilt gleicherweise von ebenen und sphärischen Dreiecken.

Charlottenburg. Prof. Dr. Leman.

XIV.

Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen zweiter Art.

(Fortsetzung von Nr. VIII)

Von

Ulrich Bigler.

Es sei

1^0. $c < z < \infty$; man setze

$$z-a = (c-a)\frac{1}{S^2(u)},\quad z-b = (c-a)\frac{D^2(u)}{S^2(u)},\quad z-c = (c-a)\frac{C^2(u)}{S^2(u)}$$

2^0. $a < z < c$; in diesem Falle setze man

$$z-a = (c-a)k^2 S^2(u),\quad b-z = (c-a)k^2 C^2(u),\quad c-z = c-a)D^2(u)$$

in beiden Fällen sei

$$k^2 = \frac{b-a}{c-a}$$

Dem Werte x der Variabeln z entspreche das Argument w.

$$1)\quad n = 0,\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = (0,\ 0,\ 0),\quad v = 0$$

$$P(x) = 1;\quad U(z) = \int_c^{\infty} \frac{dz}{2\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}} = -z^{-1} + \ldots$$

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = z^{-3} + \ldots$$

also ist

$$(I) = 0$$

$$U_1 = \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}} = \frac{2K}{\sqrt{(c-a)}}$$

$$\int_c^x \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}} = 2\,\frac{K-w}{\sqrt{(c-a)}}$$

also ist nach Seite 145

$$(II) + (III) = -\frac{2i\pi}{\sqrt{(c-a)}} \times w$$

und somit

$$W(x) = -\frac{2i\pi}{\sqrt{(c-a)}} \times w$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem auf Seite (127), so hat man

$$W(x) = -2i\pi \times T$$

2) $n = 1, \quad v = 0$

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0)$

$$P(x) = \sqrt{x-a} = \sqrt{(c-a)} \times \frac{1}{S(w)}$$

$$U(z) = \int_c \frac{\sqrt{z-a}}{\sqrt{(z-b)\,(z-c)}}\,dz = z^{1/2} + \ldots$$

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \frac{1}{z} + \ldots$$

also ist

$$(I) = 2i\pi\sqrt{(x-b)(x-c)} = 2i\pi(c-a) \cdot \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^2(w)}$$

Ferner ist

$$U_1 = 2\sqrt{(c-a)} \int_0^K k^2 S^2(u)\,du = 2\sqrt{(c-a)}\,(K-E)$$

$$\int_c^x \frac{\sqrt{z-a}}{\sqrt{(z-b)(z-c)}}\,dz = 2\sqrt{(c-a)} \int_w^K \frac{du}{S^2 u} =$$

$$2\sqrt{c-a}\int_{w}^{K}\left(1-D^2(u)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C(u)D(u)}{S(u)}\right)\right)du =$$

$$2\sqrt{c-a}\left[K-E--w+E\operatorname{am} w+\frac{Cw\,D(w)}{S(w)}\right]$$

also ist

$$U(x_1)-U(x_2)=-2\sqrt{(c-a)}\left[w--E\operatorname{am} w-\frac{Cw\,Dw}{Sw}\right]$$

Wird dieses noch mit $-i\pi\times P(x)$ multipl., so hat man

$$(II)+(III)=(c-a)\,.\,2i\pi\left[\frac{w-E\operatorname{am} w}{S(w)}-\frac{C(w)\,D(w)}{S^2(w)}\right]$$

somit ist

$$W(x)=(c-a)\,.\,2i\pi\,.\,\frac{w-E\operatorname{am} w}{S(w)}$$

und somit nach Seite (130)

$$W(x)=\frac{2i\pi}{3}(c-a)(b-a)\,.\,T(x)$$

2) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(0,\ \tfrac{1}{2},\ 0)$

Ich will diesen Fall nach der Formel

$$W(x)=\Pi(x-a)^{\frac{1}{2}-\alpha}(U_1V_2-U_2V_1)$$

berechnen, um zu zeigen, dass meine Formel

$$W(x)=\int U\,dZ$$

die Darstellung in elliptischen Functionen insofern erleichtert, als man nicht genötigt wird, beide Perioden eines Integrales dritter Art zu berechnen.

$$Q(z)=1,\quad U_1=\int_a^b\frac{b-z}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}\,dz$$

$$=2\sqrt{(c-a)}\int_0^K k^2C^2(u)\,du=2\sqrt{(c-a)}\,(E-l^2K)$$

$$U_2 = 2\sqrt{(c-a)}\int_K^{K+L} k^2\,C^2(u)\,du$$

Nun ist das unbestimmte Integral

$$\int k^2\,C^2(u)\,du = E\operatorname{am} u - l^2 u = Z(u) + \left(\frac{E}{K} - l^2\right)u$$

Weil

$$Z(K) = 0, \quad Z(K+L) = -\frac{i\pi}{2K}$$

so ist

$$U_2 = 2\sqrt{(c-a)}\left(-\frac{i\pi}{2K} + \left(\frac{E}{K} - l^2\right)L\right)$$

Dass dieser Wert südlich lateral ist, wie es der anfängliche Ausdruck

$$U_2 = \int_b^c \frac{z-b}{i\sqrt{(z-a)(z-b)(c-z)}}\,dz$$

anzeigt, kann man wie folgt, einsehen. Wenn

$$L = iK', \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

so ist

$$\frac{\pi}{2} = EK' + KE' - KK', \quad \frac{\pi}{2} - EK' + l^2 KK' = K(E' - k^2 K')$$

positiv, weil

$$E' - k^2 K' - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l^2\cos^2\varphi \times d\varphi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}}$$

$$V_1 = \frac{2}{\sqrt{(c-a)}}\int_0^K \frac{S^2(w)}{1-k^2S^2(w)S^2(u)} \times k^2\,C^2(u)\,du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(c-a)}}\int_0^K \left(k^2 S^2(w) - \frac{k^2 S^2(w)\,D^2(w)\,S^2(u)}{1-k^2S^2(w)S^2(u)}\right)du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \left[k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} \cdot K - \Pi(K, w) \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \times K \left[k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} - Z(w) \right]$$

man findet auch

$$V_2 = \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \left[k^2 \frac{Sw\,Cw}{D(w)} \cdot L - \Pi(K+L, w) + \Pi(K, w) \right]$$

Wenn u von K gerade nach $K+L$ hingeht, so ist

$$\Pi(K+L) - \Pi(K) = L \cdot Z(w) + \frac{i\pi}{2K} w$$

also

$$V_2 = \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \times L \left(k^2 \cdot \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} - Z(w) - \frac{i\pi}{2KL} w \right)$$

und somit

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = -2i\pi \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \times \left[\left(\frac{E}{K} - l^2 \right) w - k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} + E\,\mathrm{am}\, w - \frac{E}{K} w \right]$$

Weil

$$\sqrt{(x-a)(x-c)} = (c-a) \cdot \frac{C(w)}{S^2(w)}$$

so ergibt sich endlich

$$W(x) = -2i\pi (c-a) \cdot \frac{D(w)}{S(w)} \left[E\,\mathrm{am}\, w - l^2 w - k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} \right]$$

folglich

$$W(x) = -(b-a)(c-b) \times \frac{2i\pi}{3} \times T(x)$$

3) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \frac{1}{2})$

Man hat sogleich

$$P(x) = \sqrt{x-c} = \sqrt{(c-a)} \times \frac{C(w)}{S(w)};$$

$$U(x) = \tfrac{1}{2} \int_c \frac{\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \times dz = z^{1/2} + \ldots$$

also

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \frac{1}{z} + \ldots$$

folglich

$$(I) = 2i\pi \cdot \sqrt{(x-a)(x-b)} = 2i\pi \cdot (c-a) \cdot \frac{D(w)}{S^2(w)}$$

Ferner ist

$$U_1 = 2\int_a^b \frac{(z-c)}{2\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}} \cdot dz = -2\int_0^K \sqrt{(c-a)} \times D^2(u)\, du$$

also

$$U_1 = -2\sqrt{(c-a)} \times E$$

Ebenso findet man

$$\int_c^x \frac{\sqrt{z-c}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \cdot dz = 2\sqrt{(c-a)} \int_w^K \frac{C^2(u)}{S^2(u)}\, du$$

$$= 2\sqrt{(c-a)}\left[-\mathrm{E} + E\,\mathrm{am}\, w + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)}\right]$$

und also ist

$$U(x_1) - U(x_2) = 2\sqrt{(c-a)}\left[E\,\mathrm{am}\, w + \frac{C(w)\, D(w)}{S(w)}\right]$$

also auch

$$(II) + (III) = -2i\pi\,(c-a) \cdot \frac{C(w)}{S(w)}\left[E\,\mathrm{am}\, w + \frac{C(w)\, D(w)}{S(w)}\right]$$

folglich

$$W(x) = -2i\pi \times (c-a) \cdot \frac{C(w)}{S(w)}\left[E\,\mathrm{am}\, w - \frac{S(w)\, D(w)}{C(w)}\right]$$

Vergleicht man nun diesen Ausdruck mit dem entsprechenden Werte von $T(x)$ auf Seite 131, so erhält man zwischen $W(x)$ und $T(x)$ die Relation

$$W(x) = (c-a)(c-b) \times \frac{2i\pi}{3} \times T(x)$$

III. $n = 2$.

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, $v = 1$

In diesem Falle ist

$$P(x) = x - d; \quad 3d^2 - 2\Sigma a \times d + \Sigma bc = 0;$$

$$U(z) = \int_c \frac{z-d}{2\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}} \times dz = z^{1/2} + \ldots;$$

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \frac{1}{z} + \ldots$$

also

$$(I) = 2i\pi\sqrt{\Pi(x-a)} = 2i\pi(c-a)^{3/2}\frac{C(w)\,D(w)}{S^3(w)}$$

Und weil

$$\int_c^x \frac{z-d}{\sqrt{\Pi(z-a)}} \times dz = \int_c^x \frac{\sqrt{(z-a)}}{\sqrt{(z-b)(z-c)}}\,dz - (d-a)\int_c^x \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

also

$$\int_c^x \frac{z-d}{\sqrt{\Pi(z-a)}} \times dz = 2\sqrt{(c-a)}\left[E\,\mathrm{am}\,w - \mathrm{E} + \frac{C(w)\,D(w)}{S(w)} + \frac{c-d}{c-a}(K-w)\right]$$

weil auch

$$U_1 = \int_a^b \frac{z-d}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}} \times dz = 2\sqrt{(c-a)}\left[\frac{c-d}{c-a} \times K - \mathrm{E}\right]$$

so ist

$$U(x_1) - U(x_2) = 2\sqrt{(c-a)}\left[E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)} - \frac{c-d}{c-a} \times w\right]$$

Ferner hat man, da

$$-i\pi P(x) = -i\pi(c-a)\left(\frac{x-c}{c-a} + \frac{c-d}{c-a}\right) = -i\pi(c-a)\left(\frac{C^2(w)}{S^2(w)} + \frac{c-d}{c-a}\right) \text{ ist,}$$

$$(II)+(III) = -2i\pi(c-a)^{3/2}\left(\frac{C^2(w)}{S^2(w)} + \frac{c-d}{c-a}\right) \times \left(E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)} - \frac{c-d}{c-a}\,.\,w\right)$$

und also endlich

$$W(x) = -2i\pi(c-a)^{3/2}\left[\left(\frac{C^2(w)}{S^2(w)}+\frac{c-d}{c-a}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(E\operatorname{am} w-\frac{c-d}{c-a}\cdot w\right)-\frac{d-a}{c-a}\cdot\frac{C(w)\cdot D(w)}{S(w)}\right]$$

Um diesen Ausdruck mit demjenigen für $T(x)$ vergleichen zu können, muss man

$$\frac{d-a}{c-a}=\frac{1}{S^2(\varepsilon)},\quad \frac{c-d}{c-a}=-\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}$$

setzen. Dann ist

$$W(x) = -2i\pi\frac{(c-a)^{3/2}}{S^4(\varepsilon)}\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^2(w)}(S^2(\varepsilon)\times E\operatorname{am} w+C^2(\varepsilon)\cdot w)\right.$$
$$\left.-S^2(\varepsilon)\cdot\frac{C(w)\cdot D(w)}{S(w)}\right]$$

und die Vergleichung mit dem Ausdrucke $T(x)$ gibt die Relation

$$W(x)=\frac{4i\pi}{5}(d-a)(d-b)(d-c)\times T(x)$$

2) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}),\ v=0.$

Es ist

$$P(x)=\sqrt{(x-b)(x-c)}=(c-a)\cdot\frac{C(w)\cdot D(w)}{S^2(w)};$$

$$U(z)=\tfrac{1}{2}\int_c^z\frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{(z-a)}}\,dz$$

wenn nun $b+c-a=0$ angenommen wird, so ist

$$U(z)=\tfrac{1}{3}z^{3/2}+0\cdot z^{1/2}-\tfrac{1}{2}bc\cdot z^{-1/2}+\ldots;$$
$$U^2(z)=\tfrac{1}{9}z^3+0\cdot z^2-\tfrac{1}{3}bc\cdot z+\ldots$$

also

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}=\tfrac{1}{9}z-\text{const.}+\tfrac{1}{3}(x^2-bc)\cdot\frac{1}{z}+\ldots$$

Hebt man die Beschränkung, dass

$$b+c-a=0$$

sein soll, dadurch wieder auf, dass man jedem der jetzigen a, b, c, d, x noch $-(b+c-a)$ zusetzt, so dass sie in $-(b+c-2a)$, $-(c-a)$, $-(b-a)$, $(d-b+a-c)$, $(x-b+a-c)$ übergehen, so ist

$$\frac{U^4(z)}{(z-x)^4} = \frac{1}{9}\cdot z - \text{const.} + \tfrac{1}{3}[(x-b-c+a)^2 - (c-a)(b-a)]\,\frac{1}{z}$$

$$+ \ldots$$

Der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist also gleich

$$+\tfrac{1}{3}[((x-b)-(c-a))^2-(c-a)(b-a)]$$

und somit

$$(I) = (c-a)^{5/2}\cdot\frac{2i\pi}{3}\cdot\frac{1}{S^5(w)}[(C^2(w)D^2(w) - k^2S^4(w))^2 - k^2S^4(w)]$$

Ferner ist

$$U_1 = \int_a^b \frac{\sqrt{(b-z)(c-z)}}{\sqrt{(z-a)}}\,dz = 2(c-a)^{3/2}\int_0^K k^2C^2(u)D^2(u)\,du$$

$$= 2(c-a)^{3/2}\left[-l^2E + \int_0^K D^4(u)\,du\right]$$

weil nun

$$D^4(u) = \tfrac{1}{3}\left[k^2\frac{\partial}{\partial u}(S(u)\cdot C(u)\cdot D(u)) + 2D^2(u)\cdot(1+l^2) - l^2\right]$$

so findet man

$$U_1 = (c-a)^{3/2}\cdot\tfrac{1}{3}\times[(1+k^2)\mathrm{E} - l^2K]$$

Noch bleibt $\int_c^x \frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}}\,dz$ zu berechnen. Es ist

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}}\times dz = 2(c-a)^{4/2}\int_w^K \frac{C^2(u)\cdot D^2(u)}{S^4(u)}\times du$$

und da

$$3\,\frac{C^2(u)\cdot D^2(u)}{S^4(u)} = -\frac{D^2(u)}{S^2(u)} - k^2\frac{C^2(u)}{S^2(u)} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C(u)\cdot D(u)}{S^3(u)}\right)$$

so ist

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{(z-a)}} \times dz = (c-a)^{3/2} \times \tfrac{2}{3}[(1+k^2)\mathrm{E} - l^2K + l^2 w$$

$$-(1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\,(C^2(w)\,.\,D^2(w) - k^2 S^4(w))]$$

und demnach ist

$$U(x_1) - U(x_2) = (c-a)^{3/2} \times \tfrac{2}{3} \times [(1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w$$

$$- \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\,(C^2(w)\,.\,D^2(w) - k^2\,S^4(w)]$$

folglich

$$(II)+(III) = (c-a)^{5/2} \times \frac{2i\pi}{3}[(1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2\,w$$

$$- \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\,(C^2(w)\,.\,D^2(w) - k^2 S^4(w)]\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}$$

somit

$$W(x) = (c-a)^{5/2}\,\frac{2i\pi}{3}\left[\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}((1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w)\right.$$

$$\left. - \frac{2k^2}{S(w)} + k^2(1+k^2)S(w)\right]$$

also nach Seite 134 ist demnach

$$W(x) = -(c-a)(b-a)(c-b)^2 \times \frac{2i\pi}{3\,.\,5} \times T(x).$$

3) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2}),\ v = 0.$

$$P(x) = \sqrt{(x-a)(x-c)} = (c-a)\,.\,\frac{C(w)}{S^2(w)};$$

$$U(z) = \tfrac{1}{2}\int_c \frac{\sqrt{(z-a)(z-c)}}{\sqrt{(z-b)}} \times dz$$

Setzt man $a+c-b=0$, so ist

$$U(z) = \tfrac{1}{3}\,.\,z^{3/2} + 0\,.\,z^{1/2} - \frac{ac}{2}\,.\,z^{-1/2} + \ldots$$

also

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \tfrac{1}{3}\,.\,z + \text{const.} + \tfrac{1}{3}(x^2 - ac)\,.\,\frac{1}{z} + \ldots$$

und somit nach Aufhebung obiger Beschränkung der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ gleich

$$\tfrac{1}{3}[(b-a)(c-b)+(x-a-(c-b))^2]$$

Man hat demnach

$$(I) = (c-a)^{5/2} \cdot \frac{2i\pi}{3} \cdot \frac{D(w)}{S^5(w)} [(1-l^2S^2(w))^2+l^2k^2S^4(w)]$$

Auch ist

$$U_1 = -\int_a^b \frac{\sqrt{(z-a)(c-z)}}{\sqrt{b-z}}\,dz = -2(c-a)^{3/2}k^2 \int_0^K S^2(u) \cdot D^2(u)\,du$$
$$= (c-a)^{3/2} \cdot \tfrac{2}{3}[(l^2-k^2)\,\mathrm{E} - l^2 K]$$

Weil ferner

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-a)(z-c)}}{\sqrt{z-b}}\,dz = 2(c-a)^{3/2} \int_w^K \frac{C^2(u)}{S^4(u)}\,du$$
$$= 2(c-a)^{3/2}\left[\int_w^K \frac{D^2(u) \cdot C^2(u)}{S^4(u)}\,du + k^2 \int_w^K \frac{C^2(u)}{S^2(u)}\,du\right],$$

so ist nach früherem

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-a)(z-c)}}{\sqrt{(z-b)}}\,dz = \tfrac{1}{3}\left[(l^2-k^2)\,\mathrm{E} - (l^2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2(K-w)\right.$$
$$\left. - (l^2-k^2)\frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)} + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^3(w)}\right]$$

und also

$$U(x_1) - U(x_2) = (c-a)^{5/2} \cdot \tfrac{2}{3}\left[-(l^2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w + l^2 w\right.$$
$$\left. - (l^2-k^2)\frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)} + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^3(w)}\right]$$

folglich ist

$$(II)+(III) = (c-a)^{5/2}\frac{2i\pi}{3} \times \frac{C(w)}{S^2(w)}\Big[(l^2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w + (l^2-k^2)\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)} + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

und nach einigen Reductionen erhält man schliesslich

$$W(x) = (c-a)^{5/2}\frac{2i\pi}{3}\Big[\frac{C(w)}{S^2(w)}\left((1-2k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w\right) + k^2\,.\,\frac{D(w)}{S(w)}\Big]$$

Die Vergleichung mit dem entsprechenden Ausdrucke von $T(x)$ gibt

$$W(x) = (b-a)\,(c-b)\,(c-a)^2\,.\,\frac{2i\pi}{3\,.\,5} \times T(x)$$

4) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 0),\ v = 0.$

Es ist

$$P(x) = \sqrt{(x-a)\,(x-b)} = (c-a)\,.\,\frac{D(w)}{S^2(w)};$$

$$U(z) = \tfrac{1}{2}\int_c \frac{\sqrt{(z-a)\,(z-b)}}{\sqrt{(z-c)}}\,.\,dz$$

wird $a+b-c=0$ angenommen, so ist

$$U(z) = \tfrac{1}{3}\,.\,z^{3/2} + 0\,.\,z^{1/2} - \frac{ab}{2}\,.\,z^{-1/2} + \,.\,.\,.;$$

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \tfrac{1}{9}\,.\,z + \text{const.} + \tfrac{1}{3}\,(x^2 - ab)\,.\,z^{-1} + \,.\,.\,.$$

wird nun die Beschränkung $a+b-c=0$ wieder aufgehoben, so findet man

$$\tfrac{1}{3}\left[(x-a-b+c)^2 - (a-c)\,(b-c)\right]$$

als Coeff von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$. Demnach ist

$$(I) = (c-a)^{5/2} \times \frac{2i\pi}{3} \times \frac{C(w)}{S^5(w)}\left[(1+l^2S^2(w))^2 - l^2\,S^4(w)\right]$$

Ferner ist

$$U_1 = -\int_a^b \frac{\sqrt{(z-a)\,(b-z)}}{\sqrt{(c-z)}}\,dz = -2(c-a)^{3/2}\int_0^K k^4 S^2(u)\,.\,C^2(u)\,du$$

also

$$U_1 = (c-a)^{3/2} = \tfrac{2}{3}\left[-(1+l^2)E+2l^2K\right]$$

Auch findet man, dass

$$\int_c^z \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{\sqrt{z-c}}\,dz = 2(c-a)^{3/2}\int_w^K \frac{D^2(u)}{S^2(u)}\,.\,du$$

$$-2(c-a)^{3/2}\left[\int_w^K \frac{D^2(u)\,.\,C^2(u)}{S^4(u)}\,du + \int_w^K \frac{D^2(u)}{S^2(u)}\,du\right]$$

$$= (c-a)^{3/2}\,.\,\tfrac{2}{3}\left[-(1+l^2)E+2l^2K-2l^2w+(1+l^2)E\,\mathrm{am}\,w\right.$$
$$\left.+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\left(1+(1+l^2)\,S^2(w)\right)\right]$$

ist und somit

$$U(x_1)-U(x_2) = (c-a)^{3/2}\,.\,\tfrac{2}{3}\left[-2l^2w+(1+l^2)E\,\mathrm{am}\,w\right.$$
$$\left.+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\left(1+(1+l^2)\,S^2(w)\right)\right]$$

also auch

$$(II)+(III) = (c-a)^5 \times \frac{2i\pi}{3} \times \frac{D(w)}{S^2(w)}$$
$$\times\left[2l^2w-(1+l^2)E\,\mathrm{am}\,w-\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\left(1+(1+l^2)S^4(w)\right)\right]$$

Als Ausdruck für $W(x)$ ergibt sich nun

$$W(x) = (c-a)^{5/2}\,.\,\frac{2}{3}\frac{i\pi}{}\left[\frac{D(w)}{S^2(w)}\left(2l^2w-(1+l^2)E\,\mathrm{am}\,w\right)+k^2\frac{C(w)}{S(w)}\right]$$
$$= -(b-a)^2(c-b)(c-a)\times T(x)$$

In den 2 Fällen $n=2$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ und $n=2$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ gibt die Rechnung für $\frac{W(x)}{T(x)}$ dieselben Werte, die man aus dem Falle $n=2$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ durch Vertauschung von a mit b und von a mit c bekommt; also führt auch die Vertauschung von b mit c den zweiten Fall in den dritten über. Diese Wahrnehmung ist aus folgendem Grunde merkwürdig. Bei den zwei in $n=2$, $(0, 0, 0)$ begriffenen Fällen sieht man, dass $\frac{W(x)}{T(x)}$ durch $Q(a)\,Q(b)\,Q(c)$ teilbar ist; es ist daher zu vermuten, dass im allgemeinen $P^{2\alpha}(a)\,P^{2\beta}(b)\,P^{2\gamma}(c)$ auftreten werde,

wenn $P^{2\alpha}(x) = P(x)$, $\frac{\partial P(x)}{\partial t}$ bedeutet, je nachdem $\alpha = 0, \frac{1}{2}$ ist. Setzt man nun

$$P^{2\alpha}(a) \times P^{2\beta}(b) \times P^{2\gamma}(c) = H \times Q(a)\,Q(b)\,Q(c)$$

und verlangt, dass das Argument x sich nur in der Nordhälfte seines Feldes bewege, so findet man

$$\begin{array}{l|l}
(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) & H = 1 \\
\quad = (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) & \quad = (c-b)^2(b-a)(c-a) \\
\quad = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}) & \quad = (c-a)^2(b-a)(c-b) \\
\quad = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0) & \quad = (b-a)^2(c-a)(c-b) \\
(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0) & H = -(b-a)(c-a) \\
\quad = (0, \tfrac{1}{2}, 0) & \quad = -(b-a)(c-b) \\
\quad = (0, 0, \tfrac{1}{2}) & \quad = -(c-a)(c-b) \\
\quad = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) & \quad = -(c-b)^2(c-a)^2(b-c)^2
\end{array}$$

Man nehme die Fälle (0, 0, 0), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, die ohnehin symmetrisch sind, aus. Wenn man a mit c vertauscht, so gehen die H für (0, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ in einander über; ebenso die H-werte für $(\frac{1}{2}, 0,$ 0) und (0, 0, $\frac{1}{2}$). Wenn man aber a mit b vertauscht, so gehen die zu (0, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$), $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ gehörenden Werte von H jeder in das entgegengesetzte des andern über; ebenso die zu $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0)$ gehörenden. Dasselbe gilt von der Vertauschung von b mit c.

IV. $n = 3$.

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $v = 1$.

In diesem Falle ist

$$U(z) = \tfrac{1}{2} \int_c^{} \frac{(z-d)\sqrt{(z-a)}}{\sqrt{(z-b)(z-c)}}\, dz$$

Die Wurzelausziehung wird auch hier ein wenig erleichtert, wenn man $b + c - a = 0$ annimmt. Weil

$$\frac{(z-b)(z-c)}{z-a} = z + \frac{bc}{z-a} = z\left(1 + \frac{0}{z} + \frac{bc}{z^2} + \ldots\right)$$

so ist

$$\frac{\sqrt{z-a}}{\sqrt{(z-b)(z-c)}} = z^{-1}\sqrt{z}\left(1 + \frac{0}{z} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{bc}{z^2} + \ldots\right),$$

$$U(z) = \tfrac{1}{3} \,.\, z^{3/2} - dz^{1/2} + \tfrac{1}{2} \,.\, bc \,.\, z^{-1/2} + \,.\,.\,.$$

Die quadratische Gleichung für d, die im allgemeinen

$$5d^2 - (2a + 4b + 4c)\, d + 3bc + a(b+c) = 0$$

ist, wird dann zu

$$5d^2 - 6ad + a^2 + 3bc = 0$$

Vermöge derselben findet man

$$U^2(z) = \tfrac{1}{9} \,.\, z^3 - \tfrac{2}{3} dz^2 + \frac{1}{15}(18ad - 3a^2 - 4bc)z + \,.\,.\,.$$

der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist also

$$\tfrac{1}{3} \,.\, x^2 - \tfrac{4}{3} dx + \frac{1}{15}(18ad - 3a^2 - 4bc) = \tfrac{1}{3}(x - 2d)^2 + \frac{1}{15}(-6ad + a^2 + 8bc)$$

Die Beschränkung wird aufgehoben, indem man jedem der jetzigen a, b, c, d, x noch $-(b+c-a)$ zusetzt, so dass sie in $-(b+c-2a)$, $-(c-a)$, $-(b-a)$, $d-a-(b+c-2a)$, $x-a-(b+c-2a)$ übergehen. Die gefundene Function zweiten Grades ist nun

$$F(x) = \tfrac{1}{3}(x - a - 2(d-a) + b + c - 2a)^2$$
$$+ \frac{1}{15}[6(b+c-2a)(d-a) - 5(b+c-2a)^2 + 8(c-a)(b-a)]$$
$$- (c-a)^2\left[\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{S^2(w)} - \frac{2}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2\right)^2 + \frac{1}{15}\left(6\frac{1+k^2}{S^2(\varepsilon)} - 5 - 2k^2 - 5k^4\right)\right]$$

Man schreibe

$$\frac{1}{S^2(w)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2 = \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(w) \,.\, S^2(\varepsilon)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2$$

und beachte, dass

$$5\left(-\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2\right)^2 + 6 \,.\, \frac{1+k^2}{S^2(\varepsilon)} - 5 - 2k^2 - 5k^4 = \frac{5}{S^4(\varepsilon)} - 4\frac{1+k^2}{S^2(\varepsilon)} + 8k^4 = 5k^2$$

ist, vermöge der Gleichung für $S^2(\varepsilon)$ auf Seite 135, Zeile 4 v. unt. Dann findet man

$$F(x) = \frac{(c-a)^2}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^2(w)}\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)}-3+2(1+k^2)S^2(\varepsilon)\right)+k^2\right]$$

folglich ist

$$(I) = \frac{2i\pi}{3}(c-a)^3\left[\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^4(w)}(S^2(\varepsilon)-S^2(w)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)}-3+2(1+k^2)S^2(\varepsilon)\right)+k^2\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}\right]$$

$$U_1 = \int_a^b \frac{(z-a)\,[(z-a)-(d-a)]}{\sqrt{(z-a)\,(b-z)\,(c-z)}}\,dz$$
$$= 2(c-a)^{3/2}\int_0^K k^2 S^2(u)\,(k^2 S^2(u)-\frac{1}{S^2(\varepsilon)})\,du$$

Weil

$$\frac{\partial}{\partial u}(S(u)\;C(u)\;D(u)) = 2\,\frac{S(u)\;C(u)\;D(u)\,.\,d\,.\,S(u)\;C(u)\;D(u)}{2S(w)\,.\,d\,.\,(Su)}$$
$$= \frac{d\,.\,(S^2(u)\,.\,C^2(u)\,.\,D^2(u)}{d\,.\,(S^2(u))} = 1-2(1+k^2)S^2(u)+3k^2S^4(u)$$

so ist

$$3k^2S^2(u)\,(k^2S^2(u)-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}) = k^2\frac{\partial}{\partial u}(S(u)\;C(u)\;D(u))$$
$$+\left(\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2(1+k^2)\right)D^2(u)\;-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}+2+k^2$$

also

$$U_1 = \frac{2}{3}(c-a)^{3/2}\left[\left(\frac{3}{S^2(\varepsilon)}\;-2(1+k^2)\right)\mathrm{E}+\left(-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}+2+k^2\right)K\right]$$

$$\int_c^x \frac{(z-a)\,(z-d)}{\sqrt{(z-a)\,(z-b)\,(z-c)}}\,dz$$
$$= 2(c-a)^{3/2}\int_w^K \frac{1}{S^2(u)}\left(\frac{1}{S^2(u)}-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}\right)du$$

Weil

$$\frac{3}{S^2(u)}\left(\frac{1}{S^2(u)}-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}\right)=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C(u)\,.\,D(u)}{S^3(u)}\right)$$
$$+\left[2(1+k^2)-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}\right]\frac{1}{S^2(u)}-k^2;$$

$$\frac{1}{S^2(u)}=1-D^2(u)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C(u)\,.\,D(u)}{S(u)}\right)$$

so ist

$$\int_c^x \frac{(z-a)(z-d)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz$$
$$=\tfrac{2}{3}(c-a)^{3/2}\left[p\,\mathrm{E}+(p+k^2)\,w-K)-p\left(E\,\mathrm{am}\,w+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\right]$$

wenn

$$p=\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2(1+k^2)$$

gesetzt wird; folglich ist

$$U(x_2)-U(x_1)=\tfrac{2}{3}(c-a)^{3/2}\left[\left(\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2(1+k^2)\right)\left(E\,\mathrm{am}\,w+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right)\right.$$
$$\left.+\left(2+k^2-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}\right)w-\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\right]$$

und also

$$(II)+(III)=(c-a)^{3/2}\frac{i\pi}{S^2(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\,[U(x_2)-U(x_1)]$$

Der algebraische Teil von $\dfrac{W(x)}{(c-a)^3}\cdot\dfrac{3}{2i\pi}$ ist $k^2\dfrac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}$. Also ist

$$W(x)=\frac{2i\pi}{3}(c-a)^5\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}((3-2(1+k^2)S^2(\varepsilon))\,E\,\mathrm{am}\,w\right.$$
$$\left.+((2+k^2)S^2(\varepsilon)-3)\,w)+k^2\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}\right]$$

Weil

$$P(x)=(x-d)\sqrt{x-a}$$

so ist

$$P'(a)\,P(b)\,P(c)=-(b-a)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$$
$$=-(c-a)^5k^2\frac{C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)}{S^6(\varepsilon)}$$

so ist nach Seite 137

$$W(x)=-\frac{4i\pi}{3\,.\,7}P'(a)\,P(b)\,P(c)\,.\,T(x)$$

$$2)\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (0,\ \tfrac{1}{2},\ 0),\ v = 1$$

In diesem Falle ist

$$P(x) = (c-a)^{3/2}\frac{D(w)}{S^2(\xi)\ .\ S^3(w)}\,(S^2(\xi) - S^2(w);$$

$$U = \tfrac{1}{2}\int_c^{} \frac{(z-d)\sqrt{(z-b)}}{\sqrt{(z-a)(z-c)}}\,dz$$

nimmt man an, es sei

$$a + c - b = 0$$

so ist

$$\frac{(z-a)(z-c)}{z-b} = z + \frac{ac}{z-a} = z\left(1 + \frac{0}{z} + \frac{ac}{z^3} + \ldots\right)$$

also

$$\sqrt{\frac{z-b}{(z-a)(z-c)}} = z^{-1/2}\left(1 + \frac{0}{z} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ac}{x^2} + \ldots\right)$$

somit

$$U(z) = \tfrac{1}{3}z^{3/2} - dz^{1/2} + \tfrac{1}{8}ac\ .\ z^{-1/2} + \ldots,$$

die quadratische Gleichung für d ist in diesem besonderen Falle

$$5d^2 - 6bd + b^2 + 3ac = 0$$

Mittelst derselben findet man nun

$$U^2(z) = \tfrac{1}{9}z^3 - \tfrac{2}{3}dz^2 + \frac{1}{15}(18bd - 3b^2 - 4ac)z + \ldots$$

der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist

$$\tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{4}{3}dx + \frac{1}{15}(18bd - 3b^2 - 4ac)$$

Wird nun die Beschränkung wieder aufgehoben, indem man jedem der jetzigen a, b, c, d, x noch $-(a+c-b)$ zusetzt, so erhält man für die Function zweiten Grades den Ausdruck:

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{1}{9}(x-b-2(d-b)+a+c-2b)^2 \\ &\quad + \frac{1}{15}\left[6(a+c-2b)(d-b) - 5(a+c-2b)^2 + 8(c-b)(a-b)\right] \\ &= (c-a)^2\left[\tfrac{1}{9}\left(\frac{D^2(w)}{S^2(w)} - \frac{2}{S^2(\xi)} + 1\right)^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{15}\left(6(1-2k^2)\cdot\frac{D^2(\xi)}{S^2(\xi)} - 5 + 12k^2 - 12k^4\right)\right] \end{aligned}$$

Man schreibe

$$\frac{D^2(w)}{S^2(w)} - \frac{2}{S^2(\varepsilon)} + 1 = \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 - k^2$$

und beachte, dass vermöge der Gleichung

$$5 - 2(2 + k^2) S^2(\varepsilon) + k^2 S^4(\varepsilon) = 0$$

auch

$$5\left(-\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 - k^2\right)^2 + 6(1 - 2k^2)\frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)} - 5 + 12k^2 - 12k^4 = -5k^2 l^2$$

ist, also

$$F(x) = \frac{(c-a)^2}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^4(\varepsilon) \cdot S^2(w)}\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)} - 3 + 2(1 - k^2) S^2(\varepsilon)\right) - l^2 k^2\right]$$

und somit

$$(I) = \frac{2i\pi}{3}(c-a)^3\left[\frac{C(w)}{S^4(\varepsilon) \cdot S^4(w)}(S^2(\varepsilon) - S^2(w) \times \left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)} - 3 + 2(1 - k^2)S^2(\varepsilon)) - \frac{l^2 k^2 C(w)}{S^2(w)}\right]\right.$$

$$U_1 = \int_a^b \frac{(z-b)\left[(z-b) - (d-b)\right]}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}\, dz$$

$$= 2(c-a)^{3/2} \cdot \int_0^K k^2 C^2(u)\left(k^2 C^2(u) + \frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) du$$

Weil

$$\frac{\partial}{\partial u}(S(u)\, C(u)\, D(u)) = -1 + k^2 + 2(1 - 2k^2) C^2(u) + 3k^2 C^4(u)$$

und wenn

$$p = \frac{3}{S^2(\varepsilon)} - 2 + k^2$$

gesetzt wird, so ist

$$3k^2 C^2(u)\left(k^2 C^2(u) + \frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) = \frac{\partial}{\partial u}(S(u)\, C(u)\, D(u)) + pk^2 C^2(u) + l^2 k^2$$

und also

$$U_1 = (c-a)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\left[pE + l^2(k^2 - p)K\right]$$

$$\int_c^x \frac{(z-d)(c-b)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz$$

$$= 2(c-a)^{1/2}\int_w^K \frac{D^2(u)}{S^2(u)}\left(\frac{D^2(u)}{S^2(u)} - \frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right)du$$

$$= 2(c-a)^{1/2}\int_{L+w}^{L+K} k^2\,C^2(u)\left(k^2\,C^2(u) + \frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right)du$$

also nach Obigem

$$\int_c^x \frac{(z-d)(z-b)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz = (c-a)^{1/2}\cdot\frac{2}{3}\left[l^2(k^2-p)(K-w)\right.$$

$$\left. + p\,(E\mathrm{am}(K+L) - E\mathrm{am}(L+w)) + \frac{C(w)\cdot D(w)}{S^2(w)}\right]$$

Weil nun aber

$$E\mathrm{am}(K+L) - E\mathrm{am}(L+w) = \mathrm{E} - E\mathrm{am}\,w - \frac{C(w)\cdot(D(w)}{S(w)}$$

so ist auch

$$\int_c^x \frac{(z-d)(z-b)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz = (c-a)^{1/2}\cdot\frac{2}{3}\left[l^2(k^2-p)(K-w)\right.$$

$$\left. + p\left(\mathrm{E} - E\mathrm{am}\,w - \frac{C)w)\cdot D(w)}{S(w)}\right) + \frac{C(w)\cdot D(w)}{S^3(w)}\right],$$

somit

$$U(x_1) - U(x_2) = (c-a)^{1/2}\cdot\frac{2}{3}\left[l^2(p-k^2,w\right.$$

$$\left. - p\left(E\mathrm{am}(w) + \frac{C(w)\cdot D(w)}{S(w)}\right) + \frac{C(w)\cdot D(w)}{S^3(w)}\right]$$

Wird dieser Ausdruck noch mit

$$-i\pi(c-a)^{1/2}\cdot\frac{D(w)}{S^2(\varepsilon)\cdot S^3(w)}\cdot(S^2(\varepsilon) - S^2(w)$$

multiplicirt, so erhält man

$$(II)+(III) = \frac{2i\pi}{3}(c-a)^3\frac{D(w)}{S^2(\varepsilon)\cdot S^3(w)}(S^2(\varepsilon) - S^2(w))$$

$$\times\left[l^2(k^2-p)w + p\left(E\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\cdot D(w)}{S(w)}\right) - \frac{C(w)\cdot D(w)}{S^3(w)}\right]$$

Man erhält schliesslich

$$W(x) = + \frac{2i\pi}{3}(c-a)^3 \frac{D(w)}{S^4(\varepsilon) \cdot S^3(w)}(S^2(\varepsilon) - S^2(w))$$
$$\times \left[l^2 k^2 S^2(\varepsilon) \cdot w + p\, S^2(\varepsilon) \left(l^2 w - E \operatorname{am} w + k^2 \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{k^2 l^2 S^4(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)} \right]$$

Es sei

$$I = S^2(\varepsilon) \cdot \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^3(w)};$$

$$II = (-3 + (2-k^2) S^2(\varepsilon)) \cdot \frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)};$$

$$III = -S^2(\varepsilon) \cdot \frac{C(w)}{S^3(w) \cdot D(w)};$$

$$IV = (3 - 2(1-k^2) S^2(\varepsilon)) \cdot \frac{C(w)}{S(w) \cdot D(w)};$$

$$V = k^2 l^2 S^4(\varepsilon) \cdot \frac{C(w) \cdot S(w)}{D(w)} \cdot \frac{1}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)}.$$

Nach der bekannten Relation

$$5 - 2(2+k^2) S^2(\varepsilon) + k^2 S^4(\varepsilon) = 0$$

ist auch

$$D^2(\varepsilon)(-3 + (2-k^2) S^2(\varepsilon) = -3 + 2(1+k^2) S^2(\varepsilon) - k^2(2-k^2) S^4(\varepsilon)$$
$$= 7 - 5k^2 + 2(-3 + k^2 + k^4) S^2(\varepsilon)$$

Setzt man ferner

$$VI = k^2 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w) \cdot D(w)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)},$$

$$VII = k^2(-3 + (2-k^2) S^2(\varepsilon)) \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)},$$

$$VIII = -2k^2 \frac{C^2(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)}$$

so ist

$$V = k^2 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)} \cdot \frac{D^2(w) - (D^2(w) - D^2(\varepsilon))}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}$$
$$= k^2 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w) \cdot D(w)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)} - k^4 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)}$$

und weil nun nach der Formel

$$5 - 2(2+k^2)S^2(\varepsilon) + k^2 S^4(\varepsilon) = 0$$

auch

$$-k^2 l^2 \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} = -3 + (2-k^2)S^2(\varepsilon) - 2\frac{C^2(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)}$$

ist, so hat man

$$V = VI + VII + VIII$$

Ferner ist

$$I + III = -k^2 S^2(\varepsilon) \cdot \frac{C(w)}{S(w) \cdot D(w)}$$

und ebenso

$$II + VII = (-3 + (2-k^2)S^2(\varepsilon)) \cdot \frac{C(w)}{S(w) \cdot D(w)}$$

also

$$I + III + II + VII + IV = 0$$

der algebraische Teil ist somit

$$VI + VIII = k^2 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w) \cdot D(w)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)} - 2k^2 \frac{C(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)}.$$

Also ist

$$W(x) = -\frac{2i\pi}{3}(c-a)^2 \frac{D(w)}{D^2(\varepsilon) \cdot S^4(\varepsilon) \cdot S^3(w)} (S^2(\varepsilon) - S^2(w))$$
$$\times \left[k^2 l^2 S^4(\varepsilon) \cdot \frac{S(w) \cdot C(w) \cdot D(w)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)} + l^2 D^2(\varepsilon)(3 - 2S^2(\varepsilon))w \right.$$
$$\left. + (7 - 5k^2 + 2(-3 + k^2 + k^4)S^2(\varepsilon)) E\mathrm{am}\, w - 2k^2 C^2(\varepsilon) \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)} \right]$$

Wenn man nun beachtet, dass

$$P(a)\, P'(b)\, P(c) = -(c-a)^5 k^2 l^2 \cdot \frac{C^2(\varepsilon) \cdot D^2(\varepsilon)}{S^6(\varepsilon)}$$

angenommen werden kann, so ergibt eine Vergleichung mit der entsprechenden Formel für $T(x)$ auf Seite 139 die Relation

$$W(x) = \frac{4i\pi}{3 \cdot 7} \times P(a)\, P'(b)\, P(c) \times T(x)$$

3) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \frac{1}{2})$, $v = 1$.

$$U(z) = \tfrac{1}{2} \int_c \frac{(z-d)\sqrt{z-c}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\, dz$$

wenn hier

$$a + b - c = 0$$

angenommen wird, so ist

$$\frac{(z-a)(z-b)}{z-c} = z + \frac{ab}{z-c} = z\left(1 + \frac{0}{z} + \frac{ab}{z^2} + \ldots\right)$$

also

$$\frac{\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} = z^{-1/2}\left(1 + \frac{0}{z} - \frac{1}{2}\frac{ab}{z^2} + \ldots\right);$$

$$U(z) = \tfrac{1}{3}z^{3/2} - dz^{1/2} + \tfrac{1}{2}ab\,z^{-1/2} + \ldots$$

und weil

$$5d^2 - 6cd + c^2 + 3ab = 0$$

so ist

$$U^2(z) = \tfrac{1}{9}z^3 - \tfrac{2}{3}dz^2 + \frac{1}{15}(18cd - 3c^2 - 4ab)z + \ldots$$

Der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist

$$\tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{4}{3}dx + \frac{1}{15}(18cd - 3c^2 - 4ab) = \tfrac{1}{9}(x - 2d)^2 + \frac{1}{15}(-6cd + c^2 + 8ab)$$

Wird die Beschränkung wieder aufgehoben und die Function zweiten Grades von x wieder mit $F(x)$ bezeichnet, so hat man

$$F(x) = \tfrac{1}{9}[x - c - (d-a) - (d-b)]^2$$
$$+ \frac{1}{15}[-6((c-b) + (c-a))(d-c) - 5((c-a) + (c-b))^2 + 8(c-b)(c-a)]$$
$$= \tfrac{1}{9}\left[\frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} - l^2\right]^2 (c-a)^2$$
$$+ \frac{1}{15}\left[-6(1+l^2)\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + 4l^2 - 5l^4\right]$$

Weil nun nach der Formel

$$5 - 2(1 + 2k^2)S^2(\varepsilon) + k^2 S^4(\zeta) = 0$$

auch

$$5\left(\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + l^2\right)^2 - 6(1+l^2) \cdot \frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + 4l^2 - 5l^4$$
$$= \frac{1}{S^4(\varepsilon)}(5 - 2(1+2k^2)S^2(\varepsilon) + (1+4l^2)S^4(\varepsilon)) = 5l^2,$$

$$F(x) = (c-a)^2 \tfrac{1}{9}\left[\frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^4(\varepsilon) \cdot S^2(w)}\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)} - 3 - 2l^2 S^2(\varepsilon)\right) + l^2\right]$$

und also ist

$$(I) = (c-a)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2i\pi}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^4(w)} \cdot D(w)\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)} - 3 - 2l^2 S^2(\varepsilon)\right) + \frac{l^2 D(w)}{S^2(w)}\right]$$

Ferner ist

$$U_1 = \int_a^b \frac{(z-d)(z-c)\,.\,dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}$$

$$= 2(c-a)^{\frac{3}{2}} \int_0^K D^2(u)\,.\left(D^2(u) + \frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) du$$

weil aber

$$k^2 \frac{\partial}{\partial u}(S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)) = l^2 - 2(1+l^2)D^2(u) + 3D^4(u)$$

so ist auch

$$D^2(u)\left(D^2(u) + \frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) = \frac{1}{3}\left[k^2 \frac{\partial}{\partial u}(S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)) - l^2 + 2(1+l^2)D^2(u)\right] + \frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)} D(u)$$

und somit

$$U_1 = \frac{2}{3}(c-a)^{\frac{3}{2}}\left[-l^2 K + \left(2(1+l^2) + 3\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) E\right]$$

Auch hat man

$$\int_c^x \frac{(z-d)\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} dz = 2(c-a)^{\frac{3}{2}} \int_w^K \frac{C^2(u)}{S^2(u)}\left(\frac{C^2(u)}{S^2(u)} - \frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) du$$

$$- 2(c-a)^{\frac{3}{2}} \int_{L+w}^{L+K} D^2(u)\left(D^2(u) + \frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) du$$

setzt man abkürzend

$$q = 2(1+l^2) + 3\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}$$

so ist demnach

$$\int_e^x \frac{(z-d)\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\,dz = (c-a)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big[-l^2(K-w)$$

$$+q\left(\mathrm{E}-E\,\mathrm{am}\,w-\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right)+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

folglich

$$U(x_1)-U(x_2) = (c-a)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big[l^2 w - q\left(E\,\mathrm{am}\,w+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right)$$

$$+\frac{C(w)\,.\,(D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

und demnach

$$(II)+(III) = \frac{2i\pi}{3}(c-a)^3\frac{C(w)}{S^2(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\Big[-l^2 w$$

$$+q\left(E\,\mathrm{am}\,w+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right)-\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

Es ist somit

$$W(x) = \frac{2i\pi}{3}\,.\,(c-a)^3\frac{C(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}\times$$

$$.\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w)\Big[-l^2S^2(\varepsilon)\,w+qS^2(\varepsilon)\left(E\,\mathrm{am}\,w-\frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}\right)$$

$$+\frac{l^2S^4(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}\Big]$$

Weil aber nach der Relation

$$1+\frac{3}{C^2(\varepsilon)}+\frac{1}{D^2(\varepsilon)} = 0$$

auch

$$(4-S^2(\varepsilon))\,D^2(\varepsilon) = -C^2(\varepsilon)$$

so ist auch

$$-l^2S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon) = l^2D^2(\varepsilon)\,(4-S^2(\varepsilon))\,.\,S^2(\varepsilon)$$

Auf gleiche Weise findet man, dass

$$k^2C^2(\varepsilon)\,(2(1+l^2)\,S^2(\varepsilon)+3\,C^2(\varepsilon)) = 5-7k^2-2(1+k^2-3k^4)\times S^2(\varepsilon)$$

Es sei ferner

$$l = -S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{C(w(\,.\,D(w)}{S^3(w)}\,;$$

$$II = (3+(1-2k^2)\,S^2(\varepsilon))\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)};$$

$$III = S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{D(w)}{S^2(w)\,.\,C(w)};$$

$$IV = -(3+2(1-k^2)S^2(\varepsilon))\,.\,\frac{D(w)}{S(w)\,.\,C(w)};$$

$$V = l^2\,.\,\frac{S^4(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

Wird nun

$$VI = \frac{l^2 S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)};$$

$$VII = (3+(1-2k^2)S^2(\varepsilon)) \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)};$$

$$VIII = 2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

gesetzt, so findet man

$$V = l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}\,.\,\frac{C^2(w)\,.\,(C^2(w)-C^2(\varepsilon))}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}$$

$$= l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} - l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

und weil

$$-\,l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} = 3+(1-2k^2)\,S^2(\varepsilon)+2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}$$

ist, so folgt

$$V = VI + VII + VIII$$

Beachte man, dass auch

$$I + III = +\,S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{D(w)}{S(w)\,.\,C(w)},$$

$$II + VII = (3+(1-2k^2)\,S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{D(w)}{S(w)\,.\,C(w)}$$

also

$$I + III + II + VII + IV = 0$$

Der algebraische Teil im Ausdrucke für $W(x)$ ist somit

$$VI + VIII = l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} + 2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in $W(x)$ erhält man schliesslich

$$W(x) = (c-a)^3 \frac{2i\pi}{3} \times \frac{C(w)}{k^2 S^4(\varepsilon) \cdot C^2(\varepsilon) \cdot S^3(w)} (S^2(\varepsilon) - S^2(\varepsilon))$$
$$\times \Big[k^2 l^2 S^4(\varepsilon) \times \frac{S(w) \cdot C(w) \cdot D(w)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)} + 2k^2 D^2(\varepsilon) \times \frac{S(w) \cdot D(w)}{C(w)}$$
$$+ k^2 l^2 D^2(\varepsilon) (4 - S^2(\varepsilon)) S^2(\varepsilon) w$$
$$+ (5 - 7k^2 - 2(1 + k^2 - 3k^4) S^2(\varepsilon)) E \operatorname{am} w \Big]$$

Weil ferner

$$P(a) P(b) P'(c) = (c-a)^5 l^2 \frac{C^2(\varepsilon) \cdot D^2(\varepsilon)}{S^6(\varepsilon)}$$

so erhält man nach Seite 142, zweite Zeile, zwis n $W(x)$ und $T(x)$ die Relation

$$W(x) = \frac{4i\pi}{3 \cdot 7} \times P(a) P(b) P'(c) \times T(x)$$

4) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ v = 0.$

Da

$$f(z) = 2 \frac{\partial U(z)}{\partial z}$$

von der Ordnung $z^{5/2}$ ist, so steigt $U(z)$ auf $z^{5/2}$, $U^2(z)$ also auf z^5, $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ auf z^3, von da bis auf $\frac{1}{z}$ herab sind 4 Stufen; man muss also

$$f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

bis zur relativ vierten Ordnung entwickeln und setze, um die Ausziehung der Quadratwurzel zu erleichtern,

$$a+b+c = 0, \quad \text{dann} \quad \beta = bc + ca + ab = bc - a^2, \quad \gamma = abc.$$

Nun ist

$$(z-a)(z-b)(z-c) = z^3 \Big(1 + \frac{\beta}{z^2} - \frac{\gamma}{z^3}\Big),$$

$$f(z) = z^{3/2} \Big(1 + \frac{1}{2} \frac{\beta z - \gamma}{z^3} - \frac{1}{8} \Big(\frac{\beta z - \gamma}{z^3}\Big)^2 + \ldots\Big)$$

$$\frac{1}{2} f(z) = \frac{1}{2} z^{3/2} + 0 \cdot z^{1/2} + \frac{1}{4} \beta z^{-1/2} - \frac{1}{4} \gamma z^{-3/2} - \frac{1}{16} \beta^2 z^{-5/2} + \ldots;$$

$$U(z) = \frac{1}{5} z^{5/2} + 0 \cdot z^{3/2} + \frac{1}{2} \beta z^{1/2} + \frac{1}{2} \gamma z^{-1/2} + \frac{1}{24} \beta^2 z^{-3/2} + \ldots,$$

$$U^2(z) = \frac{1}{25}z^5 + 0 \cdot z^4 + \tfrac{1}{5}\beta z^3 + \tfrac{1}{5}\gamma z^2 + \frac{4}{15}\beta^2 z + \ldots$$

Wird dieses noch mit

$$\frac{1}{(z-x)^2} = \frac{1}{z^2} + 2 \cdot \frac{x}{z^3} + 3 \cdot \frac{x^2}{z^4} + 4 \cdot \frac{x^3}{z^5} + 5 \cdot \frac{x^4}{z^6} + \ldots$$

multiplicirt, so wird der Coeff. von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ gleich

$$F(x) = \frac{1}{15}(3x^4 + 9\beta x^2 + 6\gamma x + 4\beta^2) = \frac{1}{15}[3(x-a)^4 + 12a'x - a^3$$
$$+ 9(2a^2+\beta)(x-a)^2 + 6(2a^3 + 3\beta a + \gamma)(x-a) + 3a^4 + 9\beta a^2$$
$$+ 6\gamma a + 4\beta^2]$$

Hier ist

$$2a^2 + \beta = a^2 + bc, \quad 2a^3 + 3\beta a + \gamma = -a^3 + 4abc = -a(c-b)^2;$$

$$3a^4 + 9\beta a^2 + 6\gamma a + 4\beta^2 = -2a^4 + 7a^2bc + 4b^2c^2$$
$$= -(a^2 - 4bc)(2a^2 + bc)$$

wo

$$a^2 - 4bc = (b+c)^2 - 4bc = (c-b)^2$$

und

$$2a^2 + bc = a^2 - a(b+c) + bc = (b-a)(c-a)$$

also ist

$$3a^4 + 9\beta a^2 + 6\gamma a + 4\beta^2 = -(c-b)^2(b-a)(c-a)$$

Nun ist

$$15F(x) = 3(x-a)^4 + 12a(x-a)^3 + 9(a^2+bc)(x-a)^2$$
$$- 6a(c-b)^2(x-a) - (c-b)^2(b-a)(c-a)$$

Um die Beschränkung, die durch die Bedingung

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$$

gesetzt ward, wieder aufzuheben, setze man

$$\bar{x} = x - m, \quad \bar{a} = a - m, \quad \bar{b} = b - m, \quad \bar{c} = c - m$$

die Bedingung wird

$$a + b + c - 3m = 0$$

also ist

$$m = \tfrac{1}{3}(a+b+c); \quad 3\bar{a} = -(b+c-2a), \quad \text{etc.}$$

Unterschiede wie $\bar{x}-\bar{a}$, $\bar{b}-\bar{c}$ ändern sich nicht. Setzt man für einen Augenblick

$$f = b-a, \quad g = c-a, \quad \text{also} \quad c-b = g-f$$

so ist

$$3\bar{a} = f+g, \quad 3\bar{b} = 2f-g, \quad 3\bar{c} = -f+2g$$

folglich

$$g(\bar{a}^2+\bar{b}\,\bar{c}) = (f+g)^2+(2f-g)(-f+2g) = -f^2+7fg-g^2$$

und endlich

$$F(x) = \frac{1}{15}[3(x-a)^4-4(c-a+b-a)(x-a)^3-[(c-a)^2 -7(c-a)(b-a)+(b-a)^2](x-a)^2+2(c-a+b-a)(c-b)^2(x-a) -(c-b)^2(c-a)(b-a)]$$

oder also

$$(I) = \frac{2i\pi}{15}(c-a)^4\left[\frac{3}{S^2(w)}-4\cdot\frac{1+k^2}{S^0(w)}-\frac{1-7k^2+k^4}{S^4(w)} +2\frac{l^4(1+k^2)}{S^2(w)}-k^2l^4\right]$$

Ferner ist

$$U_1 = (c-a)^{5/2}\cdot 2\int_0^K k^4 S^2(u)\cdot C^2(u)\cdot D^2(u)\cdot du$$

Weil nun

$$15k^4S^2(u)\cdot C^2(u)\cdot D^2(u) = \frac{\partial}{\partial u}(3k^4S^3(u)\cdot C(u)\cdot D(u) -k^2(1+k^2)S(u)\,C(u)\,D(u))-l^2(1+l^2)+2(1-k^2+k^4)D^2(u)$$

so ist

$$U_1 = (c-a)^{5/2}\cdot\frac{2}{15}(2(1-k^2+k^4)\,\mathrm{E}-l^2(1+l^2)K)$$

$$\int_c^x \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)} = (c-a)^{5/2}\cdot 2\int_w^K \frac{C^2(u)\cdot D^2(u)}{S^6(u)}\,du$$

Es ist aber

$$15\frac{C^2(u)\cdot D^2(u)}{S^6(u)} = \frac{\partial}{\partial u}\left((1+k^2)\frac{C(u)\cdot D(u)}{S^3(u)}-3\frac{C(u)\cdot D(u)}{S^5(u)}\right) -2(1-k^2+k^4)\frac{C^2(u)}{S^2(u)}-l^2(1+l^2)$$

also

$$(II)+(III)=(c-a)^4\frac{2i\pi}{15}\frac{C(w)D(w)}{S^3(w)}\Big[2(1-k^2+k^4)E\,\mathrm{am}\,w-l^2(1+l^2)\,w$$
$$-3\,\frac{C(w)\,D(w)}{S^5(w)}+(1+k^2)\,\frac{C(w)\,D(w)}{S^3(w)}+2(1-k^2+k^4)\,\frac{C(w)\,D(w)}{S(w)}\Big]$$

endlich ist

$$W(x)=(c-a)^4\cdot\frac{2i\pi}{15}\Big[\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}(2(1-k^2+k^4)E\,\mathrm{am}\,w$$
$$-l^2(1+l^2)w)-\frac{k^2(1+k^2)}{S^2(w)}+k^2(1+k^4)\Big]$$

Die Vergleichung mit dem Werte von $T(x)$ auf Seite 142 gibt die Relation

$$W(x)=-(c-a)^6\,k^4\,l^4\cdot\frac{2i\pi}{3\,.\,5\,.\,7}\times T(x)$$
$$=-(c-a)^2\,(b-a)^2\,(c-b)\cdot\frac{2i\pi}{3\,.\,5\,.\,7}\times T(x)$$

und weil

$$P'(a)\,P'(b)\,P'(c)=-(c-a)^2\,(b-a)^2\,(c-b)^2$$

so hat man

$$W(x)=\frac{2i\pi}{3\,.\,5\,.\,7}\times P'(a)\,P'(b)\,P'(c)\times T(x)$$

Diese wenigen Beispiele lassen vermuten, es sei

$$\frac{W(x)}{T(x)}=2i\pi\,.\,P^{2\alpha}(a)\,P^{2\beta}(b)\,P^{2\gamma}(c)$$

multiplicirt mit einem numerischen Factor, den ich aus denselben nicht erraten kann. Bleibe ich beim dreiaxigen Ellipsoid, so bin ich nicht im Stande, denselben zu bestimmen, und gehe ich zum Rotationsellipsoid über, so sehe ich mich genötigt, von der Heine'schen Formel

$$W(x)=\Pi(x-a)^{\frac{1}{2}\alpha-\alpha}\,.\,(U_1V_2-U_2V_2)$$

auszugehen. Wenn

$$f(x)=\Pi(x-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}\times Px);$$

so ist

$$U_1=\int_a^b f(z'')\,dz'',\quad U_2=\int_b^c f(z')\,dz',\quad V_1=\int_a^b\frac{f(z'')\,dz''}{x-z''},$$

$$V_2 = \int_b^c \frac{f(z')\,dz'}{x - z'}$$

und also

$$W(x) = \Pi(x-a)^{\frac{1}{2}-\alpha} \iint \left(\frac{1}{x-z'} - \frac{1}{x-z''}\right) f(z')\,dz' \,.\, f(z'')\,dz''$$

$$\begin{pmatrix} b \leqslant z' \leqslant c \\ a \leqslant z'' \leqslant b \end{pmatrix}$$

Weil für ein grosses x die Entwicklung von $T(x)$ mit dem Term $x^{-\frac{n+1}{2}}$ beginnt, so denke man sich den vorliegenden Ausdruck auch nach fallenden Potenzen von x entwickelt, also

$$\frac{1}{x-z'} - \frac{1}{x-z''} = \frac{z'-z''}{x^2} + \frac{z'^2-z''^2}{x^3} + \frac{z'^3-z''^3}{x^4} + \ldots$$

Da

$$\tfrac{3}{2} - \Sigma\alpha = v - \frac{n-3}{2} = v+2-\frac{n+1}{2}$$

so müssen alle Doppelintegrale

$$\int_a^b \int_b^0 (z'^\lambda - z''^\lambda) f(z')\,dz' \,.\, f(z'')\,dz''$$

verschwinden für

$$\lambda = 1, 2, \ldots v$$

erst derjenige für $\lambda = v+1$ verschwindet nicht, sondern ist die Constante $\frac{W(x)}{T(x)}$, die bis auf eine Potenz von i mit den Heine'schen Constanten $\frac{4}{\mathfrak{k}}$ überein kommt. Es lässt sich aber auch direct zeigen, dass das Doppelintegral für die angegebenen Werte von λ verschwindet. Ob der eingeklammerte Unterschied $z'^{v+1} - z''^{v+1}$ oder $(z'-a)^{v+1} - (z''-b)^{v+1}$ geschrieben werde, ist für den Wert des Doppelintegrals gleichgültig. Denn man braucht in der zweiten Form des Unterschiedes nur nach dem binomischen Satze zu entwickeln und zu beachten, dass die zu

$$\lambda = 1, 2, \ldots v$$

gehörenden Doppelintegrale verschwinden. Es ist somit

$$\frac{W(x)}{T(x)} = \int_a^b \int_b^c [(z' - a)^{\nu+1} - (z'' - a)^{\nu+1}] f(z')\,dz' \,.\, f(z'')\,dz''$$

Bis dahin waren $x-a$, $x-b$, $x-c$ die Halbaxenquadrate des Ellipsoides

$$P(x) = \Pi(x-a)^{\alpha} \times Q(x)$$

und die ganze Function

$$Q(x) = x^{\nu} - d_1 x^{\nu-1} + \ldots$$

durch keinen der Factoren $x-a$, $x-b$, $x-c$ teilbar. Die ν Wurzeln der Gleichung

$$Q(x) = 0$$

waren alle reell und ungleich und lagen zwischen a und c; ζ derselben zwischen b und c, folglich $\nu-\zeta$ zwischen a und b. Für dasselbe (α, β, γ) gibt es $\nu+1$ Functionen $Q(x)$ (alle mit reellen Coefficienten); für keine zwei hatte ζ denselben Wert;

$$\zeta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \nu$$

Nun lasse ich $b-a$ verschwinden; die $\nu-\zeta$ Wurzeln vereinigen sich mit a; es sei

$$Q(x) = (x-a)^{\nu-\zeta} Q_1(x)$$

Wenn ich

$$\nu - \zeta + \alpha + \beta = \frac{m}{2}$$

setze, so ist m eine ganze nulle oder positive Zahl, und es folgt

$$\zeta + \gamma = \frac{n-m}{2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\sin^2\left(\frac{n-m}{2}\right)\pi$$

Wenn m gerade ist, so kann $\alpha+\beta$ sowol $= 0$ als $= 1$ sein; wenn aber m ungerade ist, so ist notwendig

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}$$

Man schreibe nun

$$\overline{x-c} = x, \quad \overline{c-b} = a, \quad \overline{c-a} = a;$$

$$P(x) = x^{\gamma}(x+a)^{\frac{m}{2}} Q_1(x)$$

wo die ganze Function

$$Q_1(x) = x^{\zeta} - \vartheta_1 x^{\zeta-1} + \ldots$$

weder durch x, noch durch $x+a$ teilbar ist. Man kann von neuem die Bedingung, dass

$$\frac{2(x+a)\sqrt{x}}{P(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(2(x+a)\sqrt{x} \cdot \frac{\partial P(x)}{\partial x}\right)$$

eine lineare Function von x sei, setzen und findet als notwendige Folge, dass γ nur 0 oder $\frac{1}{2}$ sein kann, und dass m eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ sein muss. Die lineare Function ist dann

$$n(n+1)(x+a) - m^2 a$$

Die Differentialgleichung für $P(x)$ nimmt also folgende Gestalt an

$$\frac{2(x+a)\sqrt{x}}{P(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(2(x+a)\sqrt{x} \cdot \frac{\partial P(x)}{\partial x}\right) = n(n+1)(x+a) - m^2 a$$

Dieser Differentialgleichung genügt

$$P(x) = x^{\frac{n-m}{2}} (x+a)^{\frac{m}{2}} \mathrm{F}\left(-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -n+\tfrac{1}{2}, -\frac{a}{x}\right)$$

Da sich aber die Gleichung nicht ändert, wenn man n durch $-n-1$ ersetzt, so genügt auch

$$T(x) = x^{-\frac{n+m+1}{2}} (x+a)^{\frac{m}{2}} \mathrm{F}\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m}{2}+1, n+\tfrac{3}{2}, -\frac{a}{x}\right)$$

Dass die Bezeichnung mit $T(x)$ richtig ist, erhellt aus dem Anfangsterme $x^{-\frac{n+1}{2}}$ der Entwicklung nach fallenden Potenzen von x.

Aus der zuletzt angegebenen Integralformel $\frac{W(x)}{T(x)}$ geht sogleich hervor, dass für ein kleines k^2 der Ausdruck die Form

$$\frac{W(x)}{T(x)} = U_1 \int_b^c (z'-a)^{\nu+1} f(z')\, dz' = U_1 \times L$$

annimmt, wo nun U_1 und L zu berechnen sind. Der Einfachheit wegen nehme ich $a - b = 0$ und verfolge den Wert der Lamé'schen Function $P(x)$, während das Argument x sich von c nach b (b sehr klein) und von b nach 0 hinbewegt. Wir hatten

$$P(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \times Q(x)$$

gesetzt, wo

$$Q(x) = x^v - d_1 x^{v-1} + d_2 x^{v-2} + \ldots + (-1)^\lambda d_\lambda x^{v-\lambda} + \ldots \\ \ldots + (-1)^v d_v$$

eine ganze Function $v$ten Grades von x ist. Die Relation, welche die Coefficienten von x in der Function $Q(x)$ mit einander verknüpft, ist bekanntlich

$$(\lambda+1)(2n-2\lambda-1)d_{\lambda+1} = [(2n-1)d - 2\lambda(n-\lambda) \cdot \Sigma a + 4\lambda \cdot \Sigma aa] d_\lambda \\ + (v-\lambda+1)[(2v-2\lambda+1) \cdot \Sigma bc + 4 \cdot \Sigma a bc] d_{\lambda-1} \\ + 2(v-\lambda+2)(v-\lambda+1) abc \cdot d_{\lambda-2}$$

Setzt man nun hier $a = b = 0$, so hat man

$$(\lambda+1)(2n-2\lambda-1)d_{\lambda+1} = 2c\left[\lambda^2 - (n-2\gamma)\lambda + \frac{(2n-1)d}{2c}\right] d_\lambda$$

also

$$\frac{d_{\lambda+1}}{d_\lambda} = \frac{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\zeta)}{(\lambda+1)(\lambda-n+\frac{1}{2})} \times (-c)$$

wenn

$$\lambda^2 - (n-2\gamma)\lambda + \frac{(2n-1)d}{2c} = (\lambda-\varepsilon)(\lambda-\zeta)$$

angenommen wird. Weil $d_0 = 1$ ist, so ergibt sich

$$Q(x) = x^v \cdot \mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$$

und da $Q(x)$ eine ganze Function von x ist, so muss die hypergeometrische Reihe abbrechen, also wenigstens ein oberer Parameter eine negative ganze Zahl sein. Wird nun $\zeta \leq \varepsilon$ angenommen, und ist ζ eine ganze positive Zahl, so ist es wegen der Relation

$$\varepsilon + \zeta = n - 2\gamma$$

auch ε. Es ist demnach

$$Q(x) = x^{v-\zeta} \times x^\zeta \mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$$

und $x^\zeta \mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \frac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$ ist eine ganze Function ζten Grades von x; die Function $Q(x)$ ist somit durch $x^{v-\zeta}$ teilbar und von den v Wurzeln fallen somit $v-\zeta$ mit null zusammen. Ist also $a = b = 0$ und wird dem Argument x nur die nördliche Halbebene als Spielraum angewiesen, so hat man für $b < x < c$

$$P(x) = i^{2\gamma} \cdot x^{\frac{1}{2}m}(c-x)^\gamma x^\zeta \mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$$

wenn

$$m = \varepsilon - \zeta = n - 2\gamma - 2\zeta = 2(\alpha+\beta+\nu-\zeta); \quad n = 2(\alpha+\beta+\gamma+\nu)$$

gesetzt wird. Da

$$\zeta = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$

sein kann, so kann m wol 0 oder eine positive ganze Zahl sein, nicht aber eine negative ganze Zahl werden. Setzt man

$$x = c\sin^2\theta; \quad \cos\theta = u$$

und beachtet, dass

$$\tfrac{1}{2}(m+2\gamma+2\zeta) = \frac{n}{2}$$

ist, so folgt

$$P(x) = i^{2\gamma} \cdot c^{\frac{n}{2}} \sin^m\theta \cos^{2\gamma}\theta \times \sin^{2\zeta}\theta \mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$

Wenn

$$R(x) = \sin^{2\zeta}\theta \times \mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$
$$= (1-u^2)^{\zeta}\mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{1}{1-u^2}\right)$$

gesetzt und nun auf die hypergeometrische Reihe die Verwandlungsformel

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

angewandt wird, so erhält man

$$R(x) = (-1)^{\zeta}u^{2\zeta}\mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{1}{u^2}\right).$$

Weil nun aber

$$+\varepsilon = \frac{n+m}{2} - \gamma, \quad +\zeta = \frac{n-m}{2} - \gamma$$

so erkennt man, dass für

$$\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = \tfrac{1}{2}$$

die beiden obern Parameter mit einander tauschen und somit ist auch

$$R(x) = (-1)^{\zeta}u^{2\zeta}\mathrm{F}\left(-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -(n-\tfrac{1}{2}), \frac{1}{u^2}\right)$$

Der Coefficient von $xu^{-2\lambda}$ in der Entwicklung der Function F(. . .) ist nun aber

$$(-1)^\lambda \frac{(n-m)(n-m-1)\ .\ .\ .\ (n-m-2\lambda+1)\times n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-\lambda+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ \lambda\times 2n(2n-1)\ .\ .\ .\ (2n-2\lambda+1)}$$
$$= \frac{(n-m)!\,n!}{(2n)!} \times (-1)^\lambda \frac{(2n-2\lambda)!}{\lambda!\,(n-\lambda)!\,(n-m-2\lambda)!}$$

und da

$$\frac{(2n-2\lambda)!}{(n-m-2\lambda)!} \times u^{n-m-2\lambda} = (2n-2\lambda)(2n-2\lambda-1)\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ (n-m-2\lambda+1)u^{n-m-2\lambda} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial u^{n+m}} \cdot (u^{2n-2\lambda})$$

so ist

$$u^{n-m} \times \mathrm{F}\left(-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -(n-\tfrac{1}{2}), \frac{1}{u^2}\right)$$
$$= \frac{(n-m)!\,n!}{(2n)!} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m} \cdot \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!\,(n-\lambda)!} \cdot u^{2n-2\lambda}$$
$$= \frac{(n-m)!}{(2n)!} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m} \cdot (u^2-1)^n$$

Wird nun die Heine'sche Kugelfunction erster Art mit $\mathrm{P}^n(x)$ bezeichnet, so erhält man nach der Formel

$$\mathrm{P}^n(u) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^n \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^n$$

für die Lamé'schen Function $P(x)$ schliesslich den Ausdruck

$$P(x) = i^{n-m} \cdot c^{\frac{n}{2}} \cdot 2^n \frac{n!\,(n-m)!}{(2n)!} \cdot \sin^m\theta\, \mathrm{P}^m\, \mathrm{P}^n(u)$$

Dieselbe geht also, wie auch schon Heine gezeigt hat, in eine zugeordnete Kugelfunction über. Dasselbe zeigt auch schon die für $P(x)$ geltende Differentialgleichung. Nun soll $x = c$, also

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

gesetzt werden. Weil

$$n - m = 2\gamma + 2\zeta$$

so ist $n-m$ für $\gamma = 0$ gerade und für $\gamma = \frac{1}{2}$ ungerade, und die Formel

$$P(x) = i^{n-m} \cdot c^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n!\,(n-m)!}{(2n)!} \cdot \sin^m\theta$$
$$\cdot \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{(2n-2\lambda)!}{\lambda!\,(n-\lambda)!\,(n-m-2\lambda)!} \cdot u^{n-m-2\gamma}$$

gibt nun sogleich

$$1)\quad P(c) = c^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n!\,(n-m)!\,(n+m)!}{(2n)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!\left(\frac{n+m}{2}\right)!}$$

$$= c^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(n+\tfrac{1}{2})}$$

für $\gamma = 0$ und $P(c) = 0$ für $\gamma = \frac{1}{2}$. Ferner ist

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = P'(x) = i\sqrt{c}\sin\theta\,\frac{\partial P(x)}{\partial\theta} = -i\sqrt{c}\,(1-u^2)\,\frac{\partial P(x)}{\partial u}$$

also

$$2)\quad P'(c) = c^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{n!\,(n-m)!\,(n+m)!}{\left(\frac{n+m-1}{2}\right)!\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!}$$

$$= c^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+m}{2}-1\right)}{\Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(n+\tfrac{1}{2})}$$

für $\gamma = \frac{1}{2}$. Setzt man nun

$$\frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}}\cdot P(x) = P^{2\gamma}(x)$$

so lassen sich 1) und 2) durch folgende Formel ausdrücken:

$$I^{2\gamma}(c) = c^{\frac{n}{2}+\gamma} \cdot 2^{2\gamma}\,\frac{n!\,(n+m)!\,(n-m)!}{(2n)!\left(\frac{n+m}{2}-\gamma\right)!\left(\frac{n-m}{2}-\gamma\right)!}$$

Ich untersuche nun die Function $P(x)$, wenn $a = 0$, b sehr klein und das Argument x zwischen 0 und b liegt. Nach Weglassung alles dessen, was die Ordnung b übersteigt, nimmt die Recursionsscale für die d folgende Gestalt an:

$$(\lambda+1)(\lambda-n+\tfrac{1}{2})\,\frac{d_{\lambda+1}}{c} + \left[\lambda^2-(n-2\gamma)\lambda+\frac{(m-)\,d}{2\sigma}\right.$$

$$\left.+\frac{b}{c}\lambda(\lambda-n+2\beta)\right]d_\lambda+(\nu-\lambda+1)(\nu-\lambda+2\alpha+\tfrac{1}{2})\,b\,d_{\lambda-1} = 0$$

Dieser Ausdruck zeigt nun sogleich, dass d_1, d_2, d_3, . . . , d_ζ von den früher angegebenen Werten nur um ein kleines von der Ordnung b abweichen. Weil

$$\frac{d_{\lambda+1}}{d_\lambda} = \frac{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\zeta)}{(\lambda+1)(\lambda-n+\frac{1}{2})} \cdot (-c)$$

so ist

$$d_\lambda = \frac{(-\varepsilon)(-\varepsilon+1)(-\varepsilon+2)\ldots(-\varepsilon+\lambda-1)\times(-\zeta)(-\zeta+1)(-\zeta+2)\ldots(-\zeta+\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\lambda\times(\frac{1}{2}-n)(\frac{3}{2}-n)\ldots(\lambda-n-\frac{1}{2})} \times(-c)^\lambda.$$

und man erkennt, dass sich die Coefficienten d für

$$\lambda = \zeta+1,\quad \zeta+2,\quad \zeta+3,\ldots$$

von 0 nur um ein Kleines von der Ordnung b unterscheiden. Setzt man $\lambda = \zeta$, so folgt

$$d_\zeta = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\ldots(\varepsilon-\zeta+1)}{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots(n-\zeta+\frac{1}{2})}\cdot c^\zeta = \frac{\Gamma(\varepsilon+1)\Gamma(n-\zeta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\varepsilon-\zeta+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\cdot c^\zeta$$

und wenn man beachtet, dass

$$\zeta = \frac{n-m}{2}-\gamma,\quad \varepsilon = \frac{n+m}{2}-\gamma$$

ist, so hat man

$$d_\zeta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1-\gamma\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})}\times c^\zeta$$

und d_ζ erhält also für $\gamma = 0$ und $\gamma = \frac{1}{2}$ denselben Wert. Beachtet man nun, dass nach der Formel

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2})$$

auch

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+m+1) = 2^{n+m}\,\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)$$

und

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(2n+1) = 2^{2n}\cdot\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+1)$$

ist, so hat man schliesslich

$$d_\zeta = 2^{n-m}\,\frac{n!\,(n+m)!}{(2n)!\,m!}\cdot c^\zeta$$

Man setze nun

$$x = b\sin^2\varphi$$

dann fallen in der Function $Q(x)$ die Terme

$$x^\nu,\quad d_1x^{\nu-1},\quad d_2x^{\nu-2},\ldots,\quad d_{\zeta-1}x^{\nu-\zeta+1}$$

als klein höherer Ordnung weg und $Q(x)$ erhält die Form

1) $Q(x) = b^v \sin^{2v}\varphi - d_1 b^{v-1}\sin^{2(v-1)}\varphi + d_2 b^{v-2}\sin^{2(v-2)}\varphi + \ldots$
$\ldots + (-1)^\lambda d_\lambda b^{v-\lambda}\sin^{2(v-\lambda)}\varphi + \ldots$
$+ (-1)^{\zeta-1} d_{\zeta-1} b^{v-\zeta+1}\sin^{2(v-\zeta+1)}\varphi + (-1)^\zeta d_\zeta b^{v-\zeta}\sin^{2(v-\zeta)}\varphi + \ldots$
$+ (-1)^v \cdot dv$

Setzt man in der Recursionsscale für die Coeff. d auch $\lambda = 0$ und beachtet, dass

$$dv + 1 = 0$$

sein muss, so folgt

$$(v-\varepsilon)(v-\zeta)d_v + (2\alpha+\tfrac{1}{2})\, b\, d_{v-1} = 0$$

und man erkennt, dass d_v mit $b\,d_{v-1}$ von derselben Ordnung der Kleinheit ist. Setzt man ferner

$$\lambda = v - 1$$

und lässt den Term mit d_v neben den Termen mit d_{v-1} und d_{v-2} weg, so findet man ferner, dass d_{v-1} mit $b\,d_{v-2}$ von derselben Ordnung der Kleinheit ist. Fährt man so fort, so kommt man zu dem Schlusse, dass die Terme

$$d_v, \quad b\,d_{v-1}, \quad b^2 d_{v-2}, \quad b^3 d_{v-4}, \quad \ldots, \quad b^{v-\zeta} d\zeta$$

alle klein von derselben Ordnung sind und somit sind alle in der Function $Q(x)$ noch auftretenden Glieder von derselben Ordnung der Kleinheit. Die Recursionsscale verliert somit den ersten Term, und setzt man noch $v - \lambda$ für λ, so wird dieselbe

$$\frac{b^{\lambda+1} d_{v-\lambda-1}}{b^\lambda d_{v-\lambda}} = \frac{(\lambda+\varepsilon-v)(v-\zeta-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+2\alpha+\frac{1}{2})}$$

und es ist somit

2) $\quad Q(x) = (-1)^v dv \cdot \mathrm{F}(-(v-\zeta),\ \varepsilon - v,\ 2\alpha+\tfrac{1}{2},\ \sin^2\varphi)$

Um dv zu bestimmen, setze man in Formel 1) und 2) die Coeff. von $\sin^{2(v-\zeta)}\varphi$ einander gleich. Man erhält

$$b^{v-\zeta} d\zeta = \frac{(\varepsilon-v)(\varepsilon-v+1)(\varepsilon-v+2)\ldots(\varepsilon-\zeta-1)}{(2\alpha+\frac{1}{2})(2\alpha+\frac{3}{2})\ldots(2\alpha+v-\zeta-\frac{1}{2})} \times dv$$

Nach früheren Formeln ist nun aber

$$v-\zeta = \frac{m}{2} - \alpha - \beta, \quad \varepsilon - v = \frac{m}{2} + \alpha + \beta,$$

$$\varepsilon - \zeta = m, \quad v - \zeta + 2\alpha - \tfrac{1}{2} = \frac{m-1}{2} + \alpha - \beta$$

wenn man m als von null verschieden annimmt,

$$\frac{dv}{b^{v-\zeta}d\zeta} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+\alpha-\beta\right)\times\Gamma\left(\frac{m}{2}+\alpha+\beta\right)}{\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})\times\Gamma(m)}$$

Dieser Ausdruck liefert nun für $\beta = 0$ und $\beta = \frac{1}{2}$ denselben Wert, und man hat demnach

$$\frac{dv}{b^{v-\zeta}d\zeta} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(m)} = \frac{1}{2^{m+2\alpha-1}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(m+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(m)}$$

also

$$dv = \frac{b^{v-\zeta}d\zeta}{2^{m-1}} \text{ für } \alpha = 0 \text{ und } = m\frac{b^{v-\zeta}d\zeta}{2^{m-1}} \text{ für } \alpha = \tfrac{1}{2}$$

somit

$$dv = \frac{m^{2\alpha}}{2^{m-1}}\times b^{v-\zeta}\,d\zeta$$

und schliesslich

$$dv = 2^{n-2m-1}\,m^{2\alpha}\,.\,\frac{n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!}\times b^{\frac{m}{2}-\alpha-\beta}\times c^{\frac{n-m}{2}-\gamma}$$

Es bleibt noch zu erklären, wie dieser Ausdruck für $m = 0$ zu verstehen ist. Setzt man $m = 0$, so ist auch

$$v-\zeta+\alpha+\beta = 0, \quad \text{also} \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \zeta = v$$

nur aus dem Werte für $d\zeta$ folgt

$$dv = 2^n\,.\,\frac{n!\,n!}{(2n)!}\times c^v$$

und man erkennt somit, dass in dem Ausdrucke dv das Zeichen $m^{2\alpha}$ für $m = 0$, also auch $\alpha = 0$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen ist. Für die Function $I'(x)$ erhält man nun den Ausdruck

$$I'(x) = i^{n-2\alpha}\,.\,g\,.\,m^{2\alpha}\,.\,\sin^{2\alpha}\varphi\,.\,\cos^{2\beta}\varphi$$
$$.\,\mathrm{F}\left(-\left(\frac{m}{2}-\alpha-\beta\right),\ \frac{m}{2}+\alpha+\beta,\ 2\alpha+\tfrac{1}{2},\ \sin^2\varphi\right)$$

wenn abkürzend

$$g = 2^{n-2m+1}\,.\,\frac{n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!}\times b^{\frac{m}{2}}\times c^{\frac{n-m}{2}}$$

gesetzt wird. Für die Exponentengruppen

$$(\alpha,\ \beta) = (0,\ 0),\quad (\tfrac{1}{2},\ 0),\quad (0,\ \tfrac{1}{2}),\quad (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2})$$

nimmt nun dieselbe folgende Formen an:

1) $(\alpha,\ \beta) = (0,\ 0)$, $P(x) = i^{\alpha} \cdot g \cdot \sum_{\lambda=0} \frac{m}{m+2\lambda} \binom{\frac{m}{2}+\lambda}{2\lambda} (-4\sin^2\varphi)^{\lambda}$;
$\cdot$ (m eine gerade Zahl)

2) $(\alpha,\ \beta) = (0,\ \frac{1}{2})$; $P(x) = i^{n-1} \cdot g \cdot \cos\varphi \cdot \sum_{\lambda=0} \binom{\frac{m-1}{2}+\lambda}{2\lambda}$
$\times (-4\sin^2\varphi)^{\lambda}$; ($m$ ungerade)

3) $(\alpha,\ \beta) = (\frac{1}{2},\ 0)$; $P(x) = i^{n-1} \cdot mg \cdot \sin\varphi \cdot \sum_{\lambda=0} \frac{1}{2\lambda+1} \binom{\frac{m-1}{2}+\lambda}{2\lambda}$
$\times (-4\sin^2\varphi)^{\lambda}$; ($m$ ungerade)

4) $(\alpha,\ \beta) = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$; $P(x) = i^{n-1} \cdot 2g \sin\varphi \cos\varphi \cdot \sum_{\lambda=0} \binom{\frac{m}{2}+\lambda}{2\lambda+1}$
$\times (-4\sin^2\varphi)^{\lambda}$; ($m$ gerade)

Wendet man nun auf diese Ausdrücke bekannte Summenformeln an, so lassen sich alle 4 durch die einzige Formel

$$P(x) = i^{n-2\alpha} \times g \cos(m\varphi - \alpha\pi) \quad \text{(halb für } m = 0)$$

darstellen. Beachtet man nun, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\sqrt{c}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ist, so erhält man aus der letzten Formel sogleich

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}} P(x) \text{ (für } x = 0) = P^{2\alpha}(0) = i^{n+2\alpha} \times c^{\alpha} \times m^{2\alpha} \cdot g;$$

$$\frac{\partial^{2\beta}}{\partial t^{2\beta}} (P(x) \text{ (für } x = b) = P^{2\beta}(b) = i^{n-m+2\beta} \cdot c^{\beta} \cdot m^{2\alpha} \cdot g$$

wo im Falle $m = 0$ die Zeichen $m^{2\alpha}$ und $m^{2\beta}$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen sind. Die Multiplication der beiden letzten Ausdrücke gibt nun

$$P^{2\alpha}(0) \times P^{2\beta}(b) = i^{2n-m+2\alpha+2\beta} \times c^{\alpha+\beta} \times m^{2\alpha+2\beta} \times g^2$$

und wenn man dieses Product noch mit $P^{2\gamma}(c)$ multipl., so folgt

$$P^{2\alpha}(0)\,P^{2\beta}(b)\,P^{2\gamma}(c) = i^{2n-m}\,|^{2\alpha+2\beta} \times 2^{2\gamma} \times c^{\frac{n}{2}+\alpha+\beta+\gamma} \times m^{2\alpha+2\beta} \times g^2 \frac{n!\,(n+m)!\,(n-m)!}{(2n)!\left(\frac{n+m}{2}-\gamma\right)!\left(\frac{n-m}{2}-\gamma\right)!}$$

wo $m^{2\alpha+2\gamma}$ für $m = 0$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen ist.

Nach diesen Erörterungen können wir nun an die Ausrechnung von U_1 und L gehen. Es war

$$U_1 = \int_0^b f(z'')\,dz''$$

setzt man hier

$$z'' = b\sin^2\varphi$$

so ist

$$f(z'')\,dz'' = z''^{\alpha-1|2}(z''-b)^{\beta-1|2}(z''-c)^{\gamma-1|2} \times P(z'')\,dz''$$
$$= (-1)^{\beta+\gamma-1}(z'')^{\alpha-1|2}(b-z'')^{\beta-1|2}(c-z'')^{\gamma-1|2} \times P(z'')\,dz''$$

oder also

$$f(z'')\,dz'' = (-1)^{n-v+2\alpha-1} \times 2b^{\alpha+\beta}\,.\,c^{\gamma-1|2}g\sin^{2\alpha}\varphi\cos^{2\beta}\varphi(m\varphi-\alpha\pi)d\varphi$$

somit

$$U_1 = (-1)^{n-v+2\alpha-1}\,2b^{\alpha+\beta}c^{\gamma-1|2}g\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha}\varphi\cos^{2\beta}\varphi\cos(m\varphi-\alpha\pi)\,d\varphi$$

Ich sehe mich nun genötigt, hier die Exponentengruppen

$$(\alpha,\ \beta) = (0,\ 0),\quad (0,\ \tfrac{1}{2}),\quad (\tfrac{1}{2},\ 0),\quad (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2})$$

gesondert zu behandeln und setze deshalb

$$S(m,\ \alpha,\ \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha}\varphi\cos^{2\beta}\varphi\cos(m\varphi-\alpha\pi)\,d\varphi$$

1°) Wenn $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so ist m gerade;

$$S(m,\ 0,\ 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\varphi\, d\varphi = \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{2} = 0$$

im allgemeinen, aber $= \frac{\pi}{2}$, wenn $m = 0$.

$$U_1 = (-1)^{n-v-1}\, 2c^{\gamma-1}|_2 g = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma-1} \cdot \pi \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot c^{\frac{n}{2}+\gamma+\frac{1}{2}}$$

2°) Wenn $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, so ist m ungerade;

$$S(m,\ 0,\ \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cos m\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(m-1)\varphi + \cos(m+1)\, d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{m-1} \sin\left(\frac{m-1}{2}\pi\right) + \frac{1}{m+1} \sin\left(\frac{m+1}{2}\pi\right) = 0 \right.$$

wenn nicht $m = 1$ ist; dann aber $= \frac{\pi}{4}$.

Weil $b = ck^2$, so ist

$$U_3 = (-1)^{n-v-1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k\, c^\gamma g = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\gamma} \cdot \pi \frac{n+1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot k^2 c^{\frac{n}{2}+\gamma}$$

3°) Wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, so ist m ungerade;

$$S(m,\ \tfrac{1}{2},\ 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \sin m\varphi\, d\varphi = 0,$$

wenn nicht $m = 1$; dann aber $= \frac{\pi}{4}$.

$$U_4 = (-1)^{n-v} \frac{\pi}{2} \cdot k\, c^\gamma g = (-1)^{\frac{n+1}{2}+\gamma} \pi \cdot \frac{n+1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot k^2 c^{\frac{n}{2}+\gamma}$$

4°) Wenn $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$, so ist m gerade;

$$S(m, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \sin m\varphi \, d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(m-2)\varphi - \cos(m+2\varphi)\, d\varphi = 0,$$

wenn nicht $m = 2$, dann aber $= \frac{\pi}{8}$. Es ist also

$$U_1 = (-1)^{n-v} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot k^2 c^{\gamma+1} g = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma+1} \pi \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{64}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot k^4 c^{\frac{n+1}{2}+\gamma}$$

Alle 4 Fälle, in welchen U_1 dargestellt wurde, setzen also nach der Formel

$$m = 2(v - \zeta + \alpha + \beta)$$

voraus, dass $\zeta = v$ sei, dass also keine Wurzel der Gleichung

$$Q(x) = 0$$

in das Intervall von a bis b falle. Diese Voraussetzung machen wir auch bei der nachfolgenden Berechnung von L. Es sei also

$$m = 2(\alpha + \beta)$$

Setzt man

$$x^1 - \bar{c} = x^1; \quad \bar{c} - \bar{a} = a; \quad \bar{c} - \bar{b} = a$$

wo aber $\bar{a} = 0$ und $\bar{b}$ sehr klein, so ist

$$L = \int_{-a}^{0} (x^1 + a)^{\varepsilon+1} f(x^1)\, dx')$$

Weil

$$f(x^1) = (x^1 + a)^{\frac{m}{2}-1} x^{1\gamma-1} P(x^1)$$

wenn man

$$x^1 = -a\cos^2\theta = -au^2$$

setzt, in

$$f(-au^2) = i^{2\gamma-1}(1-u^2)^{\frac{m}{2}-1}\,{}_{a}^{\frac{m}{2}+\gamma-\frac{3}{2}}\,u^{2\gamma-1}P(-a^2w^2)$$

übergeht und nun nach früherem

$$P(-au^2) = i^{n-m}a^{\frac{n}{2}}\frac{(n-m)!}{(2n)!}(1-u^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m}(u^2-1)^n$$

ist, so ergibt sich unter Anwendung des Satzes

$$(1-u^2)^m\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m}(u^2-1)^n = (-1)^m\frac{(n+m)!}{(a-m)!}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-m}(u^2-1)^n$$

dass

$$L = (-1)^n(-i)\cdot 2\frac{(n+m)!}{(2n)!}a^{n+\frac{1}{2}}\int_0^1 u^{2\gamma}(u^2-1)^v\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-m}(u^2-1)^n du$$

ist. Beachtet man, dass

$$2v+2\gamma = n-m$$

dass also der Integrand eine ganze Function $n$ten Grades von u^2 ist, so kann man die untere Grenze auf -1 herabrücken, den Factor 2 tilgen und partiell integriren. Dann wird

$$L = (-1)^m(-i)\frac{(n+m)!}{(2n)!}a^{n+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{+1}(u^2-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-m}(u^{2\gamma}(u^2-1)^v)\,du$$

$$= (-1)^{n-m}(-i)\frac{(n+m)!\,(n-m)!}{2^{2n}n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\Gamma(\tfrac{1}{2})a^{n+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^n du$$

Weil

$$2\int_0^1(1-u^2)^n du = \int_0^1(1-u^2)\frac{2u\,du}{u} = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^n dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})n!}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

so ist schliesslich

$$L = (-1)^{n-m-1}\frac{2i}{2n+1}\cdot\frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2(n+m)!\,(n-m)!}{(2^n\Gamma(n+\frac{1}{2}))^2}a^{n+\frac{1}{2}}$$

Diese Formel werde nun in den vier Fällen

$$(\alpha,\ \beta) = (0,\ 0),\quad (0,\ \tfrac{1}{2}),\quad (\tfrac{1}{2},\ 0),\quad (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2})$$

auf

$$\frac{W(x)}{T(x)} = U_1 L = 2i\pi \times \text{Prod.} \times M$$

angewandt, wenn

$$\text{Prod.} = P^{2\alpha}(0)\, P^{2\beta}(b)\, P^{2\gamma}(c) \quad \text{und} \quad \frac{m}{2} = \alpha + \beta, \quad \frac{n-m}{2} = v + \gamma$$

Zuletzt trachte man darnach, nur n und v zu behalten. In den Ausdrücken für U_1 werde der Buchstabe c durch a ersetzt.

$$1^0) \quad (\alpha, \beta) = (0, 0).$$

$$U_1 L = (-1)^{\frac{n}{2}-\gamma} \cdot \frac{2i\pi}{2n+1} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 a^{\frac{3n}{2}+\gamma};$$

$$\text{Prod} = \frac{(-1)^n}{2^{n-2\gamma}} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^2 \cdot \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)!\right)^2} a^{\frac{3n}{2}+\gamma}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma} \, 2^{n-2\gamma} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\left(\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)!\right)^2}{n!}$$

$$1^0) \quad \gamma = 0.$$

Weil

$$\frac{1}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

so ist

$$\frac{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\left(\frac{n}{2}\right)!}{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^n \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

$$2^0) \quad \gamma = \tfrac{1}{2}.$$

$$\frac{\left(\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)!\right)^2}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) v!}{2^n \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

Beachtet man, dass

$$\gamma = \frac{n}{2} - v, \quad \text{also} \quad \frac{n}{2} + \gamma = n - v$$

so kann man beide Fälle in folgenden Ausdruck vereinigen:

$$M = (-1)^{n-v} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v}(2n+1)\,\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

II°) $(\alpha, \beta) = (0, \frac{1}{2})$,

$$U_1 L = (-1)^{\frac{n+1}{2}-\gamma} \cdot \frac{2i\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{4n} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 k^{\frac{3n+1}{2}+\gamma} a^{\frac{3n+1}{2}+\gamma}$$

$$\text{Prod.} = \frac{(-1)^n}{2^{n-2\gamma+2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \frac{(n+1)^3 (n-1)!}{\left(\frac{n+1}{2}-\gamma\right)! \left(\frac{n-1}{2}-\gamma\right)!} \cdot k^{\frac{3n+1}{2}+\gamma} a^{\frac{3n+1}{2}+\gamma}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\gamma} 2^{n-2\gamma} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}-\gamma\right)! \left(\frac{n-1}{2}-\gamma\right)!}{(n+1)!}$$

1°) $\gamma = 0$, also $\frac{n-1}{2} = v$.

Weil

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{n+1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

so ist

$$2^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)! \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

2°) $\gamma = \frac{1}{2}$, also $\frac{n}{2} - 1 = v$.

$$2^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\right)! \left(\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

weil ferner

$$\gamma = \frac{n-1}{2} - v, \quad \text{also} \quad \frac{n-1}{2} + \gamma = n - v - 1,$$

so ist in beiden Fällen

$$M = (-1)^{n-v-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, v!}{2^{n-2v}\, \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}.$$

III°) $(\alpha,\ \beta) = (\frac{1}{2},\ 0)$.

$$M = (-1)^{n-v} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v}\, \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

IV°) $(\alpha,\ \beta) = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$.

$$U_1 L = (-1)^{\frac{n}{2}-\gamma} \cdot \frac{2i\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{64\, n\,(n-1)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n\, \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \cdot k^4 a^{\frac{3n}{2}+\gamma+1},$$

$$\text{Prod.} = \frac{(-1)^n}{2^{n+6-2\gamma}} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\, \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \cdot \frac{(n+1)^3 (n+2)^3 (n-2)!}{\left(\frac{n}{2}-\gamma+1\right)! \left(\frac{n}{2}-\gamma-1\right)!} \cdot k^4 a^{\frac{3n}{2}+\gamma+1}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma} \cdot 2^{n-2\gamma} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}-\gamma+1\right)! \left(\frac{n}{2}-\gamma-1\right)!}{(2n+1) \cdot (n+2)!};$$

$$\frac{n}{2} = v+1+\gamma$$

1°) $\gamma = 0$, also $v = \frac{n}{2}-1$; $\quad n-v = \frac{n}{2}+1$.

Weil

$$\frac{2^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)},$$

so ist

$$2^{n+2} \frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)!}{(n+2)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

$$2^0) \quad \gamma = \tfrac{1}{2}, \quad \text{also} \quad v = \frac{n-3}{2}, \quad n-v = \frac{n+3}{2},$$

$$2^{n+2} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+2)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

und somit ist in beiden Fällen

$$M = (-1)^{n-v-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \,.\, v!}{2^{n-2v}\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

Die vier Ausdrücke für M können nun in den einzigen

$$M = (-1)^{n-v-2\beta} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \,.\, v!}{2^{n-2v}\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

zusammen gefasst werden. Der Factor M ist zwar nur für diejenige Wurzel der Gleichung $d_{v+1} = 0$ bewiesen, bei welcher keine Wurzel der Gleichung $Q(x) = 0$ zwischen a und b liegt. Da derselbe aber eine rationale Zahl ist, so muss er für alle $v+1$ Wurzeln jener Gleichung $d_{v+1} = 0$, die sehr wahrscheinlich irreductibel ist, derselbe bleiben. Dann gilt allgemein für das dreiaxige Ellipsoid die Gleichung:

$$W(x) = 2i\pi \,.\, (-1)^{n-v-2\beta} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \,.\, v!}{2^{n-2v}\Gamma(n-v+\frac{1}{2})} \times P^{2\alpha}(a)\, P^{2\beta}(b)\, P^{2\gamma}(c) \times T(x).$$

Aarau, den 10. April 1890.

XV.

Zur Mechanik der atmosphärischen Bewegungen.

Von

Emil Oekinghaus.

Wir geben in den nachfolgenden Entwickelungen eine Fortsetzung derjenigen Arbeiten, welche wir in der „Wochenschrift der Astronomie, Meteorologie etc." unter dem Titel „Das Gesetz der Windbahnen in Cyklonen" im Jahre 1891 veröffentlicht haben. In dieser Abhandlung haben wir die Theorie der Cyklonen in grösst möglicher Allgemeinheit entwickelt und die Theorie der allgemeinen Cirkulation der Luftströmungen in einer Form dargestellt, welche, soweit sie mathematisch durchführbar war, die wirklichen Verhältnisse der Luftbewegungen möglichst genau zum Ausdruck brachte. Zum Verständniss des Folgenden wird es also nötig sein, die genannte Arbeit einzusehen, von welcher wir glauben, dass dieselbe vermöge der Wichtigkeit der darin behandelten meteorologischen Principien einiger Aufmerksamkeit wert erscheint.

I.

Die Kräfte, welche auf ein Luftteilchen einer Cyklone einwirken, sind: die Centrifugalkraft, die Gradientkraft F_χ, und die ablenkende Kraft $\lambda = 2\omega \sin\varphi$ der Erdrotation, unter φ die geogr. Breite des bewegten Punktes verstanden. Diese letztere Kraft zwingt den Punkt, sich in einer Spirale dem Centrum der Cyklone zu nähern, welcher Tendenz die Reibung deren Constante k ist, entgegenwirkt. Der Ablenkungswinkel ψ der Windbahn von den Gra-

dienten der cirkular gedachten Isobaren ist also vornehmlich abhängig von diesen Grössen, und ebenso ist es die Geschwindigkeit $v = ay/\cos\psi$, worin y eine Grösse bedeutet, welche vom Radiusvector r des Punktes abhängt. Die allgemeinen Gleichungen sind

1)
$$F\sin\psi = v\lambda + \frac{v^2}{\operatorname{tg} r}\sin\psi - \frac{v\,d\psi}{dt} + f\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon$$
$$F\cos\psi = kv + \frac{dv}{dt} + f\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon$$

in welchen f eine meridionale Kraft bezeichnet, und ε den Winkel bedeutet, den die Strömung mit dem Parallelkreis bildet. Die Elimination von F führt unter Benutzung von v' auf

$$\lambda\cos\psi - k\sin\psi + a\sin\psi\left(\frac{y}{\operatorname{tg} r} + \frac{dy}{dr}\right) + \frac{ay}{\cos\psi}\frac{d\psi}{dr} = 0$$

d. i. auf

2)
$$\frac{d\operatorname{tg}\psi}{dr} + \left(\frac{dy}{y\,dr} + \frac{1}{\operatorname{tg} r} - \frac{k}{ay}\right)\operatorname{tg}\psi + \frac{\lambda}{ay} = 0$$

r ist die sphärische Entfernung des bewegten Punktes vom Mittelpunkt der Cyklone.

Die vorstehende wichtige und merkwürdige Gleichung ist von uns a a. O. mehrfach behandelt und integrirt worden, indem von ihr die Kenntniss des Ablenkungswinkels, die Grösse der Geschwindigkeit und die Werte des Luftdrucks an den verschiedenen Stellen der Cyklone abhängt.

Wir wollen nun an dieser Stelle auf einen Punkt aufmerksam machen, der bisher noch nicht erledigt worden ist, dessen Wichtigkeit aber eine genauere Untersuchung um so mehr verdient, als von ihm eine Menge Ungleichheiten herrühren, die man bisher nicht weiter beachtet hat.

Es betrifft den Ausdruck $\lambda = 2\omega\sin\varphi$ der ablenkenden Kraft der Erdrotation, der bisher in allen Cyklonenberechnuugen als constante Grösse angenommen wurde, dies aber keineswegs ist, vielmehr namentlich in ausgedehnteren Depressionen in erheblichem Grade von der Polhöhe abhängt.

Für genauere Berechnungen ist es daher nicht gestattet, λ als unveränderlich zu betrachten, und es wird der Zweck der folgenden Auseinandersetzungen sein, diesen Einfluss in Rechnung zu ziehen.

Wir müssen, um $\sin\varphi$ anders auszudrücken, auf das sphärische Dreieck zwischen dem Centrum φ_0 der Cyklone, dem bewegten Punkt φ und dem nächsten Pol zurückgreifen. Wie früher sei der Winkel zwischen r und φ_0 wieder ϑ, welcher also mit der Bewegung wächst, dann ist

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0\cos r - \cos\varphi_0\sin r\cos\vartheta$$

mithin

$$3)\quad \frac{d\,\mathrm{tg}\,\psi}{dr} + \left(\frac{dy}{y\,dr} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,r} - \frac{k}{ay}\right)\mathrm{tg}\,\psi + \frac{2\omega}{a\,y}(\sin\varphi_0\cos r - \cos\varphi_0\sin r\cos\vartheta) = 0$$

Es ist aber

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\mathrm{tg}\,\psi}{\sin r}$$

also

$$\mathrm{tg}\,\psi = -\sin r\frac{d\vartheta}{dr}$$

und dies eingesetzt in die obige Gleichung giebt

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \left(2\cot r + \frac{dy}{y\,dr} - \frac{k}{ay}\right)\frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\omega}{ay}\sin\varphi_0\cot r + \frac{2\omega}{ay}\cos\varphi_0\cos\vartheta = 0$$

Dies ist die genaue Differentialgleichung der Cyklone, in welcher y den Wert ausdrückt der über die Art der cyklonalen Bewegung entscheidet. Sie ist eine nicht lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration wegen des Eintretens von $\cos\vartheta$ Schwierigkeiten unterliegt. Man kann zwar statt der Variabelen ϑ eine andere einführen, z. B. setzen $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\vartheta = z$, und man würde erhalten

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \left(2\cot r + \frac{dy}{y\,dr} - \frac{k}{ay} - z\right)\frac{dz}{dr} - \frac{2\omega}{a\,y}\sin\varphi_0\cot r(1+z^2) + \frac{2\omega}{ay}\cos\varphi_0(1-z^2) = 0$$

welche aber ebenfalls den bekannten Regeln der Integration Trotz bieten dürfte. Dahingegen können wir noch eine dritte Form aufstellen, welche auf der Relation

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi = ay$$

beruht. Hiernach ist

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\sin r}{ay}\frac{dr}{dt}$$

und man hat nach Einführung dieses Ausdrucks in die entsprechende Formel

$$4) \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (k - 2ay\cot r)\frac{d\vartheta}{dt} + 2a\omega y(\cos\varphi_0\cos\vartheta - \sin\varphi_0\cot r) = 0$$

Wenn nun auch diese Gleichung im allgemeinen nicht integrabel ist, so könen gleichwol aus ihr mit Hülfe der Sectorengeschwindigkeit einige merkwürdige Beziehungen abgeleitet werden, welche mit andern Reibungsproblemen in Zusammenhang stehen.

Wir führen die Sectorengeschwindigkeit

$$S = \tfrac{1}{2}\sin r^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

darin ein und erhalten

$$5) \quad \frac{dS}{dt} + kS + a\omega y\sin r(\cos\varphi_0\sin r\cos\vartheta - \sin\varphi_0\cos r) = 0$$

oder einfacher

$$\frac{dS}{dt} + kS = a\omega y\sin r\sin\varphi\cos\vartheta$$

woraus

$$6) \qquad S = e^{-kt}\left(C + a\omega\int y\sin r\sin\varphi e^{kt}\,dt\right)$$

Die Reibung (k) verringert also die Flächengeschwindigkeit. Für $k = 0$ und $\varphi_0 = 90^0$, also für die grosse Cyklone um den Pol würde folgen aus 5)

$$S = C - \tfrac{1}{4}\omega\sin r^2.$$

Am a. O. S. 380 haben wir nachgewiesen, dass für das Reibungsgesetz $R = k\cos r \,.\, v$ die Sectorengeschwindigkeit durch

$$S_1 = \frac{a\omega}{k - 2a}\sin r^2 + C\sin r^{\frac{k}{a}}$$

dargestellt werden werden kann, sofern

$$v = a\frac{\sin r}{\cos\psi} \quad \text{also} \quad y = \sin r$$

als dem Inneren der Cyklone entsprechend der Bewegung zugrunde gelegt wird.

Gehen wir wieder auf die obige Differentialgleichung zurück und setzen das Centrum der Cyklone in den Aequator, so erhalten wir wegen $\varphi_0 = 0$

7) $$\frac{dS}{dt} + kS + a\omega y \sin r^2 \cdot \cos\vartheta = 0$$

Diese merkwürdige Gleichung können wir mit einer analogen der Pendelbewegung in Beziehung setzen.

Das Zeitintegral der Pendelbewegung ist bekanntlich

8) $$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0$$

worin Θ der vom tiefsten Punkte gerechnete Ausschlagwinkel im Kreise vom Halbmesser l bedeutet. Statt des Pendels kann man auch den entsprechenden Kreis einführen, in welchem der schwere Punkt ohne Reibung gleitet. Wir denken uns nun dies Bewegungssystem so mit seinen parallelen Kräften gedreht, dass letztere nicht nach unten, sondern in einem rechten Winkel nach links gerichtet sind, und dass das Centrum auf dem Aequator liegt oder genauer, dass die Kreislinie durch einen Schnitt einer Ebene mit der Erdkugel gebildet werde. Nach der vorausgesetzten Richtung der (gedachten) Schwerkräfte würde also ein Punkt in diesem von ihm vollständig durchlaufenen Kreise im Ostpunkte die kleinste, im Westpunkte die grösste Geschwindigkeit besitzen. Setzen wir nun

$$\Theta = 90^0 + \vartheta,$$

so wird der jetzige Ausschlagwinkel identisch mit dem früheren, und man hat, weil in der Kreisbewegung die Flächengeschwindigkeit

$$S = \tfrac{1}{2}l^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

die Gleichung

$$\frac{dS}{dt} + g\frac{l}{2}\cos\vartheta = 0$$

Setzen wir noch wegen der Einheit des Halbmessers $l = \sin r$, so ist auch

$$\frac{dS}{dt} + g\frac{\sin r}{2}\cos\vartheta = 0$$

worin g die Acceleration der Bewegung bedeutet.

Diese Gleichung, verglichen mit der entsprechenden reibungslosen cyklonalen Bewegungsgleichung

9) $$\frac{dS}{dt} + a\omega y \sin r^2 \cos\vartheta = 0$$

zeigt die Verwandtschaft beider Bewegungen und man erkennt deutlich, dass die cyklonalen reibungslosen Strömungen, deren Gradienten

sämtlich nach einem Punkt des Aequators gerichtet sind, mit der Bewegung eines von parallelen und westwärts gerichteten Kräften angegriffenen Punktes im Kreise verglichen werden können. Die notwendige Bedingung der Identität ist

$$g = 2a\omega y \sin r$$

Wählen wir für das äussere Gebiet der Cyklone wie früher

$$y = 1/\sin r, \quad \text{so ist} \quad g = 2a\omega$$

woraus hervorgeht, dass die im allgemeinen willkürliche Beschleunigung g der Winkelbewegung ω der rotirenden Erde proportional ist. Für die vorausgesetzte cyklonale Bewegung ist also deren Flächengeschwindigkeit gleich derjenigen im entsprechenden Kreise.

Vergegenwärtigt man sich also die Phasen der circularen Bewegung, so kann man behaupten, dass die Luftmassen, welche nördlich vom Aequator um das Centrum der Cyklone herumgeführt werden, in beschleunigter Flächengeschwindigkeit sich befinden und ihren westlichsten Punkt im Aequator mit der Maximal-Flächengeschwindigkeit erreichen, während in der zweiten Hälfte der Bewegung, also in der Südhälfte der Erde die Bewegung sich verzögert und im Ostpunkte ihren minimalen Wert erreicht.

Aber auch, wenn das obige Gesetz $y = 1/\sin r$ nicht geradezu erfüllt sein sollte, so dass g noch abhängig und also eine Function von r ist, so bleibt im allgemeinen der Vorgang ziemlich derselbe, namentlich wenn die Cyklonen in angenäherter circularer Bahn ihr Centrum umkreisen.

Nicht minder merkwürdig ist es, dass die Gleichung für reibende Luftmassen vollständig mit derjenigen identisch ist, welche die Kreisbewegung mit Rücksicht auf Reibung darstellt. Vrgl. Schell, Theorie der Bew. u. d. Kräfte.

Die betreffende Formel lautet

10) $$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{k d\Theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0$$

oder transformirt für die Flächengeschwindigkeit der Kreisbewegung

11) $$\frac{dS}{dt} + kS + \frac{g \sin r}{2}\cos\vartheta = 0$$

welche mit unserer cyklonalen Differentialgleichung für $\varphi_0 = 0$

12) $$\frac{dS}{dt} + kS + a\omega y \sin r^2 \cdot \cos\vartheta = 0$$

der Form nach übereinstimmt, wenn $y = 1/\sin r$, also

$$v = \frac{a}{\cos\psi \sin r} \quad \text{ist.}$$

Diese merkwürdige Uebereinstimmung zweier sonst in sich verschiedenen Bewegungsformen ist recht geeignet, die eine durch die andere zu erläutern. Wie gross auch die Reibung ist, die Bewegung in den westlichen Quadranten wird im allgemeinen diejenige in den östlichen übertreffen

Verlassen wir nun den Aequator und lassen eine Cyklone in einer beliebigen Breite φ_0 entstehen, so ändert sich die Gleichung insofern, als noch ein weiteres Glied zu derselben hinzutritt. D. h. es ist

13) $$\frac{dS}{dt} + kS + a\omega y \cos\varphi_0 \sin r^2 \cos\vartheta - a\omega y \sin\varphi_0 \sin r \cos r = 0$$

Für das äussere Gebiet $y = 1 : \sin r$ folgt also

14) $$\frac{dS}{dt} + kS = -a\,\omega \cos\varphi_0 \sin r \cos\vartheta + a\omega \sin\varphi_0 \cos r$$

In den nördlichen Quadranten ist $\cos\vartheta$ negativ; und da nunmehr noch das Schlussglied $a\omega \sin\varphi_0 \cos r$ hinzugetreten ist, so herrscht in diesen Gebieten der Cyklone eine beschleunigte Bewegung zum Westpunkt derselben, während in den südlichen Quadranten, wo $\cos\vartheta$ positiv bleibt, die Flächengeschwindigkeit gegen den Ostpunkt abnimmt. Diese Unterschiede wachsen mit der graphischen Breite, wie aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dS}{dt} + kS = a\,\omega y \sin r \cdot \sin\varphi \cos\vartheta$$

hervorgeht.

Auf alle Fälle erhalten die cyklonalen Luftmassen in Folge der Rotation der Erde eine wesentliche Beschleunigung welche in einem der westlichen Quadranten zu ihrem Maximum gelangt.

Um nun für eine beliebige Lage der Cyklone die Differentialgleichung mit der entsprechenden der Kreisbewegung zu vergleichen, denken wir die oben genannten Parallelkräfte g nicht mehr nach Westen wirkend, welcher Fall dem Aequator entsprechen würde, sondern in die Nordwestrichtung parallel verschoben, und zwar um den Winkel φ_0 der geogr. Breite.

Da wir ϑ von Süden über Osten rechnen, Θ aber von der Nordwestrichtung über Süden, so ist

$$\Theta = \varphi_0 + 90^0 + \vartheta$$

und so folgt für die Bewegung im Kreise

$$15) \quad \frac{dS}{dt} + kS + \tfrac{1}{2}g \sin r \cos\varphi_0 \cos\vartheta - \tfrac{1}{2}g \sin r \sin\varphi_0 \sin\vartheta = 0$$

und für die cyklonale, wenn $y = 1/\sin r$

$$16) \quad \frac{dS}{dt} + kS + a\omega \sin r \cos\varphi_0 \cos\vartheta - a\omega \sin\varphi_0 \cos r = 0$$

Setzen wir also wieder $g = 2a\omega$, so werden in beiden Gleichungen die 3 ersten Glieder identisch, die letzten nicht, wogegen aber dieselben in den Zeichen übereinstimmen, wenigstens in der Bewegung in den östlichen Quadranten.

Hiernach steht fest, dass auch im allgemeinen Falle der cyklonalen Bewegung auf der nördlichen Halbkugel die Flächengeschwindigkeit derselben nach dem nordwestlichen Quadranten hin zunimmt, und dass sie mit der reibenden Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise verglichen werden kann. Da nun der Ablenkungswinkel ψ mit der Geschwindigkeit wächst, vermöge

$$\cos\psi = \frac{ay}{v}$$

oder für $y = \sin r$ nach früherem

$$17) \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k - 2a} - c \sin r^{\frac{k}{a} - 2}$$

ist, so ist für wachsende a der Ablenkungswinkel in der östlichen Hälfte der Cyklone kleiner als in der westlichen.

Diese Erörterungen bezogen sich im allgemeinen auf die Flächengeschwindigkeiten. Indessen kann man auch die Formeln für die Winkelgeschwindigkeiten beider Bewegung in Beziehung setzen, z. B. wenn man durch Einführung von $y = \operatorname{tg} r$ das innere Gebiet zunächst berücksichtigt. Für diesen Teil der Cyklone hat man dann wegen

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (k - 2ay \cot r)\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{2a\omega y}{\sin r}(\cos\varphi_0 \sin r \cos\vartheta - \sin\varphi_0 \cos r) = 0$$

die Gleichung

18) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (k-2a)\frac{d\vartheta}{dt} + 2a\omega\cos\varphi_0 \operatorname{tg} r \cdot \cos\vartheta - 2a\omega\sin\varphi_0 = 0$$

und für die Kreisbewegung

19) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + k\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{g}{l}\cos\vartheta = 0$$

Beide Gleichungen lassen im allgemeinen Vergleichungen zu, welche das oben Gesagte zum Teil bestätigend wiederholen. Die vorletzte Gleichung ist integrabel, wenn $\varphi_0 = 90^0$ oder die Cyklone den Pol zum Centrum hat. Sie wird dann

20) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (k-2a)\frac{d\vartheta}{dt} = 2a\omega$$

woraus wegen $$v = \frac{a \operatorname{tg} r}{\cos\psi} \quad \text{folgt}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2\omega a}{k-2a} + C_1 e^{-(k-2a)t}$$

und

$$\vartheta = \frac{2\omega a t}{k-2a} + C_2 e^{-(k-2a)t}$$

oder wegen

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{d\vartheta}{a\,dt}\frac{\sin r}{y} \quad \text{und} \quad y = \operatorname{tg} r$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega\cos r}{k-2a} + C\cos r\, e^{-(k-2a)t}$$

21)

$$\sin r = \sin r_0\, e^{-at}$$

und wenn man sich auf die polaren Zonen beschränkt, die äquatorialen also ausschliesst, als Gleichung für den Luftdruck

$$\frac{P_r - P_e}{\varrho} = -ak\log\cos r + \frac{2a\omega^2}{k-2a}\sin r^2 + \frac{2a^2\omega}{k} C \sin r^{\frac{k}{a}}$$
$$- a^2\log\cos r - \frac{a^2}{2}(\operatorname{tg} r^2 + 2\log\cos r) + \frac{2\omega^2 a^2}{(k-a)^2}\sin r^2$$
$$+ \frac{4\omega a^3 C}{k(k-2a)}\sin r^{\frac{k}{a}} + \frac{a^3 C^2}{2(k-a)}\sin r^{\frac{2k}{a}-2}$$

oder einfacher

$$22)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k-2a}\cos r\left(1-c\sin r^{\frac{k}{a}-2}\right)$$

$$\frac{P_r - P_v}{\varrho} = -ak\log\cos r - \frac{a^2}{2}\operatorname{tg} r + \frac{2a\omega^2(k-a)\sin r^2}{(k-2a)^2} \times \left(1-\frac{ac}{k-a}\sin r^{\frac{k}{a}-2}\right)^2$$

II.

In Bezug auf die Hauptgleichungen der cyklonischen Bewegung

$$F\sin\psi = 2\omega v\cos r + \frac{v^2\sin\psi}{\operatorname{tg} r} - \frac{v\,d\psi}{dt} = 0$$

$$F\cos\psi = kv + \frac{dv}{dt} = 0$$

können wir leicht ein Integral für den Fall aufstellen, dass keine Gradientkräfte wirksam sind. Aus

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\psi}{dr}v\cos\psi$$

folgt nämlich aus der ersten Formel

$$\frac{d\sin\psi}{dr} + \cot r\sin\psi + \frac{2\omega\cos r}{v} = 0$$

und vermöge der zweiten oder

$$\frac{dv}{dr} = \frac{k}{\cos\psi}$$

$$v = -\frac{2\omega\cos r}{\cot r\sin\psi + \dfrac{d\sin\psi}{dr}}$$

Ferner ist nach einer Differentiation

$$\frac{d^2\sin\psi}{dr^2} + \frac{1}{\sin r\cos r}\frac{d\sin\psi}{dr} - \sin\psi\cot r^2 = \frac{k\left(\sin\psi\cot r + \dfrac{d\sin\psi}{dr}\right)}{2\omega\cos\psi\cos r}$$

oder einfacher, wenn

$$u = \sin r\sin\psi$$

eingeführt wird,

23) $$\frac{d^2u}{dr^2} - 2\cot 2r \cdot \frac{du}{dr} = \frac{k\,\mathrm{tg}\,r}{2\omega\sqrt{\sin r^2 - u^2}} \cdot \frac{du}{dr}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Trägheitscurve für reibende Bewegung. Für reibungslose ($k = 0$) wird aus ihr

24) $$u = \frac{C + \omega\cos r^2}{v} \quad \text{also} \quad \sin\psi = \frac{C + \omega\cos r^2}{v\sin r}$$

Ist dagegen $\omega = 0$, die Erde also rotationslos, so folgt

25) $$u = C = \sin r \sin\psi$$

und das ist der Clairaut'sche Satz.

Wir wollen noch aus den allgemeinen Gleichungen einen speciellen Fall ableiten, indem wir nämlich die cyklonalen Bewegungen als in einer Ebene vor sich gehend betrachten. Dieselben vereinfachen sich dann in

26) $$f\sin\psi = \lambda v - \frac{v\,d\psi}{dt}, \quad f\cos\psi = kv + \frac{dv}{dt}$$

$$l = 2\omega\sin\varphi$$

Die X-Achse sei nach Westen, die Y-Achse nach Norden gerichtet. Man hat

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\psi, \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\psi$$

also

$$x'' = -v\sin\psi\,\psi' + v'\cos\psi, \quad y'' = v\cos\psi\,\psi' + v'\sin\psi$$

und

$$-\frac{v\,d\psi}{dt} = x''\sin\psi - y''\cos\psi$$

$$\frac{dv}{dt} = x''\cos\psi + y''\sin\psi$$

mithin

$$f\sin\psi = \lambda v + x''\sin\psi - y''\cos\psi$$

$$f\cos\psi = kv + x''\cos\psi + y''\sin\varphi$$

woraus

$$f = kx' + \lambda y' + x''$$

$$ky' = \lambda x' - y''$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f - k\frac{dx}{dt} - \lambda\frac{dy}{dt}$$

27)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt} + \lambda\frac{dx}{dt}$$

folgt, welche Gleichungen zuerst von Herrn F. Roth aufgestellt worden sind.

III.

Einige bemerkenswerte Sätze folgen noch aus dem Integral der Gleichung 2)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{e^{\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}}}{y \sin r}\left(C - \int \frac{\lambda}{a} \sin r\, e^{-\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}} dr\right)$$

28)

$$v = \frac{ay}{\cos\psi}$$

Man kann nämlich nach den Werten von ψ fragen, welche dem Anfangs- und Endzustand der cyklonischen Bewegung zukommen. Im allgemeinen werden die Werte von 0 oder 90^0 verschieden sein, während aus der obigen Formel für $r = 0$ ein Wert $\psi = 90^0$ zu folgen scheint. Da es aber vorkommen kann, dass mit dem Nenner auch der Zähler des obigen Ausdrucks verschwindet, so ist es möglich, dass für die Grenzverhältnisse der Cyklone der obige Quotient sich in der Form $\frac{0}{0}$ darstellt, weshalb für die Auswertung derselben eine Differentiation seiner Glieder nötig ist. Differentiiren wir also in

$$29)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{C - \int \frac{\lambda}{a} \sin r\, e^{-\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}}}{y \sin r\, e^{-\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}}}$$

den Zähler und Nenner, so erhalten wir wegen $\lambda = 2\omega \sin r$

$$30)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega \sin\varphi}{k - \frac{a\,dy}{dr} - ay \cot r}$$

welche Gleichung den Ablenkungswinkel zu Anfang oder Ende der cyklonischen Bahn bestimmt.

Um eine Anwendung davon zu geben, führen wir das schon früher aufgestellte Geschwindigkeitsgesetz

$$31)\quad v = \frac{a \sin nr}{\cos\psi},\quad y = \sin nr$$

ein, aus welcher wir nach den Formeln 85) bis 89) S. 206 die folgende (verbesserte) Relation entwickeln.

$$32)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{4\lambda}{nk}\frac{\sin\frac{1}{2}nr}{\sin r}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{4}nr - \cos\frac{1}{2}nr}{\cos\frac{1}{2}nr^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n^2-4}{6n^2}\right.$$
$$+\frac{(n^2-4)(9n^2-4)}{120n^4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr^2\right)$$
$$\left.+\frac{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}{5040n^6}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr+\frac{1}{7}\cos\tfrac{1}{2}nr^4\right)\right.$$
$$\left.+\ldots\right)$$

$$G = \frac{\varrho k^2\sin nr}{2un}\left(1+\frac{\lambda}{k}\operatorname{tg}\psi - \frac{1}{2}\cos nr + \frac{1}{2n}\sin nr\cot r\operatorname{tg}\psi^2\right)$$

Hierin ist $\frac{k}{an} = 2$ und $C = 0$.

Setzen wir nun wegen

$$y = \sin nr,\quad \frac{dy}{dr} = n\cos nr$$

diese Beziehungen in die Formel für $\operatorname{tg}\psi$ ein, so folgt

$$33)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega\sin\varphi}{k - an\cos nr - a\cot r\sin nr}$$

Im Anfang der Bewegung ist nun $nr = 180^0$, oder die Geschwindigkeit = null, und die entsprechenden Ablenkungswinkel der Cyklone folgen aus

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega\sin\varphi}{k+an},\quad v_a = 0$$

34)

$$\operatorname{tg}\psi_e = \frac{2\omega\sin\varphi}{k-2an},\quad v_e = 0$$

Zunächst bemerkt man, dass die Ablenkungswinkel in der Cyklone stetig zunehmen.

Setzen wir nun in 32) statt nr den Grenzwert 180^0 ein, so folgt

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\lambda}{3k\sin r}\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cdot\frac{n^2-4}{6n^2}+\frac{2}{n}\frac{(n^2-4)(9n^2-4)}{120n^4}\cdot\ldots\right)$$

und da

$$k = 2an,\quad \sin r = \sin\frac{2}{n}90^0 = \frac{2}{n}+\frac{2}{n}\frac{n^2-4}{6n^2}+\ldots$$

so folgt

$$\operatorname{tg}\psi_a = \sin\frac{\lambda}{3na} = \frac{2\omega}{3na}\sin\varphi$$

was mit der obigen Formel wegen $k = 2na$ übereinstimmt. Diese letztere Bedingung bringt es mit sich, dass in beiden Formeln

$$\psi_e = 90^0$$

ist, und man erkennt aus diesen Bestimmungen, dass die Grenzgleichung 30) genau ist.

Daraus ergeben sich nun einige weitere Folgerungen.

Denken wir uns, dass auf der nördlichen Hemisphäre sich eine Cyklone gebildet habe, deren südlichster Punkt etwa den Aequator berührt. In dem Grenzkreise beginnen die Strömungen mit der Geschwindigkeit = null und werden durch die Erdrotation um so bedeutender von ihrer zunächst nach dem Centrum gerichteten Bewegung abgelenkt, so nördlicher die Strömungen sind. Hiernach zeigt die Formel

$$\operatorname{tg} \psi_a = \frac{2\omega \sin \varphi}{k + an}$$

dass der Ablenkungswinkel der Strömung um den aequatorialen Berührungspunkt = null ist, so dass also nur an dieser Stelle die eingeleitete Bewegung zunächst nach Norden gerichtet ist. Je weiter wir uns aber auf der Peripherie des Grenzkreises von dem vorausgesetzten Berührungspunkt nach Norden entfernen, also zu höheren Breiten gelangen, um so grösseren Ablenkungswinkel werden wir begegnen, die demnach im nördlichsten Punkt ihr Maximum erreichen. Hieraus ist ohne weiteres erklärlich, weshalb die verschiedenen Teilgebiete der Cyklonen verschiedene Ablenkungswinkel haben, und warum sie in den nördlichsten Quadranten grösser sein müssen, als in den südlichen, wogegen in den östlichen im Vergleich zu den westlichen kein Unterschied obwaltet.

Ferner zeigt die Formel, dass für grössere Reibung ein kleinerer Ablenkungswinkel eintritt, und dass dies auch bei grösserer Geschwindigkeit der Fall ist, da v von a abhängt.

Was den Einfluss von n betrifft, welcher Coefficient in Bezug auf die Ausdehnung der Cyklone eine Rolle spielt, so sieht man, dass für grössere n, also bei kleineren Ausdehnungen der Ablenkungswinkel kleiner wird.

Unter allen Umständen hat natürlich ω oder die Rotationsgeschwindigkeit dem massgebendsten Einfluss.

Am Ende der Bewegung ist

$$\operatorname{tg}\psi_e = \frac{2\omega\cos\varphi}{k-2na}$$

also $\psi_e > \psi_a$ und ist im Grenzfall, wenn $k = 2na$, gleich 90°.

Bei anticyklonaler Bewegung dagegen gelten die Formeln

35) $$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega\sin\varphi}{k+2na}, \quad \operatorname{tg}\psi_e = \frac{2\omega\sin\varphi}{k-an}$$

welche Werte kleiner als die der cyklonalen Bewegung sind.

Es scheint nützlich zu sein, die Grenzwerte für die schon früher betrachteten Fälle

$$v = \frac{a}{\cos\psi\,\sin r}, \quad y = \frac{1}{\sin r} \quad \text{des äussern Gebietes}$$

und

$$v = \frac{a}{\cos\psi}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}r, \quad y = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}r \quad \text{des inneren Gebietes}$$

einer Cyklone zu berechnen. Man findet beziehungsweise

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{\lambda}{k}, \quad \operatorname{tg}\psi_i = \frac{\lambda}{k-a}$$

welche mit den entsprechenden Werten in VII. a. a. O. genau übereinstimmen, da $a = c$ ist.

IV.

In den bisherigen Berechnungen waren wir immer davon ausgegangen, zunächst einen Ausdruck für die Geschwindigkeit aufzustellen, aus demselben vermittelst einer Differentialgleichung ein Integral für den Ablenkungswinkel zu finden und durch eine nochmalige Integration den Ausdruck für die Luftdruckdifferenzen zu gewinnen.

Die Gleichungen waren

$$v = \frac{ay}{\cos\psi}$$

36)
$$\frac{d\operatorname{tg}\psi}{dr} + \left(\frac{dy}{y\,dr} + \frac{1}{\operatorname{tg} r} - \frac{k}{ay}\right)\operatorname{tg}\psi + \frac{\lambda}{ay} = 0$$

$$\frac{dP}{\varrho\,dr} = aky + a\lambda y\operatorname{tg}\psi - a^2y\,\frac{dy}{dr} + \frac{a^2y^2}{\operatorname{tg} r}\operatorname{tg}\psi^2$$

Wie wir schon früher bemerkt, haben wir vermittelst dieser Gleichungen einen bedeutenden Teil der atmosphärischen Bewegungen zu erklären versucht, indem wir zunächst über y als Function des Radiusvector eine dem inneren oder äusseren Gebiete der Cyklone entsprechende Annahme machten. Um z. B. die Verhältnisse für den Nordostpassat hinsichtlich seiner Geschwindigkeit, Ablenkungswinkel und Luftdruckdifferenzen zu berechnen, würden wir für dessen anticyklonale Bewewegung zu setzen haben

$$v = -\frac{a \sin r}{\cos \psi}, \quad \text{also} \quad y = \sin r$$

37) $\operatorname{tg} \psi = \dfrac{2\omega}{k+2a} + e \sin r^{\,-\frac{k}{a}-2}$. vergl. F. 124) a. a. O.

$$-\frac{P_r - P_0}{\varrho} = \tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{k}{a}+1\right)\left(1+\frac{4\omega^2}{(k+2a)^2}\right)(\sin r^2 - \sin r_0{}^2)$$
$$-\frac{4a^2\omega^2 \sin r_0{}^2}{(k+2a)^2}\left(-\left(\frac{\sin r_0}{\sin r}\right)^{\frac{k}{a}}\right)$$
$$-\frac{2a^2\omega^2 \sin r_0{}^2}{(k+2a)(k+a)}\left(1-\left(\frac{\sin r_0}{\sin r}\right)^{\frac{2k}{a}+2}\right)$$

Nimmt man als Grenzen des Nordostpassates theoretisch die Grenzen $\varphi = 30^0$ und $\varphi = 0$, also $r = 60^0$ und 90^0 und nehmen an, dass

$$a = 0{,}00000333 = 2{,}11\,m, \quad k = 0{,}0000364$$

und zwar auf Grund des Reibungsgesetzes

$$R = k \cos r v$$

so werden die Potenzen von $\sin r_0/\sin r$ sehr klein, und die Luftdruckformel wird, wenn der Anfangswert von $\psi = 0$ ist,

38) $$-\frac{P_r - P_0}{\varrho} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{k}{a}+1\right)\left(1+\frac{4\omega^2}{(k+2a)^2}\right)\cos r_0{}^2$$
$$-\frac{4a^2\omega^2}{(k+2a)^2}\left(1+\frac{\frac{1}{2}a}{k+a}\right)\sin r_0{}^2$$

Führen wir hierin die obigen Constanten mit

$$\omega = 0{,}0000729, \quad r_0 = 60^0$$

ein, so folgt nach Reduction auf die Barometerstände zwischen Aequator und 30° Breite auf Grund der Relation

$$b_r - b_0 = \frac{760}{10333\,g}(P_r - P_0)$$

$$b_a - b_0 = -9{,}2\,mm.$$

Ist also der Luftdruck am Aequator $757\,mm$, so ist er in 30^0 geogr. Breite $766{,}2\,mm$, ein Resultat, welches den wirklichen Verhältnissen ziemlich gut entspricht.

Die Anfangsgeschwindigkeit beginnt mit

$$v_a = -2{,}11 \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1{,}8\,m$$

und endet am Aequator mit $9\,m$, indem dort der Ableitungswinkel bis zu 76^0 gewachsen ist.

Diese Zahlen sind selbstverständlich nur hypothetische, und ändern sich mit der Annahme der Constanten Im allgemeinen aber dürften sie der Wirklichkeit entsprechen, wiewol die Grenzen der Passate andere sind, als diejenigen, welche wir der Bequemlichkeit der Rechnung wegen angenommen haben.

Will man für den unteren Passat unter zu Grundelegung des Reibungsgesetzes

$$R = k\cos r \,.\, v$$

die Geschwindigkeitsformel

$$39)\quad v = -\frac{a}{\cos\psi}\cdot\frac{1}{\sin r}$$

benutzen, so erhält man für den Ablenkungswinkel

$$40)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k} + C\,e^{-\frac{k}{2a}\sin r^2}$$

und für die Luftdruckdifferenzen

$$41)\quad \frac{P_r - P_0}{\varrho} = -\left(ak + \frac{4a\omega^2}{k}\right)\log\frac{\sin r}{\sin r_0} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\sin r^2} - \frac{1}{\sin r_0^2}\right)$$
$$- \frac{2\omega^2 a^2}{k^2}(\cot r^2 - \cot r_0^2) - a\,\omega\,C\int e^{-\frac{kx}{2a}}\frac{dx}{x}$$
$$+ \frac{2\omega a^2 C}{k}\int\frac{e^{-\frac{k}{2a}x}}{x^2}dx + \frac{a^2C^2}{2}\int\frac{e^{-\frac{k}{a}x}}{x^2}dx$$

Hierin bedeutet

$$C = -\frac{2\omega}{k} e^{\frac{3k}{8a}}, \quad \sin r^2 = x$$

Die Anfangsbewegung des Passates ist also zunächst von Nord nach Süd gerichtet, und zwar in 30° Breite. Demnach ist

$$42) \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{2a}(\sin r^2 - \frac{3}{4})}\right)$$

Die Integrale können vermittelst der Gammafunctionen in Reihen ausgedrückt werden. So ist, wenn

$$\frac{k}{2a} x = v$$

$$\int_{3/4}^{1} \frac{e^{-\frac{k}{2a}x}}{x} dx = \int_{\frac{3}{8}\frac{k}{a}}^{\frac{k}{2a}} \frac{e^{-v}}{v} dv = \frac{2a\omega^2}{k}\left(\frac{8a}{3k}\left(1 - \frac{1}{\frac{3k}{8a}+1}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{2a}{k} e^{-\frac{k}{8a}}\left(1 - \frac{1}{\frac{k}{2a}+1}\right)\right)$$

ferner

$$\int_{3/4}^{1} \frac{e^{-\frac{k}{2a}}}{x^2} dx = \frac{k}{2a}\left(\frac{e^{-\frac{3}{8}\frac{k}{a}}}{\left(\frac{3}{8}\frac{k}{a}\right)^2}\left(1 - \frac{2}{\frac{3}{8}\frac{k}{a}+1}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\frac{k}{2a}}}{\left(\frac{k}{2a}\right)^2}\left(1 - \frac{2}{\frac{3}{8}\frac{k}{a}+1}\right)\right)$$

Im allgemeinen sind diese Glieder sehr klein, soweit sie sich auf die beiden Grenzen des Passates beziehen, und so wird hierfür die Luftdruckdifferenz

$$43) \quad \frac{P_a - P_0}{a^2\varrho} = -\frac{1}{2}\frac{k}{a}\left(1 + \frac{4\omega^2}{k^2}\right)\log\tfrac{4}{3} + \frac{1}{6} + \frac{6\omega^2}{k^2}$$

also, wenn

$$a = 0{,}000000333, \quad k = 0{,}000364 \quad \text{ist,}$$

$$b_a - b_0 = 10{,}5\ mm$$

Der Luftdruck in 80° Breite ist also jetzt um 10,5 *mm* grösser als am Aequator.

Aus diesen Beispielen erhellt, dass man aus v zunächst ψ und dann b erhält.

Es ist indessen noch möglich, v zu bestimmen, wenn ψ als Function von r bekannt ist.

Wie aus der Differentialgleichung für $\operatorname{tg}\psi$ hervorgeht, kann man dieselbe umgestalten in

$$44)\quad \frac{dy}{dr} + \left(\cot r + \frac{d\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\psi\, dr}\right) y + \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\psi} - k = 0$$

und integrirt

$$45)\quad y = \frac{1}{\sin r \operatorname{tg}\psi}\left(C - k\int\left(\frac{\lambda}{k} - \operatorname{tg}\psi\right)\sin r\, dr\right)$$

Ist für die Berechnung der allgemeinen Circulation

$$\lambda = 2\omega\cos r$$

darin eingefürt, so folgt

$$46)\quad v = \frac{1}{\sin r \sin\psi}\left(C - \frac{\omega}{a}\sin r^2 + \frac{k}{a}\int \operatorname{tg}\psi \sin r\, dr\right)$$

und man erkennt, dass, wenn $\operatorname{tg}\psi$ als Function von r gegeben ist, die Ermittelung von v keine Schwierigkeiten mehr macht.

Endlich wollen wir noch erwähnen, dass, wenn das Gesetz der Luftdruckdifferenzen bekannt ist, sich hieraus vermittelst einer Differentialgleichung höherer Ordnung die Formel für die Geschwindigkeit und damit für den Ablenkungswinkel herleiten lässt, welche Rechnung wir indessen übergehen.

V.

Wir wollen noch einige Beziehungen aufsuchen, welche in den Gleichungen für die cyklonale Bewegung im inneren Gebiete derselben enthalten sind, und welchen wir die Form

$$47)\quad v = \frac{c}{\cos\psi}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}r,\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda}{k-c}\left(1 - \frac{c}{k}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}r_1}\right)^{2\frac{k}{c}-2}\right)$$

gegeben haben.

Im Folgenden setzen wir dagegen gemäss der Grenzen der räumlichen Bewegung $\frac{1}{2}r$ statt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}r$ und $\sin\frac{1}{2}r$.

Wir suchen zunächst das Maximum der Geschwindigkeit, indem wir v differentiiren. Es resultirt eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln

$$48)\quad \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{2k}{c}-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{c}-1\right)\left(1+\frac{(k-c)^2}{\lambda^2}\right)}}{\frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{c}-1\right)}$$

Wollte man das obige Geschwindigkeitsgesetz überhaupt der cyklonischen Bewegung zu Grunde legen, so liesse sich unter bestimmten Verhältnissen auch noch das äussere Gebiet durch dasselbe darstellen, da die letzte Formel zeigt, dass die Geschwindigkeit zuerst einen kleinsten und dann einen grössten Wert erhalten kann, welches der Bewegung im Gesamtgebiet der Cyklone durchaus entspricht. Als besonderer Fall ist die Annahme $\lambda = k$ zu betrachten, wie man findet, wenn in

$$49)\quad \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{2k}{c}-2} = \frac{1 \pm \left(1-\frac{c}{k}\right)^2}{\frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{c}-1\right)}$$

das untere Zeichen gewählt wird. Hierfür ist $r_i = r_1$, oder die Maximalgeschwindigkeit fällt in den Grenzkreis der beiden Gebiete, während die Minimalgeschwindigkeit in den äusseren Teil fällt. Ist z B. $c = \frac{4}{5}k$, so folgt

$$\frac{r}{r_1} = \left(\frac{25 \pm 1}{24}\right)^2$$

Ist c noch kleiner als $\frac{4}{5}k$ angenommen, so rücken die Orte der beiden extremen Geschwindigkeiten noch näher aneinander, während sie weiter auseinandergehen, wenn z. B. $c = k$ ist. In diesem Falle ist

$$50)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda}{k} + \frac{2\lambda}{k}\ln\frac{r_1}{r},\quad v = \frac{kr}{2\cos\psi}$$

Das Maximum der Sectorengeschwindigkeit $\frac{r}{2}v\sin\psi$ findet dann statt für

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda}{k}$$

welcher Ablenkungswinkel dem Radiusvector r_1 entsprechen möge.

Das Minimum der Geschwindigkeit findet man vermittelst

$$51) \quad \frac{r_i}{r_1} = e^{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}}$$

das Maximum durch

$$52) \quad \frac{r_a}{r_1} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}}$$

worin r_i und r_a die entsprechenden Radien bedeuten, welche durch die Beziehung

$$r_i r_m = r_1^2$$

mit einander verknüpft sind.

Die entsprechenden Ablenkungswinkel folgen dann aus

$$53) \quad \operatorname{tg}\psi_i = \frac{\lambda}{k} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{k^2}-1}, \quad \operatorname{tg}\psi_a = \frac{\lambda}{k} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{k^2}-1}$$

woraus ähnlich

$$\operatorname{tg}\psi_i \operatorname{tg}\psi_a = 1 \quad \text{also}$$

$$54) \quad \psi_i + \psi_a = 90^0 \quad \text{folgt.}$$

Diese Längen- und Winkelrelationen lassen eine einfache geometrische Construction zu.

Das Maximum der Sectorengeschwindigkeit befindet sich also in dem durch die Radien r_i und r_a begrenzten Raume. Die denselben entsprechenden Geschwindigkeiten sind

$$55) \quad \begin{aligned} v_i &= \frac{\lambda r_i}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}} \\ v_a &= \frac{\lambda r_a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}} \end{aligned}$$

Die Luftdruckformel und die Curvengleichung sind endlich noch

$$56) \quad \begin{aligned} \frac{P_i - P_0}{\varrho} &= \frac{\lambda^2 r^2}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{k^2}{\lambda^2} + \left(\frac{3}{2} + \log\frac{r_1}{r}\right)^2\right) \\ \vartheta &= \frac{k}{4\lambda}(\operatorname{tg}\psi^2 - \operatorname{tg}\psi_0^2) \end{aligned}$$

Das Verhältniss der extremen Geschwindigkeiten ist

$$\frac{v_i}{v_a} = \frac{\lambda}{k}\left(1 - \sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}\right) e^{\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}}$$

Ist z. B.

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

also im allgemeinen eine geringe Reibung vorausgesetzt, so findet man

$$\frac{v_i}{v_a} = 0{,}334$$

oder die Minimalgeschwindigkeit ist ungefähr $^1/_3$ der maximalen.

Wenn also $k < \lambda$ ist, so kann man für

$$v = \frac{kr}{2\cos\psi}$$

zwei Gebiete der Cyklone der Rechnung zu Grunde legen, in welchen zuerst zunehmende und dann abnehmende Geschwindigkeit auftritt. Nur ist dann das äussere Gebiet kleiner als dasjenige, welches der Beziehung

$$v = \frac{c}{\cos\psi} \cdot \frac{1}{r}$$

entspricht. Immerhin ist dieser engere Fall von Interesse, schon deswegen, weil für beide Gebiete ein Geschwindigkeitsgesetz genügt. Dieser Fall entspricht übrigens demjenigen, welchen wir schon bei der Berechnung der allgemeinen Circulation der Atmosphäre benutzt haben.

Um ein Beispiel zu geben, nehmen wir an, dass sich in der Breite von $55^1/_2{}^0$ eine Cyklone gebildet habe; und setzen voraus, dass $k = \frac{3}{5}\lambda$ sei. Da nun

$$\lambda = 0{,}00012$$

ist, so ist der Reibungscoefficient

$$k = 0{,}000072 \quad \text{und}$$

$$\frac{r_i}{r_1} = e^{-0{,}5}, \quad \frac{r_a}{r_1} = e^{-2|5} \quad \text{oder annähernd} \quad r_i = \tfrac{3}{5}r_1, \quad r_a = \tfrac{3}{2}r_1$$

Es ist r_1 der Radiusvector des Maximums der Flächengeschwindigkeit. Ist derselbe z. B. $= 450\,km$, so würden die Radien der Minimal- und Maximalgeschwindigkeit

$$r = 675\,km, \quad r_a = 300\,km$$

sein, mit den Ablenkungswinkeln

$$\psi_i = 18^1/_2{}^0 \quad \psi_a = 71^1/_2{}^0$$

und den Geschwindigkeiten

$$v_i = 25{,}5\,m \quad v_a = 34\,m$$

Die Luftdruckformeln für die bezeichneten Orte sind

$$57) \quad \frac{P_i - P_0}{\varrho} = \frac{\lambda^2 r_i^2}{4}\left(5 - 3\sqrt{1 - \frac{k^2}{\lambda^2}}\right),$$

$$\frac{P_a - P_0}{\varrho} = \frac{\lambda^2 r_a^2}{4}\left(5 + 3\sqrt{1 - \frac{k^2}{\lambda^2}}\right)$$

und die Barometerdifferenzen nach der Formel

$$b - b_0 = \frac{760}{10333\,g}(P - P_0)$$

$$b_i - b_0 = 41{,}3\,mm \qquad b_a - b_0 = 23{,}2\,mm$$

In der Entfernung von $450\,km$, wo die grösste Flächengeschwindigkeit eintritt, ist

$$r_1 = 450\,km, \quad \psi_1 = 59^0 \qquad v_1 = 31\,m, \quad b_1 - b_0 = 28{,}3\,mm$$

Der mittlere Sturmgradient in dem Cyklonenraume zwischen 675 und $450\,km$ ist demnach $6{,}4\,mm$, der zwischen 450 und $300\,km$ ist $3{,}7\,mm$, und der im innern Raume $8{,}6\,mm$, im Centrum ist natürlich der Gradient = null.

Diese Zahlen beziehen sich auf Durchschnittswerte. Im allgemeinen muss man, um genaue Werte zu erhalten, verfahren wie früher. S. S. 186. a. a. O.

Wir wählen noch ein Beispiel. Die Reibung sei geringer, nämlich

$$k = 0{,}00004$$

der Oberfläche des Meeres etwa entsprechend. Die geogr. Breite des Centrums sei wieder $55^1/_2{}^0$, also

$$\lambda = 0{,}00012,$$

demnach

$$\frac{k}{\lambda} = {}^1/_3$$

D ie grösste Flächengeschwindigkeit findet statt in

$$r_1 = 450\,km$$

Entfernung vom Centrum. Dann findet man folgende Werte

r_i im Minimum $720\,km$ $\psi_i = 9^0 50'$, $v_i = 14{,}9\,m$ $b_i - b_0 = 39{,}3\,mm$
r_1 $450\,km$ $\psi_1 = 71^0 30'$, $v_1 = 27\,m$ $b_1 - b_0 = 32{,}2\,mm$
r_a im Maximum $281\,km$ $\psi_a = 80^0 10'$, $v_v = 32{,}2$ $b_a - b_0 = 21{,}5\,mm$

Es gewinnt hiernach den Anschein, dass man für den Grenzfall $c = k < \lambda$ das Gesetz

$$v = \frac{cr}{2\cos\psi}$$

für die ganze Cyklone als gültig ansehen kann, sofern k nur einen Bruchteil von λ ausmacht, was in nördlicheren Breiten und auf dem Ocean der Fall ist Es steht dann frei, über die Grenze r_i das Geschwindigkeitsgesetz

$$v = \frac{c}{\cos\psi}\,\frac{1}{r}$$

herrschen zu lassen, wenn man das noch für nötig hält.

VI.

Wir kehren nun zu dem allgemeineren Falle zurück, indem wir annehmen, dass die Geschwindigkeit im ganzen Gebiet derselben durch die Formel

$$v = \frac{a\sin nr}{\cos\psi}$$

definirt sei und mit null beginne. Der Ausdruck r bezeichne wieder den Radius der Curve, dessen grösster r_0 vermittels

$$n r_0 = 180^0$$

den Wert n bestimmt. Gemäss der Formel nimmt die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Grade zu und dann bis zum Centrum wieder ab.

Der entsprechende Ablenkungswinkel ergiebt sich aus

$$58)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^{\frac{k}{na}}}{\sin r\sin nr}\left(C - \frac{\lambda}{a}\int_{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^{\frac{k}{na}}}^{} \frac{\sin r\,dr}{}\right),\qquad \lambda = 2\omega\sin\varphi$$

Wie wir schon früher nachgewiesen, ist der Ablenkungswinkel im Grenzkreise r_0 durch

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega \sin\varphi}{k+na}$$

und im Centrum durch

$$\operatorname{tg}\psi_e = \frac{2\omega \sin\varphi}{k-2na}$$

bestimmt.

Der grösste Wert von ψ^e ist 90°. Dies tritt ein, wenn

$$k = 2na$$

ist. Damit ist auch a bestimmt, nämlich

$$a = \frac{kr_0}{360}$$

und mit ihm v. Da nun aber λ oder $2\omega \sin\varphi$ eigentlich durch $2\omega(\sin\varphi_0 \cos r - \cos\varphi_0 \sin r \cos\vartheta)$ ausgedrückt werden müsste, die Integration aber des letzten in Bezug auf ϑ periodischen Gliedes auf Schwierigkeiten stösst, so kann man immerhin als genauern Wert

$$\lambda = 2\omega \sin\varphi_0 \cos r$$

setzen, worin φ_0 die geogr. Breite des Cyklonencentrums bedeutet. Die obige Formel wird dann

$$59)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^2}{\sin r \sin nr}\left(C - \frac{2\omega \sin\varphi_0}{a}\int \frac{\sin r \cos r\, dr}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^2}\right)$$

und man kann

$$\lambda_0 = 2\omega \sin\varphi_0 \text{ setzen.}$$

Wählt man den ersteren Fall, und führt ein $\frac{1}{2}nr = x$, also

$$r = \frac{2x}{n}$$

und entwickelt das Integral

$$\int \frac{\cos x^2}{\sin x^2} \sin\frac{2}{n}x\, dx$$

in Reihenform, so erhält man nach einer Reihe von Reductionen

$$60)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{4\lambda}{nk}\,\frac{\sin\frac{1}{2}nr}{\sin r}\Bigg[\frac{\log\cot\frac{1}{4}nr - \cos\frac{1}{2}nr}{\cos\frac{1}{2}nr^3} + \frac{n}{6}\sin\frac{180}{n}$$
$$-\frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{4}{n^2}-1\right)\left(\frac{4}{n^2}-9\right)}{5!}\cos\tfrac{1}{2}nr^2}{5}$$
$$+\frac{\left(\frac{4}{n^2}-1\right)\left(\frac{4}{n^2}-9\right)\left(\frac{4}{n^2}-25\right)}{7!}\left(\tfrac{3}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr^2 - \tfrac{1}{7}\cos\tfrac{1}{2}nr^4\right)$$
$$-\frac{\left(\frac{4}{n^2}-1\right)\left(\frac{4}{n^2}-9\right)\left(\frac{4}{n^2}-25\right)\left(\frac{4}{n^4}-36\right)}{9!}\cdot$$
$$\times\left(\tfrac{3}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr^2 - \tfrac{3}{7}\cos\tfrac{1}{2}nr^4 + \tfrac{1}{9}\cos\tfrac{1}{2}nr^6\right)\ldots\Bigg]$$

Im Beginn der Bewegung ist $nr_0 = 180^0$. Alle Ausdrücke in der Klammer verschwinden bis auf $\frac{n}{6}\sin\frac{180}{n}$ und $\operatorname{tg}\psi$ wird $= \frac{2}{3}\frac{\lambda}{k}$

Dies stimmt vollständig mit der Formel für $\operatorname{tg}\psi_a$ überein, wenn man darin $na = \frac{1}{2}k$ setzt.

Die obige Formel ist etwas weitläufig. Man kann indessen auch ohne Reihenentwickelung einen geschlossenen Ausdruck für $\operatorname{tg}\psi$ gewinnen, wenn n zahlenmässig gegeben ist, z. B. $n = 12$.

Wählen wir einer bequemeren Integration wegen die zweite Form desselben, so können wir dasselbe in seinem Integral

$$-\frac{\lambda_0}{a}\int\frac{\sin r\cos r\,dr}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^2}$$ umgestalten in $$-\frac{\lambda_0}{4a}\int\frac{\sin 2r\,d2r}{\operatorname{tg}6r^2}$$

oder wenn $2r = u$

$$\text{in}\quad \frac{\lambda_0}{4a}\int\frac{1-\sin 3u^2}{\sin 3u^2}\,d\cos u.$$

Da aber

$$\sin 3u^2 = (4\cos u^2 - 1)^2(1-\cos u^2)$$

st, so kann man den Ausdruck unter dem Integralzeichen

$$\frac{d\cos u}{\sin 3u^2} - d\cos u$$

durch Einführung von $\cos u = y$ zerlegen in Partialbrüche

$$\frac{1}{(4y^2-1)^2(1-y^2)} = \frac{{}^4/_3}{(4y^2-1)^2} + \frac{{}^4/_9}{4y^2-1} + \frac{{}^1/_9}{1-y^2}$$

und da

$$\int \frac{dy}{(4y^2-1)^2} = -\frac{y}{2(4y^2-1)} + \tfrac{1}{8}\log\frac{2y+1}{2y-1}$$

$$\int \frac{dy}{4y^2-1} = -\tfrac{1}{4}\log\frac{2y+1}{2y-1}, \quad \int \frac{dy}{1-y^2} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

Vermöge der Relation

$$\frac{2\cos 2r+1}{2\cos 2r-1} = \frac{\operatorname{tg} 3r}{\operatorname{tg} r}$$

erhalten wir schliesslich nach vollständiger Reduction und Bestimmung der Constanten

61) $$\operatorname{tg}\psi = \frac{3\lambda_0}{k}\frac{\sin 6r}{\sin r\cos 6r^3}\left(\frac{1}{6}\log\cot r - \frac{1}{18}\log\cot 3r - \cos 2r\right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\frac{\sin 4r}{\sin 6r} - \frac{1}{6}\log\cot 15^0 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

und die Gradientbeschleunigung

62) $$G_k = \frac{1}{24}\frac{\varrho}{u}k^2\sin 12r\left(1+\frac{\lambda_0}{k}\cos r\operatorname{tg}\psi - \frac{1}{2}\cos 12r\right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\sin 12r\cot r\operatorname{tg}\psi^2\right)$$

Es sei

$$\lambda = 0{,}00012, \quad k = 0{,}000006$$

Da $n = 12$, so ist der Grenzkreis der Cyklone 15 Meilen $= 1665\,km$. In der Entfernung von 7,5 Meilen $= 832{,}5\,km$ ist die Geschwindigkeit auf Grund der Formel

$$v = \frac{k}{24}\frac{\sin 12r}{\cos\psi} \quad \text{gleich } 40{,}7\,m$$

und der Ablenkungswinkel $\psi = 68^0\,18'$. Hieraus erhält man als Gradientkraft ca. $7\,mm$. Hierbei ist daran zu erinnern, dass die vorausgesetzte Annahme $k = 2na$ der Grenzfall der Geschwindigkeit und des Ablenkungswinkel ist, welcher letztere im Centrum den höchsten Wert 90^0 erreicht, welcher nicht überschritten werden darf. In dieser speciellen Cyklone erreichen die Geschwindigkeiten den höchsten Wert.

Der vorhin benutzte Wert $n = 12$ brachte es mit sich', dass die Cyklone eine bedeutende Ausdehnung erhielt.

Setzen wir dagegen $n = 16$, so ist der Grenzradius durch den kleineren Wert

$$r_0 = 180/16 = 11^1/_4 = 1249\,km \quad \text{bestimmt.}$$

Die Gleichung für ψ ist dann

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin 8r}{2\sin r\cos 8r^3}\left(C - \frac{\lambda}{4a}\int \frac{\sin 2r\, d2r}{\operatorname{tg} 8r^2}\right)$$

Es ist aber

$$\int \frac{\sin 2r}{\operatorname{tg} 8r^2}\, d2r = -\int \left(\frac{1}{\sin 8r^2} - 1\right) d\cos 2r$$

Führen wir ein $\cos 2r = y$, so hat man

$$\int \frac{d\cos 2r}{\sin 8r^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dy}{(2y^2-1)^2(1-y^2)y^2}$$

$$\frac{1}{(2y^2-1)^2(1-y^2)y^2} = \frac{4}{(2y^2-1)^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{y^2}$$

also

$$\int \frac{d\cos 2r}{\sin 8r^2} = -\frac{1}{8(2y^2-1)} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2y}+1}{\sqrt{2y}-1} + \frac{1}{32}\log\frac{1+y}{1-y} - \frac{1}{16y}$$

Demnach

$$63)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{4\lambda}{k}\frac{\sin 8r}{\sin r\cos 8r^3}\Big[C + \frac{1}{16\sqrt{2}}\log\cot\left(\frac{45}{2}+r\right)\cot\left(\frac{45}{2}-r\right) + \frac{1}{16}\log\cot r - \cos 2r - \frac{\cos 2r}{8\cos 4r} - \frac{1}{16\cos 2r}\Big]$$

C wird so bestimmt, dass der Wert in der Klammer für $r = \frac{180}{16}$ verschwindet. ψ ist an dieser Grenze nicht = null, vielmehr folgt sein Grenzwert aus

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega\sin\varphi}{k+na}, \quad na = \tfrac{1}{2}k$$

Die Gradientkraft ist

$$64)\quad G = \frac{1}{32}\frac{\varrho}{u}k^3\sin 16r\left(1 + \frac{\lambda_0}{k}\cos r\operatorname{tg}\psi - \tfrac{1}{2}\cos 16r + \frac{1}{32}\sin 16r\cot r\operatorname{tg}\psi^2\right)$$

Nehmen wir andererseits $\frac{k}{na} > 2$ an, so ist der Ablenkungswinkel im Centrum $< 90^0$. Es sei z. B.

$$\frac{k}{na} = 3$$

Dann wird der betreffende Wert zu Ende der Bewegung

65) $$\operatorname{tg}\psi_e = \frac{2\omega\sin\varphi}{k-2an} = 3\frac{\lambda_0}{k}$$

und im Beginn derselben

66) $$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega\sin\varphi}{k+an} = \tfrac{3}{4}\frac{\lambda_0}{k}$$

Allgemein ist

67) $$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^3}{\sin r\sin nr}\left(C-\frac{\lambda_0}{a}\int\frac{\sin r\cos r dr}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^3}\right)$$

Ist $n = 12$, also $r_0 = 15$ Meilen, so kann man das Integral wie folgt schreiben, wenn $2r = u$,

$$-\frac{\lambda_0}{4a}\int\sin 2r\cot 6r^3 d2r = -\tfrac{1}{3}\sin u(\tfrac{1}{2}\cot 3u^2 + \log\sin 3u) + \tfrac{1}{3}\int\cos u(\tfrac{1}{2}\cot 3u^2+\log\sin 3u)\,du$$

Es ist aber

$$\int\log\sin 3u\cos u\,du = \log\sin 3u\sin u - 3\int\cot 3u\sin u\,du$$

$$\int\cot 3u\sin u\,du = \sin u - \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+2\sin u}{\sqrt{3}-2\sin u}$$

$$\int\cos u\cot 3u^2 du = -\frac{\cos u}{3}(\cot 3u+3u) - \tfrac{1}{3}\int\sin u(\cot 3u+3u)\,du$$

$$\int u\sin u\,du = \sin u - u\cos u$$

und combinirt unter Beachtung, dass

$$\frac{\sqrt{3}+2\sin 2r}{\sqrt{3}-2\sin 2r} = \frac{\operatorname{tg}(30^0+r)}{\operatorname{tg}(30^0-r)}$$

ist, und nach Bestimmung der Constanten

68) $$\operatorname{tg}\psi = \frac{9\lambda_0\sin 6r^2}{2k\sin r\cos 6r^4}\left[\frac{19}{16\sqrt{3}}\log\cot(30^0+r) - \frac{19}{36\sqrt{3}}\log\cot(30^0-r) + \frac{19}{36\sqrt{3}}\log\cot 15^0 + \frac{1}{18}\cos 2r\cot 6r + \frac{1}{6}\sin 2r\cot 6r^2 + \frac{11}{9}\sin 2r - \frac{11}{18}\right]$$

$$G = \frac{1}{36}\frac{\varrho}{u}k^2 \sin 12r \left(1 + \frac{\lambda_0}{k}\cos r \operatorname{tg}\psi - \tfrac{1}{3}\cos 12r + \frac{1}{36}\sin 12r \cot r \operatorname{tg}\psi^2\right)$$

$$v = \frac{k}{36}\frac{\sin 12r}{\cos\psi}$$

Ist dagegen wieder die Ausdehnung der Cyklone eine kleinere, nämlich $= 11^1/_4$ Meilen für $n = 16$, und wie oben $k = 3na$, so ist

$$69)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{6\lambda_0 \sin 8r^2}{k \sin r \cos 8r^4}\Big[C + \tfrac{1}{8}\sin 2r \cot 8r^2 + \frac{1}{32}\cos 2r \cot 8r + \frac{37}{32}\sin 2r - \frac{33}{256}\log\frac{\operatorname{tg}(45^0 + r)}{\operatorname{tg}(45^0 - r)} - \frac{33}{128\sqrt{2}}\log\frac{\operatorname{tg}(22^1/_2{}^0 + r)}{\operatorname{tg}(22^1/_2{}^0 - r)}\Big]$$

$$G = \frac{1}{48}\frac{\varrho}{u}k^2 \sin 16r \left(1 + \frac{\lambda_0}{k}\cos r \operatorname{tg}\psi - \tfrac{1}{3}\cos 16r + \frac{1}{48}\sin 16r \cot r \operatorname{tg}\psi^2\right)$$

$$v = \frac{k}{48}\frac{\sin 16r}{\cos\psi}$$

Allgemein ist, wenn n unbestimmt gelassen,

$$70)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{3n\lambda_0}{8k}\frac{\sin \frac{1}{2}nr^2}{\sin r \cos \frac{1}{2}nr^4}\Big[C + \frac{2}{n}\cot \tfrac{1}{2}nr^2 \sin 2r + \frac{8}{n^2}\cot \tfrac{1}{2}nr \cos 2r + \frac{2}{n}\sin 2r + \Big(1 + \frac{8}{n^2}\Big) \times \int \cot \tfrac{1}{2}nr \sin 2r\, d2r\Big]$$

Wenn z. B. $n = 20$ und also die Cyklone ein Gebiet von $1000\,km$ hat, so ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{15}{2}\frac{\lambda_0}{k}\frac{\sin 10r^2}{\sin r \cos 10r^4}\Big[C + \frac{1}{10}\cot 10r^2 \sin 2r + \frac{1}{50}\cot 10r \cos 2r + \frac{1}{10}\sin 2r + \frac{51}{50}\int \cot 10r \sin 2r\, d2r\Big]$$

Man findet nun leicht

$$\int \cot 5u \sin u\, du = \int \frac{1 - 12\sin u^2 + 16\sin u^4}{5 - 20\sin u^2 + 16\sin u^4}\, d\sin u$$

$$= \sin u - \tfrac{1}{5}\sin 72^0 \log \frac{\sin 72^0 + \sin 2r}{\sin 72^0 - \sin 2r} - \tfrac{1}{5}\sin 36^0 \log \frac{\sin 36^0 + \sin 2r}{\sin 36^0 - \sin 2r}$$

und damit auch ψ.

VII.

Sieht man die Wetterkarten mit ihren vielgestaltigen Cyklonen durch, so erkennt man, dass nur in seltenen Fällen die Isobaren Kreise sind. Weit häufiger tritt eine elliptische Form derselben auf, und selbst parabolische oder ähnliche mit nach Norden gerichteter Oeffnung sind nicht selten. Diese Unterschiede sind zum Teil in der allgemeinen atmosphärischen Luftcirculation mit ihren nach Norden hin abnehmenden Gradienten begründet. Zuweilen scheint es sich zu ereignen, dass die Luftströmung in den innern Gebieten fast genau den Isobaren folgen. Wenn diese nun elliptisch geformt sind, so kann man, wenn die Strömung in der Ellipsenbahn selbst erfolgt, nach der Kraft fragen, welche die Strömungen diese zu verfolgen zwingt. Allerdings wird im allgemeinen die cyklonische Bewegung in der logarithmischen Curve einhergehen. Gleichwol wollen wir den Versuch unternehmen, die Berechnung einer elliptischen wenigstens versuchsweise einzuleiten.

Dabei nehmen wir an, dass das Centrum der Bewegung ein Brennpunkt der sphärischen Curve sei, und setzen fest, dass ihre Gleichung

71) $\sin r = \dfrac{A}{1 - e\cos\Theta}$, $\sin r_1 = \dfrac{A}{1 - e\cos\Theta_1}$ sei.

Wir bezeichnen mit r, r_1 die Radienvectoren von den beiden Brennpunkten, deren Entfernung $2c$ sei, und berechnen die durch sie gebildeten Winkel. Hiernach ist

$$\sin r \sin\Theta = \sin r_1 \sin\Theta_1 \quad \text{also}$$

$$\frac{1 - e\cos\Theta}{1 - e\cos\Theta_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}$$

Wendet man auf das Dreieck $2c r r_1$, welches natürlich durch grösste Kreise gebildet ist, eine Gauss'sche Formel an, so folgt

$$e = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(r + r_1)}$$

Wir setzen in Analogie mit der ebenen Ellipse

$$r+r_1 = 2a$$

so folgt

$$72)\quad e = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$$

welche für die zur Ebene deformirte Kugel in

$$e = \frac{c}{a} \text{ übergeht.}$$

Man hat ferner noch

$$73)\quad e = \frac{\cos\frac{\Theta+\Theta_1}{2}}{\cos\frac{\Theta-\Theta_1}{2}}$$

Da nun

$$\cos r' = \cos r\cos 2c + \sin r \sin 2c \cos\Theta$$

ist, und $r_1 = 2a - r$, so folgt nach Elimination von Θ

$$A = \frac{(\sin a^2 - \sin c^2)}{\sin a \cos c^2}\cos(a-r)$$

also

$$\sin r = \frac{\sin a^2 - \sin c^2}{\sin a \cos c^2}\cdot\frac{\cos(a-r)}{1-e\cos\Theta}$$

und endlich als Curvengleichung der sphärischen Ellipse

$$74)\quad \operatorname{tg} r = \frac{\sin a\cos a(1-e^2)}{\cos a^2/\cos c^2 - e\cos\Theta}$$

oder auch

$$75)\quad \operatorname{tg} r = \frac{\sin(a+c)\sin(a-c)}{\sin a\cos a - \sin c\cos c\cos\Theta}$$

In der ebenen Ellipse schliesst die Normale mit den Radienvectoren gleiche Winkel γ ein. Ob dies in der sphärischen Curve zutrifft, wollen wir sehen.

Wir bezeichnen mit σ den Winkel zwischen dem Vector r und der sphärischen Tangente, dann ist

$$\operatorname{tg}\sigma = -\sin r\frac{d\Theta}{dr}$$

Aus

$$\operatorname{tg} r\left(\frac{\cos a^2}{\cos c^2} - e\cos\Theta\right) = \sin a\cos a(1-e^2) = B$$

folgt aber

$$e\,\mathrm{tg}\,r\sin\Theta\,d\Theta+\frac{B\cot r}{\cos r^2}\,dr=0$$

d. i.

$$e\sin r^2\sin\Theta\,\frac{d\Theta}{dr}=B$$

also

$$\mathrm{tg}\,\sigma=\frac{\sin a\cos a(1-e^2)}{e\sin r\sin\Theta}$$

oder für das Complement $\gamma=90^0-\sigma$

$$\mathrm{tg}\,\gamma=\frac{e\sin r\sin\Theta}{\sin a\cos a(1-e^2)}$$

und ebenso

$$\mathrm{tg}\,\gamma_1=\frac{e\sin r_1\sin\Theta_1}{\sin a\cos a(1-e^2)}$$

und demnach

76) $\gamma=\gamma_1$

Bezeichnen wir wieder den Ablenkungswinkel mit ψ, so ist

77) $2\gamma=2\psi-180^0,\quad \gamma=\psi-90^0$

und demnach

$$\sin\Theta\sin 2c+\sin 2\psi\sin r'=0$$

Wird diese Gleichung differentiirt, so folgt

$$\sin 2c\cos\Theta\,\frac{d\Theta}{dt}+2\sin r'\cos 2\psi\,\psi'+\sin 2\psi\cos r'\,.\,v\cos\psi=0$$

da

$$\frac{dr_1}{dt}=-\frac{dr}{dt}=+v\cos\psi$$

ist. Da nun aus dem Obigen $\frac{d\Theta}{dt}$ bekannt ist, so folgt

$$\frac{2\sin r'\cos 2\psi}{v\cos\psi}\,\frac{d\psi}{dt}+\cos r'\sin 2\psi+2\cos\Theta\,\frac{(\cos c^2\sin a^2-\sin c^2\cos a^2)}{\sin r^2\sin\Theta}$$

Drückt man hierin $\cos\Theta$, $\sin\Theta$ etc. durch r und r_1 aus und benutzt

$$\cos 2c\sin r=\cos\Theta\cos r\sin 2c-\sin r'\cos 2\psi$$
$$\sin\Theta\cot 2\psi=\cot 2c\sin r-\cos r\cos\Theta$$

so erhält man schliesslich

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{v\sin(r'-r)\sin\psi}{2\sin r\sin r'}$$

Da nun die Gradientgleichung

$$F\sin\psi = \lambda v + \frac{v^2}{\operatorname{tg} r}\sin\psi - v\frac{d\psi}{dt}$$

bekannt ist, so resultirt nach Einsetzen von ψ' als Endresultat

78) $$F = \frac{\lambda v}{\sin\psi} + v^2\frac{\sin a\cos a}{\sin r\sin r'}$$

so dass vermöge der Gleichung

79) $$\frac{\sin\psi}{\operatorname{tg} r} - \frac{\psi'}{v} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}$$

der Krümmungshalbmesser der sphärischen Ellipse durch

80) $$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\sin r\sin r'}{\sin a\cos a\sin\psi}$$

definirt ist.

Beim Uebergang der Kugelfläche in eine Ebene ist

81) $$\varrho = \frac{rr'}{a\cos\gamma} = \frac{b^2}{a\cos\gamma^3} = \frac{N^3}{p^2}$$ wie bekannt.

Hinsichtlich der Geschwindigkeit der Luftmassen in den elliptischen Bahnen wollen wir annehmen, dass dieselbe sich umgekehrt wie der Sinus der Normale auf die Tangente verhalte. Dann ist

$$v = \frac{c}{\sin r\sin\psi}$$

und die Gradientkraft der elliptischen Bewegung

81) $$F_e = \frac{c}{\sin\psi^2}\left(\frac{\lambda}{\sin r} + \frac{c\sin a\cos a}{\sin r^3\sin r_1}\right)$$

Lassen wir die Ellipse in einen Kreis übergehen, so wird

$$r = r_1 = a \quad \text{und} \quad \psi = 90^0$$

und es ist dann

$$F_k = \frac{\lambda c}{\sin r} + \frac{c^2}{\sin r^2\operatorname{tg} r}, \quad \lambda = 2\omega\sin\varphi \quad \text{vergl. a. a. O. Gl. 38)}$$

als Gradientkraft der Bewegung im Kreise. In der logarithmischen Spirale ist bekanntlich $\psi = \text{const.}$, also $\psi' = 0$, und die obige Formel 79) für den Krümmungshalbmesser wird für diese Curve sehr einfach

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin\psi}$$

VIII.

Wir nehmen an, dass an irgend einer Stelle der Erdoberfläche durch Sonnenstrahlung eine aufsteigende Bewegung der Luftmassen eingeleitet sei, und fragen nach der Grösse der Ablenkung dieses aufsteigenden Stromes in Folge der Erdrotation. Durch den unteren Punkt legen wir ein Axensystem, dessen X, Y, Z-Achse bezüglich nach Osten, Norden und oben gerichtet sind, und beziehen die aufsteigende Bewegung auf dieses System.

Die allgemeinen Formeln für dieses sind

82)
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} - 2\omega \cos\varphi \frac{dz}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \sin\varphi \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega \cos\varphi \frac{dx}{dt}$$

und beziehen sich auf die Bewegung eines schweren Punktes.

Wir machen hier indes die einfache Annahme, dass die Bewegung unabhängig von der Schwerkraft sei und gleichförmig in vertikaler Richtung erfolge, etwa wie bei einem Luftballon. Dann folgt aus

$$z'' = 2\omega \cos\varphi x'$$

die Beziehung

$$z' = c + 2\omega \cos\varphi x$$

und analog aus

$$x'' = 2\omega \sin\varphi y' - 2\omega c \cos\varphi$$
$$x' = 2\omega \sin\varphi y - 2\omega c \cos\varphi t$$

und aus

$$y'' = -2\omega \sin\varphi x'$$
$$y' = -2\omega \sin\varphi x$$

demnach ist

83)
$$x = -\omega c \cos\varphi t^2$$
$$y = +\tfrac{2}{3}\omega^2 c \sin\varphi \cos\varphi t^3$$

Der erste dieser Ausdrücke zeigt nun, dass die Ablenkung der gleichförmig aufsteigenden Luftmassen eine westliche ist, dass dieselbe im Aequator ihr Maximum erreicht und an den Polen null ist. Die durch die Rotation der Erde modificirte aufsteigende gleichförmige Bewegung erhält also eine Tendenz nach Westen bzhw. nach links, eine Tendenz, deren Analogon wir bei der cyklonischen Bewegung in der ablenkenden Kraft der Erdrotation wiederfinden, welch letztere die auf der Oberfläche bewegten Körper auf der nördlichen Halbkugel nach rechts ablenkt.

Wir wollen die Grösse der Ablenkung berechnen. Am Aequator

steige ein Luftquantum mit der constanten Geschwindigkeit $c = 4m$ zu einer Höhe von $4000m$. Dann ist seine westliche Ableitung in dieser Höhe

$$x = -4 \,.\, 0{,}0000729 \,.\, 1000^2 = -291{,}6m$$

Bemerkt möge werden, dass ausser dieser Ablenkung noch eine kleine polare Componente

$$y = \tfrac{2}{3} c\, \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi t^3$$

auftritt.

Es ist Grund zur Annahme, dass im Inneren einer Cyklone ein aufsteigender Luftstrom vorhanden ist, welcher oben abfliesst und zur Bildung von Luftdruckmaximis Veranlassung giebt. Wenden wir auf diesen Erfahrungssatz die obige Theorie an, so zeigt letztere, dass der aufsteigende Strom einer stationären Cyklone eine schräge Lage erhalten wird, und zwar wird diese Abweichung von der Verticalen um so stärker nach links hin verschoben sein, je bedeutender die Geschwindigkeit der centralen Luftmassen ist. Ist die Cyklone fortschreitend und also ihr Fuss in Bewegung, so wird diese Abweichung wahrscheinlich am grössten sein, wenn das Centrum nach Osten wandert. Selbstverständlich werden noch andere Gründe massgebend sein, welche die schräge Lage der Achse der Cyklone bedingen, aber der soeben aus mechanischen Principien abgeleitete ist jedenfalls ein mit zu berücksichtigender.

IX.

Bisher haben wir auf die translatorische Bewegung der cyklonischen Bewegung keine Rücksicht genommen, um die Gleichungen in einfachst möglicher Form zu erhalten. Stationäre Cyklonen dürfen indessen nur selten vorkommen; die praktische Meteorologie weist vielmehr nach, dass die Ortsveränderung der Depressionen je nach den localen Umständen mehr oder weniger schnell erfolgt. Eine einigermassen vollständige Analyse der cyklonalen Bewegungen hat auf dieselben um so mehr Rücksicht zu nehmen, als durch die vereinte Wirkung der Rotation und Translation Resultanten entstehen, deren Wirkung tatsächlich in sehr ausgeprägter Weise in der Natur zu Tage tritt.

Man kann nun fragen, in welcher Curve oder Zugstrasse die Wanderung des Cyklonencentrums vor sich gehen soll. Wir werden annehmen, dass dies in einem Kreise geschieht, welchen der Mittelpunkt der Cyklone mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt. Diese Annahme dürfte sich im Hinblick auf die durch die Beobachtung

annähernd genau ermittelten Tatsachen hinlänglich empfehlen, da sie auch die Rechnung wesentlich vereinfacht und gleichwol die Eigentümlichkeit der cyklonischen Bewegung hervortreten lässt.

Der leichteren Orientirung wegen haben wir die geometrischen Verhältnisse in einer Figur hinlänglich verständlich skizzirt.

C_1 bezeichne das Centrum der Cyklone, welche ausser ihrer eigenen Spiralbewegung noch die zweite hat, welche sie auf einem Kreise vom Radius ϱ links drehend um das feste Centrum C mit der Winkelgeschwindigkeit nt herumführt. C habe die geographische Breite φ_0, die entsprechende Breite und Länge von C_1 sei φ_1 bzhw. L, vom Meridian durch C gemessen. Das sphärische Dreieck zwischen Pol, dem festen Kreis- und dem beweglichen Cyklonencentrum, PCC_1 hat also die Seiten $90^0-\varphi_0$, $90^0-\varphi_1$, ϱ, und die Winkel u, 180^0-nt, L. Ferner sei A ein beliebiger Punkt der Cyklone und die Seiten des Dreiecks PC_1A seien bezeichnet durch $90^0-\varphi_1$, $90^0-\varphi$, r und die Winkel $\varepsilon+\psi-90^0$, $180^0-\vartheta-u$, $l=\lambda-L$. Hierin bedeutet ε den Winkel zwischen der Richtung der cyklonischen Luftmassen in A und dem durch ihn hindurchgehenden Parallelikreis, und u den Winkel zwischen $90^0-\varphi_1$ und ϱ.

Wir werden uns nun der Formeln der sphärischen Astronomie bedienen, wie sie nebst den hier besonders wichtigen Relationen der sphärischen Dreiecke in Brünnows Lehrbuch S. 14 zu finden sind.

Für ein sphärisches Dreieck ABC werden wir also benutzen:

$$da = \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin b \sin C\,dA$$

84) $$\cot a\,da + \cot B\,dB = \cot b\,db + \cot A\,dA$$
$$\sin a\,dB = \sin C\,db - \sin B \cos a\,dc - \sin b \cos C\,dA$$

$$dA = -\cos c\,dB - \cos b\,dC + \sin b \sin C\,da$$

Ist abc bezüglich r, $90^0-\varphi$, $90^0-\varphi_1$, so hat man zunächst

$$\frac{dr}{dt} = -\cos A \frac{d\varphi}{dt} + \cos(\vartheta+u)\frac{d\varphi_1}{dt} + \cos\varphi \sin A \left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dL}{dt}\right)$$

Um $\frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi_1'$ zu finden, benutzen wir die Relation

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_0 \cos\varrho - \cos\varphi_0 \sin\varrho \cos nt$$

woraus

$$\cos\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = n \cos\varphi_0 \sin\varrho \sin nt$$

oder

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = n \cos\varphi_0 \sin L \quad \text{folgt.}$$

Um L' zu berechnen, benutzen wir

$$\cos\varrho = \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos L$$

woraus

$$0 = n \sin\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos\varphi_0 \sin L - \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 \sin L L' - n \cos\varphi_0{}^2 \sin\varphi_1 \cos L \sin L$$

also

$$\frac{dL}{dt} = \frac{n}{\cos\varphi_1} (\sin\varphi_0 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_0 \sin\varphi_1 \cos L)$$

oder

$$\frac{dL}{dt} = n \frac{\sin\varrho \cos u}{\cos\varphi_1} \quad \text{folgt.}$$

Da nun aber

$$\varphi' = v \sin\varepsilon, \quad \lambda' \cos\varphi = v \cos\varepsilon,$$

so folgt nach Einsetzen all dieser Ausdrücke in r'

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos\psi + n (\cos(\vartheta + u) \sin\varrho \sin u - \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} \sin A \sin\varphi \cos u)$$

d. i.

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos\psi - n \sin\varrho \sin\vartheta$$

oder wenn wir den Winkel zwischen der Zugrichtung der Cyklone und dem Vector r mit γ bezeichnen,

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos\psi - n \sin\varrho \cos\gamma$$

$n \sin r$ ist die Geschwindigkeit c des Centrums auf dem Kreise, also endlich

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos\psi - c \cos\gamma$$

Wir ziehen jetzt die 3te der obigen Differentialgleichungen heran und erhalten

$$-\sin r \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{du}{dt}\right) = -\sin A \frac{d\varphi}{dt} + \sin(\vartheta + u) \cos r \frac{d\varphi_1}{dt} - \cos\varphi \cos A \left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dL}{dt}\right)$$

Um u' zu finden, benutzen wir

$$\sin\varphi \sin u = \sin L \cos\varphi_0$$

woraus

$$\sin\varrho\cos uu' = \cos\varphi_0\cos LL'$$

also

$$u' = \frac{n\cos\varphi_0\cos L}{\cos\varphi_1}$$

Wir haben also nach Substitution von u', $\varphi'\varphi_1'$ λ', L' in die obige Gleichung

$$-\sin r\frac{d\vartheta}{dt} - n\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}\cos L\sin r$$
$$= -v\sin A\sin\varepsilon + n\sin(\vartheta+u)\cos r\cos\varphi_0\sin L$$
$$-v\cos A\cos\varepsilon + n\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\cos A\sin\varrho\cos u$$

Es ist aber

$$\frac{\cos\varphi_0\cos L}{\cos\varphi_1} = \cos\varrho - \sin\varrho\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\cos u$$

Nach mehreren Transformationen erhalten wir dann

$$\sin r\frac{d\vartheta}{dt} = v\sin\psi - n(\sin r\cos\varrho + \cos r\sin\varrho\sin\gamma)$$

oder

$$\sin r\frac{d\vartheta}{dt} = v\sin\psi - \frac{c\sin r}{\operatorname{tg}\varrho} - c\cos r\sin\gamma$$

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi - c\cos\gamma$$

Die Geschwindigkeit in der Cyklone folgt nun aus der Formel

$$V^2 = \sin r^2\vartheta'^2 + r'^2$$

oder nach Einsetzen der obigen Werte für r' und ϑ'

84) $$V^2 = (v\cos\psi + c\cos\gamma)^2 + \left(v\sin\psi - c\cos r\sin\gamma - \frac{c\sin r}{\operatorname{tg}\varrho}\right)^2$$

Man kann diese Formel noch anders ausdrücken, wenn man das Dreieck ACC_1 einführt. Schliesst der Bogen $AC = R$ mit $AC_1 = r$ den Winkel β ein, so ist

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi - n\sin R\sin\beta$$

$$\sin r\frac{d\vartheta}{dt} = v\sin\psi - n\sin R\cos\beta$$

und also

85) $$V^2 = v^2 + n^2\sin R^2 + 2nv\sin R\sin(\beta-\psi)$$

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des Cyklonencentrums $= 0$, so ist $V = 0$.

Beschreibt das Centrum der Cyklone einen grössten Kreis, so wird $\varrho = 90^0$ und die Geschwindigkeit folgt aus

$$V^2 = (v\cos\psi + c\cos\gamma)^2 + (v\sin\psi - c\sin\gamma)^2 \quad \text{oder}$$

86)

$$V^2 = v^2 + c^2 + 2cv\cos(\psi + \gamma)$$

Die resultirende Geschwindigkeit der rotatorischen und translatorischen Bewegung hängt also ausser von dieser ganz besonders von dem Winkel γ zwischen der Zugrichtung und dem Radiusvector ab.

Ziehen wir eine Linie durch das Cyklonencentrum senkrecht zur Zugrichtung, und beachten, dass der Winkel γ rechts von der Zugstrasse einen positiven, links davon einen negativen Wert hat, so ist für diejenigen Punkte, in welche die genannte Linie die Cyklone rechts schneidet, wegen $\gamma = +90^0$

87) $V_r^2 = v^2 + c^2 - 2cv\sin\psi$

und wo jene Linie sie links schneidet

88) $V_l^2 = v^2 + c^2 + 2cv\sin\psi$

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Geschwindigkeit der Cyklone an der linken Seite der Bahn grösser ist, als in der rechten, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

Und da an der Vorderseite der vorwärts schreitenden Cyklone $\gamma = 0$ und an der Hinterseite $\gamma = 180^0$ ist, so ist die Geschwindigkeit der Cyklone an der Vorderseite

89) $V_v^2 = v^2 + c^2 + 2cv\cos\psi$

und an der Hinterseite

90) $V_h^2 = v^2 + c^2 - 2cv\cos\psi$

Die Geschwindigkeit der Cyklone ist also an der Vorderseite grösser als an der Hinterseite, was ebenfalls ein Erfahrungsresultat ist.

Hat etwa die Cyklone die Bewegung nach Osten, so ist das Maximum der Geschwindigkeit im Nordostquadranten, das Minimum im Südwestquadranten.

Hat ferner im Südwestquadranten, oder allgemeiner im Quadranten an der hintern rechten Seite eine Luftmasse für einen Augen-

blick die Richtung des Centrums, so ist $\gamma + \psi = 180^0$ und die Geschwindigkeit ist

91) $V = v - c$ oder $c - v$

welche eventuell null oder gar negativ werden kann.

Hiernach kann es vorkommen, dass bei gleichen Geschwindigkeiten des fortschreitenden Centrums und der cyklonischen Luftmasse im hintern Quadranten letztere nur die Cyklone begleitet, ohne mechanische Wirkungen zu äussern. In diesem Quadranten würde also auch am ehesten ein Erlöschen des Windes oder eine Auflösung der Cyklone stattfinden, da wenigstens hier die Bedingung der Fortdauer der Cyklone nicht mehr vollständig erfüllt ist. Die Ortsveränderung schliesst also eine reine circulare Gestaltung, wie wir sie bei den stationären vorausgesetzt, aus. Der wirksamste Teil der Cyklone befindet sich links vorn, denn in diesem Quadranten ist, wenn ein Teil des Wirbels die entgegengesetzte Geschwindigkeit des Cyklonencentrums hat, $\gamma + \psi = 0$, also

92) $V = v + c$

und die Geschwindigkeit ist dann ein Maximum,

Diese Verhältnisse setzen voraus, dass die Bahn der Cyklone ein grösster Kreis ist.

Ist dies nicht der Fall, so hat man noch auf die Componente

$$\frac{c \sin r}{\operatorname{tg} \varrho}$$

Rücksicht zu nehmen, welche den Einfluss zeigt, den eine mehr oder weniger gekrümmte Kreisbahn des Cyklonencentrums auf deren Geschwindigkeit ausübt.

Diese Beziehungen lassen sich auch aus einem andern Gesichtspunkt betrachten, wenn wir die 4. Differentialformel zu Grunde legen. Wir können indessen auch die Betrachtungen an die beiden sphärischen Dreiecke PBC_1 und PC_1A anknüpfen, indem wir den Cosinussatz heranziehen.

Man hat

$$\sin \varphi_0 \cos \varrho - \cos \varphi_0 \sin \varrho \cos nt = \sin \varphi \cos r + \cos \varphi \sin r \sin (\varepsilon + \psi)$$

und differentiirt

$$n\cos\varphi_0\sin\varrho\sin nt = -\sin\varphi\cos r r' + \cos\varphi\cos r\varphi' + \cos\varphi\sin r\cos(\varepsilon+\psi)(\varepsilon'+\psi') + \cos\varphi\cos r\sin(\varepsilon+\psi)r' - \sin\varphi\sin r\sin(\varepsilon+\psi)\varphi'$$

Hierin vereinigen wir rechter Hand die zu ψ und r' gehörenden Ausdrücke, und erhalten nach Einsetzen der sphärischen Werte

$$n\cos\varphi_0\sin\varrho\sin nt = \cos\varphi_1\cos(\vartheta+u)r' + \cos\varphi_1\cos l\varphi' - \cos\varphi\cos\varphi_1\sin l(\varepsilon'+\psi')$$

Da nun

$$\cos\varphi_0\sin nt = \sin\varphi_1\sin u \quad \text{und} \quad \gamma+\vartheta = 90^0$$

so folgt

$$n\sin\varrho\sin u = -(v\cos\psi + n\sin\varrho\cos\gamma)\cos(\vartheta+u) + v\sin\varepsilon\cos l - \cos\varphi\sin l(\varepsilon'+\psi')$$

also

$$\cos\varphi\sin l(\varepsilon'+\psi') = v(\cos l\sin\varepsilon - \cos(\vartheta+u)\cos\psi) - n(\sin\varrho\sin u + \cos(\vartheta+u)\sin\varrho\cos\gamma)$$

Hierzu addiren wir beiderseits

$$v\sin\varphi\cos\varepsilon\sin l$$

und beachten, dass

$$\varepsilon = 90^0 - (\psi - A) \quad \text{ist.}$$

Nach Einführung dieser Beziehungen folgt unter Berücksichtigung von

$$\cos l\sin A + \sin l\cos A\sin\varphi = \sin(\vartheta+u)\cos r$$
$$\sin u + \cos(\vartheta+u)\cos\gamma = \sin\vartheta\sin\gamma$$
$$\sin r\sin\vartheta = \cos\varphi\sin l$$

das Resultat:

$$93) \quad \varepsilon'+\psi' = \frac{v\sin\psi}{\operatorname{tg} r} - v\operatorname{tg}\varphi\cos\varepsilon - \frac{n\sin\varrho\sin\gamma}{\sin r}$$

Es ist aber $\varepsilon+\psi$ der Winkel zwischen dem Radiusvector r der Cyklone und dem Parallelkreis, $\varepsilon'+\psi'$ ist also die Drehungsgeschwindigkeit dieses Winkels, dessen Aenderung, soweit sie von der fortschreitenden Cyklone hervorgebracht wird, durch

$$-\frac{n\sin\varrho\sin\gamma}{\sin r}$$

bestimmt ist.

Demnach äussert die fortschreitende Bewegung der Cyklone in Bezug auf die Drehungsgeschwindigkeit der Luftmassen sich in folgender Weise:

Die Drehungsgeschwindigkeit wird um so bedeutender beeinflusst, je grösser die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = n \sin r$ der Cyklone ist,

Da γ positiv ist an der rechten, und negativ an der linken Seite der Cyklone, so ist die Drehungsgeschwindigkeit eines fortschreitenden Wirbels an seiner rechten Seite kleiner als an seiner linken,

An seiner Vorder- und Rückseite ist sie null.

Bei grossen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kann überhaupt die Drehungsgeschwindigkeit verschwinden, aber dieser Fall kann nur in den rechtsseitigen Teilen der Cyklone eintreten, während zur Linken derselben, wo γ negativ, der Wert

$$+\frac{c \sin \gamma}{\sin r}$$

je nach den Umständen eine bedeutende Drehungsgeschwindigkeit sich entwickeln kann, was mit den vorhin abgeleiteten Sätzen über die Geschwindigkeitsänderungen vollkommen harmonirt.

In Bezug auf die Gradientkräfte, welche durch den Ortswechsel der Cyklone vermindert werden, haben wir aus

94)
$$\frac{F}{V}\sin\psi = \lambda + \frac{V\sin\psi}{\operatorname{tg} r} + \frac{f\omega^2}{V}\sin\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon - \frac{d\psi}{dt}$$
$$\frac{F}{V}\cos\psi = k + \frac{dV}{dt} + \frac{f\omega^2}{V}\sin\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon$$

nach Elimination von F

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\omega\sin\varphi - k\operatorname{tg}\varphi - \frac{V'}{V}\operatorname{tg}\psi + \frac{V\sin\psi}{\operatorname{tg} r} + \frac{f\omega^2}{V}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos(\varepsilon+\psi)}{\cos\psi}$$

Hierin bedeutet der letzte Ausdruck den Wert des Unterschiedes zwischen der Centrifugal- und Attractionscomponente, welche also nach Süden hin wirkt. S. a. a. O. Will man f als eine von φ abhängige Gradientkraft ansehen, welche meridional nach Norden wirkt, so ist f negativ zu setzen. Der Ausdruck ist periodisch.

Der Ausdruck für V ist nach früherem

$$V^2 = (v\cos\psi + c\cos\gamma)^2 + \left(v\sin\psi - c\cos r\sin\gamma - \frac{c\sin r}{\operatorname{tg} r}\right)^2$$

Die Veränderung des Ablenkungswinkels ψ ist nun in besonderem Masse abhängig von

$$-\frac{V'}{V}\operatorname{tg}\psi$$

indem er zeigt, dass mit zunehmender Beschleunigung eine Abnahme desselben verbunden ist.

Da wir nun eben nachgewiesen, dass die Geschwindigkeit an der rechten Seite des Wirbels kleiner ist, als an der linken, so folgt unmittelbar, dass die Ablenkungswinkel an der rechten Seite grösser sein müssen, als an der linken.

Nach den Ausdrücken der Geschwindigkeiten an der Vorder- und Rückseite der Cyklone folgt ferner, dass der Ablenkungswinkel der einströmenden Luftmassen an der Vorderseite kleiner ist, als an der Rückseite.

Die vollständige Uebereinstimmung dieser Theorie mit den Beobachtungsreihen von Clement Ley und Hildebrandsohn, wie sie von Dr. Sprung in seinem Lehrb. der Meteorologie S. 248 und 250 mitgeteilt sind, ist damit nachgewiesen.

XVI..

Ueber eine neue geometrische Construction der Lemniskate.

Von

Ernst Schultz.

Ist die Gleichung der Lemniskate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

so lassen sich die einzelnen Lemniskatenpunkte durch folgende einfachte geometrische Construction finden.

Ich mache $BN = a$, wo a eine beliebige Strecke ist, und ich errichte auf BN in N das Lot $ND = a$, so ist

$$BD = b = a\sqrt{2}$$

Der um BD als Durchmesser geschlagene Kreis geht durch N. Jetzt ziehe ich von B aus eine beliebige Sehne BS, so dass der Punkt S auf dem Bogen ND liegt. Der mit $BN = a$ um B geschlagene Kreis treffe BS in T, wenn wir den anderen Schnittpunkt nicht weiter berücksichtigen. Die durch T zu BD gezogene Parallele schneidet das auf BS in B errichtete Lot in U. Der mit BS um B geschlagene Kreis trifft die Gerade ND in R_1 und R_1'. Die Geraden BR_1 und BR_1' werden von dem mit BU um B geschlagenen Kreise in L_1, L_1', L_1''; L_1''' geschnitten, welches 4 Punkte einer Lemniskate sind, deren Achse die Gerade BN ist.

Zieht man BS', und führt dieselbe Construction aus, so erhält man 4 andere Lemniskatenpunkte. Auf diese Weise kann man fort-

fahren, bis man sämtliche Punkte erhalten hat. BN ist dann die Abscissenachse und B der Doppelpunkt der Lemniskate. Fällt der Punkt S in N, so wird

$$BU = a = BN$$

und hiermit erhalten wir die Punkte, deren Ordinate 0, Abscisse gleich $\pm a$ ist. Fällt ferner der Punkt S in D, so wird $BU = 0$ und B ist der Doppelpunkt der Lemniskate.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich folgendermassen: Es sei das Coordinatensystem (x, y) gegeben, und eine Schaar concentrischer Kreise, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfangspunkt ist. Einen Teil dieser Schaar von Kreisen durchschneidet die Gerade, deren Gleichung

$$y = ax + b$$

ist. Die Kreise, welche die Gerade schneiden resp. berühren, wollen wir äussere Kreise nennen, und ihren Radius allgemein mit R bezeichnen. Die anderen Kreise, welche die Gerade nicht schneiden resp. berühren, mögen innere Kreise heissen, und ihr Radius sei allgemein r. Zur Vereinfachung wollen wir noch die die äusseren Kreise schneidende Gerade Schnittgerade nennen. Ist die Gleichung irgend eines äusseren Kreises

$$1) \qquad x^2 + y^2 = R^2$$

so sind die Coordinaten der Schnittpunkte des äusseren Kreises 1) und der Schnittgerade

$$y = ax + b,$$

$$y_1 = \frac{b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2}; \quad x_1 = \frac{-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2}$$

Die Gleichung der Verbindungslinie dieser Schnittpunkte mit dem Coordinatenanfangspunkt ist

$$y = \frac{x_1}{y_1} x$$

oder, wenn wir die Werte für y_1 und x_1 einsetzen:

$$y = \frac{b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}} x$$

Die Gerade soll einen Kreis der inneren Schaar schneiden, und als Coordinaten dieser Schnittpunkte ergeben sich

$$2) \qquad x' = \pm \frac{x_1 r}{R}; \quad y' = \pm \frac{y_1 r}{R}$$

wenn die Gleichung des betr. inneren Kreises ist

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Setzen wir die vorhin erhaltenen Werte für x_1 und y_1 ein, so ist

$$x' = \pm \frac{r(-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2})}{R(1+a^2)};$$

$$y' = \pm \frac{r(b \pm a)\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2})}{R(1+a^2)}$$

Das doppelte Zeichen vor dem Bruch können wir fortlassen, wenn wir dieses mit r verbinden. Die Schnittpunkte der Verbindungslinie mit dem inneren Kreise liegen immer in gegenüberliegenden Quadranten. Bezeichnen wir den zwischen dem Coordinatenanfangspunkt und der Schnittgeraden liegenden Radius als positiv, so muss der nach dem anderem Schnittpunkt gehende Radius negativ sein.

Führt man diese Construction mit unendlich vielen äusseren und inneren Radien aus, so werden die Schnittpunkte auf den inneren Radien eine Curve bilden, deren Gleichung ist

3) $$x' = \frac{r(-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2})}{R(1+a^2)};$$

$$y' = \frac{r(b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2})}{R(1+a^2)}$$

wenn zwischen R und r eine bestimmte Relation $r = f(R)$ besteht. In diesen Gleichungen sind die Coordinaten der Curve proportional dem Radius d. h. der Entfernung des Curvenpunkts vom Coordinatenanfangspunkt. Dasselbe ist der Fall bei den Polarcoordinaten

$$x' = r\cos\varphi; \quad y' = r\sin\varphi$$

Nach unserer Methode suchen wir für ein beliebiges R das zugehörige r gemäss der Gleichung

$$r = f(R)$$

was jedoch weiter nichts ist als zu einem beliebigen Azimut φ das zugehörige r zu suchen, wenn die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten

$$r = g(\varphi)$$

ist. Dieses ergiebt sich auch aus den Gleichungen 2). Es ist

$$\frac{x_1}{R} = \cos\varphi; \quad \frac{y_1}{R} = \sin\varphi$$

mithin wird

$$x' = \pm r\cos\varphi; \quad y' = \pm r\sin\varphi$$

Diese beiden letzten Gleichungen stellen die Curve dar, sobald zwischen r und φ eine Relation z. B.

$$r = g(\varphi)$$

besteht. Die Gleichung

$$r = g(\varphi)$$

bedeutet die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten. In gleicher Weise bedeutet

$$r = f(R)$$

die Gleichung der Curve in den Coordinaten r und R, wo die zusammengehörigen r und R immer auf einer Geraden liegen.

Es sind zwei Arten von Aufgaben möglich dadurch, dass wir zu einer gegebenen Function zwischen r und R die zugehörige Curve suchen, oder dass wir zu der gegebenen Curve die zugehörige Relation zwischen r und R aufsuchen.

Als Beispiel für die erste Art wollen wir

$$\frac{R}{r} = n$$

setzen, wo n eine positive Zahl ist. Alsdann gehen die Gleichungen 3) über in

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{n(1+a^2)}; \qquad y = \frac{b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{n(1+a^2)}$$

wenn wir noch die Striche an den Coordinaten x' und y' fortlassen.

Diese Gleichungen stellen eine Gerade dar, denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = a$$

Diese Gerade ist also der der Schnittgerade parallel. Nehmen wir n negativ an, so muss r negativ sein, da R stets positiv ist. Hiefür erhalten wir ebenfalls eine Gerade, welche der Schnittgerade parallel ist. Beide Geraden sind ferner gleich weit vom Coordinatenanfangspunkt entfernt.

Ist das Product der Radien constant, so ist die Curve ein Kreis, auf dessen Peripherie der Coordinatenanfangspunkt liegt. Es entsteht hierbei noch ein zweiter dem ersten congruenter Kreis.

Bei der zweiten Art von Aufgaben, die Relation zwischen r und R zu suchen, wenn die Curve gegeben ist, kommen wir auf den

Fall der Lemniskate. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass

$$a = -1$$

sei. Ferner wollen wir das Coordinatensystem um 45^0 drehen. Sind die neuen Coordinaten x', y', so bestehen die Transformationsgleichungen:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y); \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$$

Es ist mithin

$$\sqrt{2}x' = \frac{br}{R}; \quad \sqrt{2}y' = -\frac{\sqrt{2R^2-b^2}}{R}r$$

Wir wollen jetzt die Striche fortlassen, und diese Werte für x und y in die Gleichung der Lemniskate 1) einsetzen. Es ist nun

$$2(x^2+y^2) = \frac{b^2r^2}{R^2} + \frac{2r^2R^2}{R^2} - \frac{b^2r^2}{R^2} = 2r^2$$

$$(x^2+y^2)^2 = r^4$$

$$2(x^2-y^2) = \frac{b^2r^2}{R^2} - \frac{2R^2r^2}{R^2} + \frac{b^2r^2}{R^2} = \frac{2b^2r^2}{R^2} - 2r^2$$

Aus der Gleichung der Lemniskate folgt nun

$$r^4 = \frac{a^2b^2r^2}{R^2} - a^2r^2 \quad \text{oder} \quad r^2 = \frac{a^2b^2}{R^2} - a^2$$

Also ist

$$r = \frac{4\sqrt{b^2-R^2}}{R}$$

die zwischen den Radien R und r bestehende Relation, wenn die Curve eine Lemniskate sein soll. Auf das doppelte Vorzeichen von r braucht nach den vorhin gemachten Bemerkungen nicht mehr eingegangen zu werden.

Die Gleichungen der Lemniskate in rechtwinkligen Coordinaten mil Hülfe der Variablen R sind

$$4) \quad x\sqrt{2} = \pm\frac{ab\sqrt{b^2-R^2}}{R^2}; \quad y\sqrt{2} = \mp\frac{a\sqrt{b^2-R^2}\sqrt{2R^2-b^2}}{R^2}$$

Nach der Gleichung der Lemniskate ist für $y = 0$

$$x = \pm a, \quad x = 0$$

Es ist $x = y = 0$, wenn $R = b$ ist. Es wird ferner $y = 0$, wenn $R = \frac{b}{\sqrt{2}}$ ist. Für diesen Wert von R wird $x = \pm a$, was

die Gleichung der Lemniskate erfordert. Wir ersehen ferner hieraus, dass b beliebig sein kann. Durch die Drehung des Coordinatensystems schneidet die Schnittgerade die neue Ordinatenachse unter

$$b' = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Die Construction für r wird am einfachsten, wenn $b' = a$, also

$$b = a\sqrt{2}$$

ist. Nach der Formel

$$r = \frac{a\sqrt{2a^2 - R^2}}{R}$$

ist die zu Anfang angeführte Construction ausgeführt. Zum Beweise für die Richtigkeit der Construction ist zu beachten, dass

$$BN = a = ND \quad \text{und} \quad ND \perp BN$$

ist. Infolgedesssen ist

$$BD = a\sqrt{2}; \quad BS = R$$

mithin

$$SD = \sqrt{2a^2 - R^2}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BSD und TBU folgt:

$$\frac{SD}{BS} = \frac{BU}{BT}$$

Da $BU = r$; $BT = a$, so ist

$$r = BU = \frac{a\sqrt{2a^2 - R^2}}{R}$$

was zu beweisen war.

Nehmen wir b willkürlich, so gestaltet sich die Construction analog der ersteren. Es sei

$$BD = b > a$$

Man construire um BD als Durchmesser den Kreis, welcher den mit a um B geschlagenen Kreis in N trifft. Das in der Mitte von BD errichtete Lot schneidet den Kreis um BD in N_1', so ist

$$BN_1' = R_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Jetzt mache man auf BN

$$BN_1 = BN_1'$$

so ist die durch N_1 senkrecht auf BN gezogene Gerade die Schnittgerade. Da

$$BN_1' = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

ist, so können die Punkte S nur auf dem Bogen $N_1'D$ liegen. Die weitere Ausführung der Construction verläuft wie in dem Falle $b = a$.

Der Ausführlichkeit wegen ist noch zu zeigen, dass

$$BU = a$$ [1])

wird, wenn der Punkt S auf N_1' fällt.. Es ist nämlich

$$N_1'BD = \frac{\pi}{4}$$

$TU \parallel BJ$, mithin

$$\text{Wkl. } UTB = \frac{\pi}{4}$$

ferner ist

$$\text{Wkl. } BUT = \frac{\pi}{4}$$

Es muss also $\triangle TBU$ ein gleichschenkliges sein, und folglich ist

$$BU = BT = a$$

Der mit BN_1' um B geschlagene Kreis berührt die Schnittgerade im Punkte N_1 und der mit $BU = a$ um B geschlagene Kreis schneidet die Gerade BN_1 in N_1 und N_{11}, welches die beiden Lemniskatenpunkte sind, deren Ordinate null, und deren Abscisse gleich $\pm a$ ist. Bei constantem a erhalten wir für jedes beliebige b eine und dieselbe Lemniskate.

Die allgemeinen Transformationsgleichungen 3) lassen sich mit Vorteil zur Construction von Curven anwenden, wenn dieselben durch den Coordinatenanfangspunkt gehen. Die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten enthält alsdann kein constantes Glied. Haben wir z. B. eine Gleichung dritten Grades zwischen den Coordinaten x und y ohne ein constantes Glied, und wenden wir hierauf die Transformationsgleichungen 3) an, so erhalten wir eine Gleichung zwischen r und R, welche für r nur vom zweiten Grade ist. Bei der Lemniskate kommen wir ebenfalls auf eine Gleichung zwischen r und R, welche r nur in der zweiten Potenz enthält.

Nicht uninteressant ist die Anwendung dieser Transformationsmethode auf homogene Gleichungen zwischen x und y ohne constantes Glied. Es sei die Gleichung

$$5) \qquad f(x, y) = x^n + \alpha x^{n-1} y + \beta x^{n-2} y^2 + \ldots + \gamma y^n = 0$$

1) Die übrigen Buchstaben sind die der ersten Figur.

gegeben, wo α, β, γ Constanten sind. Der einfacheren Bezeichnung wegen wollen wir setzen

$$x = \frac{r}{R}(A + \varphi(R)) \quad \text{und} \quad y = \frac{r}{R}(B + a\varphi(R))$$

wo sich die Bedeutungen von A, B, $\varphi(R)$ ohne weiteres aus den Gleichungen 3) ergeben. Setzt man die Werte von x und y in die Gleichung 5) ein, so kommt man auf die Gleichung:

$$(A + \varphi(R))^n + \alpha(A + \varphi(R))^{n-1}(B + a\varphi(R)) + \ldots + (B + a\varphi(R))^n = 0$$

Diese Gleichung giebt im allgemeinen n verschiedene Werte für $\varphi(R)$. Um eine Relation zwischen r und R zu erhalten, müssen wir auf den Differentialquotienten übergehen. Es ist

$$6) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

Es ist nun

$$dx = \frac{A + \varphi(R)}{R} dr + \frac{r}{R}\varphi'(R)\,dR - \frac{r(A + \varphi(R))}{R^2} dR$$

$$dy = \frac{B + a\varphi(R)}{R} dr + \frac{ra\,\varphi'(R)}{R} dR - \frac{r(B + a\varphi(R))}{R^2} dR$$

Da $f(x, y)$ eine homogene Function in x und y von $n$ter Ordnung ist, so sind es die partiellen Ableitungen ebenfalls, jedoch von $(n-1)$ter Ordnung. Setzen wir die Werte von x und y ein, so werden die partiellen Ableitungen als Functionen von r und R von der Form sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}}\varrho_1(R); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}}\varrho_2(R)$$

wo $\varrho_1(R)$ und $\varrho_2(R)$ Functionen von R sind. Mit Berücksichtigung von dx und dy geht die Gleichung in die Form

$$\Phi_1(R)\,dr + r\,\Phi_2(R)\,dR = 0$$

über, wo $\Phi_1(R)$, $\Phi_2(R)$ bestimmte Functionen von R sind. Mithin

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\Phi_2(R)}{\Phi_1(R)} dR$$

also

$$r = Ce^{-\psi(R)} \qquad 7)$$

wenn

$$\int \frac{\Phi_2(R)}{\Phi_1(R)} dR = \psi(R)$$

gesetzt wird. Eine solche Relation zwischen r und R besteht für alle homogenen Functionen von der Form 5).

Die Constante C ist so zu bestimmen, dass die vermittelst der Relation 7) construirte Curve durch den auf R liegenden Punkt geht. Geben wir der Constanten C beliebige Werte, so erhalten wir Curven, welche in den auf R liegenden Punkten parallele Tangenten haben. Bei Polarcoordinaten muss man natürlich zu einer ähnlichen Relation wie 7) zwischen Radius und Azimuth gelangen.

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass man R und r auch als rechtwinklige Coordinaten ansehen kann, sodass die zwischen ihnen bestehende Relation die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten (R, r) angiebt. Als Beispiel möge der schon oben angeführte Fall dienen, wo das Product der Radien constant ist. Es stellt dann $R \cdot r = n$ eine gleichseitige Hyperbel dar in rechtwinkligen Coordinaten (R, r), und man gelangt dann zu einer einfachen Construction der Coordinaten für die Hyperbelpunkte.

Zur graphischen Darstellung von Curven dürfte in vielen Fällen die Constructionsmethode mit den Kreisen einige Vorteile gewähren.

Stettin, Juni 1893.

XVII.

Gleichseitiges Tetraeder.

Von

R. Hoppe.

---

§ 1. Vier Eigenschaften können einem Tetraeder nur gemeinsam zukommen: 1) Congruenz aller Seiten, 2) parweise Gleichheit der Gegenkanten, 3) Gleichheit aller Seiten, 4) Gleichheit aller Höhenlote. Die 2 ersten und die 2 letzten bedingen sich offenbar gegenseitig, und der dritte ist in der ersten enthalten. Daher reducirt sich die Behauptung, dass alle 4 Eigenschaften durch einander bedingt sind, auf folgenden

Lehrsatz.

„Sind alle Seiten eines Tetraeders einander gleich, so sind sie „auch einander congruent."

Dieser Satz gilt nicht für die Grenzgebilde von 1 und 2 Dimensionen, in welche das Tetraeder stetig degeneriren kann.

Beweis.

Die Ecken des Tetraeders seien A, B, C, D, die Kanten $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = AD$, $e = BD$, $f = CD$; die Seiten seien bezeichnet durch die Grenzkanten in Klammern. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} 16\,(a\,e\,f)^2 &= 2(e^2f^2 + a^2f^2 + a^2e^2) - a^4 - e^4 - f^4 \\ 16\,(b\,f\,d)^2 &= 2(f^2d^2 + b^2d^2 + b^2f^2) - b^4 - f^4 - d^4 \\ 16\,(c\,d\,e)^4 &= 2(d^2e^2 + c^2e^2 + c^2d^2) - c^4 - d^4 - e^4 \\ 16\,(a\,b\,c)^2 &= 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nach Voraussetzung müssen diese 4 Grössen einander gleich sein. Durch Subtraction der auf einander folgenden erhält man:

$$2f^2(a^2-d^2-b^2+e^2)+2(a^2e^2-b^2d^2)-a^4+d^4+b^4-e^4=0$$
$$2d^2(b^2-e^2-c^2+f^2)+2(b^2f^2-c^2e^2)-b^4+e^4+c^4-f^4=0$$
$$2c^2(d^2-a^2-b^2+e^2)+2(d^2e^2-a^2b^2)+a^4-d^4+b^4-e^4=0$$

Sei nun

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha=d^2-a^2; & \beta=e^2-b^2; & \gamma=f^2-c^2 \\ \delta=d^2+a^2; & \varepsilon=e^2+b^2; & \zeta=f^2+c^2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dann werden diese 3 Gleichungen:

$$(\alpha+\beta)(\varepsilon-\delta)+(\alpha-\beta)(\zeta+\gamma)=0 \quad (3)$$
$$(\beta+\gamma)(\zeta-\varepsilon)+(\beta-\gamma)(\delta+\alpha)=0 \quad (4)$$
$$(\alpha-\beta)(\varepsilon-\delta)+(\alpha+\beta)(\zeta-\gamma)=0 \quad (5)$$

Durch Subtraction und Addition der Gl. (3) und (5) ergeben sich die zwei ersten der 3 folgenden Relationen, durch Verbindung mit Gl. (4) dann die dritte:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(\varepsilon+\zeta-\delta)-\beta\gamma=0 \\ \beta(\zeta+\delta-\varepsilon)-\gamma\alpha=0 \\ \gamma(\delta+\varepsilon-\zeta)-\alpha\beta=0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Ist nun keine der 3 Grössen α, β, γ null, so findet man:

$$\delta=\alpha\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma}, \quad \varepsilon=\beta\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\gamma\alpha}; \quad \zeta=\gamma\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta} \quad (7)$$

und nach Gl. (2)

$$\left.\begin{array}{llll} a^2=\left(\alpha\frac{\beta-\gamma}{\pi}\right)^2; & b^2=\left(\beta\frac{\gamma-\alpha}{\pi}\right)^2; & c^2=\left(\gamma\frac{\alpha-\beta}{\pi}\right)^2 \\ d^2=\left(\alpha\frac{\beta+\gamma}{\pi}\right)^2; & e^2=\left(\beta\frac{\gamma+\alpha}{\pi}\right)^2; & f^2=\left(\gamma\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)^2 \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\pi^2=4\alpha\beta\gamma$$

Da der Dreiecksinhalt rational in den Quadraten der Seiten ist, so kann man, wenn es sich um die Seiten des Tetraeders handelt, den obigen Ausdrücken der 6 Kanten beliebige Vorzeichen geben. Stellt man das 16fache Quadrat jedes Dreiecks als Product von 4 algebraischen Summen der 3 Kanten dar, so zeigt sich aus den eben gefundenen Werten der Kanten, dass in jedem der 4 Producte ein

Factor null ist. Demnach sind alle Seiten des Tetraeders null, und das Tetraeder degenerirt in eine gerade Linie.

Ist ferner eine der Grössen α, β, γ, z. B. γ, null, so zeigt die letzte Gl. (6), dass noch eine zweite, z B. β, null sein muss, und es bleibt als Bedingung nur übrig:

$$\alpha(\varepsilon+\xi-\delta)=0$$

Ist α nicht null, also $\varepsilon+\xi-\delta=0$, so hat man vermöge der Gl. (2):

$$d^2+a^2=2(b^2+c^2); \quad e=b; \quad f=c \tag{9}$$

Es fragt sich, ob diese Relationen an einem Tetraeder möglich sind. Wir projiciren das Tetraeder, dessen Höhe über der Basis $(abc)=h$ sei, auf die Basisebene und bezeichnen die Projectionen von d, e, f durch d', e', f'; dann ist

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos(bc) \\ d'^2 &= e'^2+c^2-2e'c\cos(e'c) \end{aligned} \tag{10}$$

mithin nach Addition von h^2

$$d^2=c^2+c^2-2e'c\cos(e'c) \tag{11}$$

Addirt man die Gl. (10) (11), so erhält man mit Anwendung der vorausgesetzten Gl. (9):

$$b\cos(bc)+e'\cos(e'c)=0$$

Diese Grösse drückt aber die Differenz von c und von der Projection des f' auf c aus. Folglich ist c gleich der Projection von f', und man hat:

$$c \geqq f' \geqq f = c$$

folglich $f=f'$, das ist

$$h=0$$

und das Tetraeder degenerirt in ein ebenes Gebilde.

Es hat sich ergeben, dass wenn keine der Grössen α, β, γ null ist, das Tetraeder, um lauter gleiche Seiten zu haben, in eine Gerade, wenn eine, und demzufolge auch eine zweite, aber nicht die dritte null ist, in ein ebenes Gebilde degeneriren müsste. Daher bleibt nur der Fall übrig

$$\alpha=\beta=\gamma=0$$

das ist

$$a=d; \quad b=e; \quad c=f$$

in welchem alle 4 Seiten des Tetraeders einander congruent sind.

Demnach können nur congruente Seiten des Tetraeders sämtlich einander gleich sein, w. z. b. w.

§ 2. In Betreff der 2 Grenzfälle, welche ausser der wirklichen Lösung der untersuchten Frage übrig bleiben, ist folgendes zu bemerken.

Ist keine der Grössen α, β, γ null, so kann man

$$\alpha \gtreqless \beta \gtreqless \gamma$$

annehmen. Dann erfüllen die Werte (8) die Gleichungen:

$$c = a+f; \quad d = b+f; \quad d = c+e; \quad b = a+c$$

woraus:

$$d = a+c+f$$

Man sieht also, dass, indem das Tetraeder in eine Gerade degenerirt, eine Kante d die ganze Länge darstellt, zwei andre b, e von je zwei Kanten gedeckt werden, und die Ecken in der Reihenfolge A, B, C, D liegen.

Fragt man nun, ob bei stetigem Uebergang des Tetraeders in eine solche Gerade seine Seiten stetig zur Gleichheit gelangen, so ist zu beachten, dass wir bisher nur vorausgesetzt haben, dass die Differenzen der Seiten null seien. Da aber bei jenem Uebergang die Seiten selbst verschwinden, so ist das Verschwinden ihrer Differenzen bedeutungslos. Die Annäherung zu ihrer Gleichheit kann nur darin bestehen, dass ihre Quotienten den Grenzwert 1 haben. Macht man dies zur Forderung, so ergibt sich die ausreichende und notwendige Bedingung:

$$(2a+c+f)(c^2-f^2) = 0$$

Der erste Factor ist > 0, der zweite ist nach anfänglicher Voraussetzung nicht null. Folglich hat der in Rede stehende Grenzfall nicht einmal finale Beziehung zu der Frage nach gleichseitigen Tetraedern.

Der zweite Grenzfall $\beta = \gamma = 0$ ergibt ein Parallelogramm nebst seinen Diagonalen. Er zeigt, dass in der Tat ein Tetraeder sich der Gleichseitigkeit ohne Grenzen stetig annähern kann, während seine Seiten nur parweise congruent werden.

§ 3. Wenn wir jetzt ein Tetraeder gleichseitig nennen, so ist in dem Attribut schon einbegriffen, dass seine Seiten einander congruent, mithin seine Gegenkanten einander gleich sind. Ein gleich-

seitiges Tetraeder ist demnach durch 3 Kanten: a, b, c, bestimmt, unter denen keine Gegenkanten vorkommen.

Diese 3 Grössen haben indes 2 Bedingungen zu erfüllen, damit die Kantenpare ein Tetraeder bilden können: 1) muss in jedem ebenen Dreieck (abc) jede Kante kleiner sein als die Summe der beiden andern; 2) in jeder Ecke $[abc]$ jeder Seitenwinkel kleiner als die Summe der beiden andern. Da nun die 3 Seitenwinkel einer Ecke auch Winkel eines Dreiecks (abc) sind, so verlangt letztere Bedingung, dass alle Seitenwinkel $< \mathrm{R}$ sind. Ist aber dies der Fall, so folgt von selbst, dass die erste Bedingung erfüllt ist.

Notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass a, b, c ein Tetraeder bilden können ist also:

$$a^2 < b^2 + c^2; \quad b^2 < c^2 + a^2; \quad c^2 < a^2 + b^2$$

Zu den specifischen Eigenschaften der gleichseitigen Tetraeder gehören noch folgende.

Da in jeder Seite die Kanten den Sinus der Gegenwinkel, diese wieder den Sinus der gegenüberliegenden Flächenwinkel proportional sind, so hat man a priori:

$$\sin\alpha = aq; \quad \sin\beta = bq; \quad \sin\gamma = cq \tag{12}$$

Sei

$$s = a+b+c; \quad t = bc+ca+ab; \quad u = abc \tag{13}$$
$$s_1 = a^2+b^2+c^2; \quad t_1 = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2, \quad u_1 = a^2b^2c^2$$

$$\frac{1}{n} = t_1 - \tfrac{1}{4}s_1^2 = s(st - \tfrac{1}{4}s^3 - 2u) \tag{14}$$

dann findet man:

$$q^2 = 2n(s_1 - 2nu_1) = 2n(s^2 - 2t - 2nu^2) \tag{15}$$

und ferner:

$$\cos\alpha = na^2(s - 2a^2); \quad \text{etc.} \tag{16}$$

Hieraus ergibt sich der Wert der Ecke, sphärisch gemessen

$$E = \alpha+\beta+\gamma - 2\mathrm{R}$$

durch

$$\sin E = \frac{4q}{s^2}\left(\frac{1}{ns}+u\right); \quad \cos E = 8\frac{nu^2+t}{s^2} - 3 \tag{17) (18}$$

Der Abstand der Endpunkte beliebiger Strecken v, w auf den Gegenkanten a, a von einander sei $= R$; dann ist R^2 von der Form:

$$R^2 = v^2+w^2 - 2vw\cos\vartheta + Lv + Mw + N \tag{19}$$

Dies ist ein Minimum für

$$\left.\begin{aligned} v - w\cos\vartheta + \tfrac{1}{2}L &= 0 \\ w - v\cos\vartheta + \tfrac{1}{2}M &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

und zwar bedeutet ϑ den Winkel zwischen den Gegenkanten a, a, die Schenkel in der Richtung der Strecken v, w gedacht. Setzt man nun zur Bestimmung von ϑ, L, M, N die Anfangs- und Endwerte 0 und a für v und für w, so wird

$$R(00) = R(aa) = b; \quad R(a0) = R(0a) = c$$

(oder umgekehrt, was gleichgültig ist), man erhält aus Gl. (19) die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} b^2 &= N = 2a^2(1-\cos\vartheta) + (L+M)a + N \\ c^2 &= a^2 + La + N = a^2 + Ma + N \end{aligned}$$

Aus diesen und den Gl. (20) (19) ergibt sich leicht:

$$L = M = -\frac{a^2+b^2-c^2}{a}; \quad N = b^2 \tag{21}$$

$$\cos\vartheta = \frac{c^2-b^2}{a^2} \tag{22}$$

$$v = w = \tfrac{1}{2}a \tag{23}$$

$$R^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \tag{24}$$

Gl. (24) zeigt die Normalabstände der Gegenkanten als die Werte von R und dessen analoge. Nach Gl. (23) werden die Gegenkanten von ihren gemeinsamen Loten in ihren Mitten getroffen. Gl. (22) gibt die Winkel zwischen den Gegenkanten. Setzt man die Werte (21) (22) (23) in Gl. (19) ein, so findet man den Abstand zweier beliebigen Punkte der Gegenkanten.

Bezeichnet man die gemeinsamen Lote der 3 Gegenkantenpare a, b, c durch a_1, b_1, c_1, so ist eines derselben a_1 normal zu 2 parallelen Ebenen, in denen die Kanten a, mithin auch die 8 Endpunkte der Kanten b, b, c, c liegen. Daraus folgt beiläufig, dass

$$\cos(ba_1) = \frac{a_1}{b}; \quad \cos(ca_1) = \frac{a_1}{c}$$

nebst den analogen Formeln. Wichtiger ist der Schluss, dass die Mitten der 4 Kanten b, b, c, c in einer Ebene E_a parallel zu den genannten Ebenen liegen, und dass E_a durch die Mitte von

a_1 geht, normal zu a_1 ist und b_1 und c_1 enthält. Hiernach sind a_1, b_1 und c_1 normal zu einander und liegen in 3 orthogonalen Ebenen. Da nun in jeder der Ebenen E_a, E_b, E_c zwei der Lote a_1, b_1', c_1 liegen, so liegt jedes der letztern in 2 Ebenen, und alle schneiden und halbiren sich im Durchschnittspunkt der 3 Ebenen, deren Durchschnittslinien sie sind. Geht man also von einem rechtwinkligen Axensystem der xyz aus, welches die Lage des Tetraeders bestimmt, so kann man alle möglichen gleichseitigen Tetraeder durch die Eckencoordinaten aufstellen:

$$(x,\ y,\ z)\ (x,\ -y,\ -z)\ (-x,\ y,\ -z)\ (-x,\ -y,\ z)$$

das sind die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Kanten

$$2x = a_1;\quad 2y = b_1;\quad 2z = c_1$$

und dessen Seitendiagonalen a, b, c sind.

Nach der letzten Gl. (1) ist

$$16(abc)^2 = 4t_1 \quad -s_1{}^2 = \frac{4}{n}$$

$$(abc) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \tag{25}$$

Die Höhe des Dreiecks über der Basis a ist

$$= \frac{2(abc)}{a}$$

also die Höhe des Tetraeders über der Basis (abc)

$$h = \frac{2(abc)}{a} \sin\alpha = 2(abc)q$$

und das Volum des Tetraeders

$$T = \tfrac{2}{3}(abc)^2 q = \frac{q}{6n} \tag{26}$$

Mittelst vorstehender Formeln lässt sich nun die Aufgabe lösen:

„Die Kanten eines gleichseitigen Tetraeders zu finden, wenn „dessen Volum, Oberfläche und Ecke gegeben sind."

Zur Lösung dienen die Gl. (17) (18) (25) (26) (14) (15) (13). Bezeichnet S die Oberfläche, so ist nach Gl. (25) und (26)

$$S = 4(abc) = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

also

$$n = \frac{4}{S^2} \tag{27}$$

$$q = 6n\,T = \frac{24\,T}{S^2} \tag{28}$$

Wir betrachten daher n und q als bekannt und haben zur Bestimmung von s, t, u die 4 Gl. (14) (15) (17) (18), und zwar aus Gl. (15) (18) die Werte:

$$u^2 = \frac{s^2 - 2t}{2n} - \frac{q^2}{4n^2} = \frac{3 + \cos E}{8n}\,s^2 - \frac{t}{n} \tag{29}$$

aus Gl. (14) (17):

$$u = \frac{st}{2} - \frac{s^3}{8} - \frac{1}{2ns} = \frac{s^2}{4q}\sin E - \frac{1}{ns} \tag{30}$$

Gl. (29) gibt direct s, dann Gl. (30) t. Man hat also:

$$s = \frac{q}{\sqrt{n}\sin\frac{1}{2}E}; \quad t = \frac{q}{4n\sin^2\frac{1}{2}E} + \frac{\cos\frac{1}{2}E}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2\frac{1}{2}E}{q^2}$$

$$u = \frac{q}{2n\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}E} - \frac{\sin\frac{1}{2}E}{q\sqrt{n}} \tag{31}$$

und $l = a, b, c$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$l^3 - sl^2 + tl - u = 0 \tag{32}$$

Alle diese Bestimmungen sind eindeutig, es kann also nie mehr als ein Tetraeder als Lösung erscheinen. Als Bedingung der Möglichkeit eines Tetraeders ist notwendig und hinreichend, dass Gl. (32) 3 positive reelle Wurzeln habe, und dass diese die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks darstellen. Hierzu ist schon vorher nötig, dass die Werte (31) positiv sind. Damit bzhw. t und u positiv sei, muss sein

$$q^2 > 2\sqrt{n}\sin^2\tfrac{1}{2}E\,(\sqrt{1+\cos^2\tfrac{1}{2}E} - \cos\tfrac{1}{2}E); \quad q^2 > \frac{2\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{2}E}{\cos\frac{1}{2}E}$$

Letztere Grenze ist die grössere. Aus ihr geht die Bedingung hervor:

$$\cos\tfrac{1}{2}E > \sqrt{\left(\frac{72\,T^2}{S^3}\right)^2 + 1} - \frac{72\,T^2}{S^3}$$

XVIII.

Beweis des Satzes von Leman pag. 224.

Von

Prof. Dr. **F. W. Fischer.**

1. Beschreibt man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC die gleichkenkligen Dreiecke ABJ, BCG, ACH, deren Basiswinkel gleich sind und zieht die Linien AG, BH, CJ, welche die Seiten des Dreiecks in den Punkten D, E, F schneiden mögen, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte. Es ist (Fig. 1):

$\frac{\triangle CJA}{\triangle CJB} = \frac{AF}{FB}$, da die Dreiecke die Seite CJ gemein haben

$\frac{\triangle AGB}{\triangle AGC} = \frac{BD}{DC}$

$\frac{\triangle BHC}{\triangle BHA} = \frac{CE}{EA}$; also

$$\frac{\triangle CJA}{\triangle CJB} \cdot \frac{\triangle AGB}{\triangle AGC} \cdot \frac{\triangle BHC}{\triangle BHA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}$$

Nun ist aber

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AJ}{AH} \quad \text{oder}$$

$AB \,.\, AH = AC \,.\, AJ$, und Wkl. $HAB = JAC$, also $\triangle BHA = CJA$; ebenso ist $\triangle AGB = CJB$ und $\triangle BHC = AGC$.

Es ist also

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

und folglich schneiden sich AG, BH, CJ in einem Punkte.

2. Wenn das Dreieck ein sphärisches ist, so lässt sich die Richtigkeit des Satzes in folgender Weise dartun. Es ist, wenn

man (Fig. 2) Wkl. $CHE = v$, Wkl. $AHE = w$, Wkl. $AJF = v'$, Wkl. $BJF = w'$, Wkl. $BGD = v''$, Wkl. $CGD = w''$, ferner Wkl. $BCH = ACG = \gamma'$, Wkl. $HAB = CAJ = \alpha'$, Wkl. $ABG = JBC = \beta'$ bezeichnet:

$$\frac{\sin v}{\sin w} = \frac{\sin \gamma' \cdot \sin CB}{\sin \alpha' \cdot \sin AB}$$

$$\frac{\sin v'}{\sin w'} = \frac{\sin \alpha' \cdot \sin AC}{\sin \beta' \cdot \sin BC}$$

$$\frac{\sin v''}{\sin w''} = \frac{\sin \beta' \cdot \sin AB}{\sin \gamma' \cdot \sin AC}; \quad \text{also}$$

$$\frac{\sin v}{\sin w} \cdot \frac{\sin v'}{\sin w'} \cdot \frac{\sin v''}{\sin w''} = 1 \qquad (1)$$

Nun ist aber

$$\frac{\sin v}{\sin w} = \frac{\sin HCE \cdot \sin CE}{\sin HAE \cdot \sin AE} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin v}{\sin w} = \frac{\sin CE}{\sin EA}; \quad \text{ebenso}$$

$$\frac{\sin v'}{\sin w'} = \frac{\sin AF}{\sin FB} \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin v''}{\sin w''} = \frac{\sin BD}{\sin DC}; \quad \text{also ist}$$

$$\frac{\sin v}{\sin w} \cdot \frac{\sin v'}{\sin w'} \cdot \frac{\sin v''}{\sin w''} = \frac{\sin CE}{\sin AE} \cdot \frac{\sin AF}{\sin FB} \cdot \frac{\sin BD}{\sin DC} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt]

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} \cdot \frac{\sin AF}{\sin FB} \cdot \frac{\sin BD}{\sin DC} = 1$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ein trigonometrischer Beweis für das ebene Dreieck ergiebt sich, wenn man in dem Beweise unter 2. an Stelle der sin. der Seiten, die Seiten selbst setzt.

Kempen (Rhein), den 17. Aug. 1893.

XIX.

Die Gauss'sche Darstellung complexer Zahlen in geometrischer Beleuchtung.

Von

Adalbert Breuer,

k. k. Professor an der Staatsoberrealschule im III. Bez. Wiens.

(Mit einer Figurentafel.)

Gegen die geometrische Deutung complexer Zahlen als Indices einer Doppelreihe von Grössen sind in neuerer Zeit viele Bedenken erhoben worden, welche den Beweisen für die Richtigkeit der Gauss'schen Darstellung die überzeugende Kraft absprechen. Von diesen Scheinbeweisen sei jener von Drobisch erwähnt. (Vergl. Schlömilch's Handbuch der algebraischen Analysis, § 58.)

Nachdem sich aber obige Darstellung dessenungeachtet als äusserst anschaulich und nutzbringend erwiesen hat, so ist es gewiss der Mühe wert, den geometrischen Gründen für diese Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Construction nachzugehn. Um das gesteckte Ziel sicher zu erreichen, ist es angezeigt, den Begriff der Zahl durch eine Strecke zu versinnlichen, so dass unter Zugrundelegung einer bestimmten Längeneinheit die erstere als die Masszahl der letzteren erscheint.

Ist in Fig. 1) 0 der Nullpunkt der Zahlenlinie $0X$, so bestimmt jeder Punkt A derselben mit 0 eine Strecke, welche eine positive oder negative Zahl versinnlicht, je nachdem A rechts oder links von 0 sich befindet. Durch die Zahlenlinie gewinnt man demgemäss eine Uebersicht aller ganzen und gebrochenen Zahlen.

Um irrationale Zahlen abzubilden, bedient man sich eines Kreises vom Centrum C und dem rationalen Radius ϱ, welcher die Abscissenachse $0X$ in den reellen Punkten B und B' schneidet. Hat C die rationalen Coordinaten $0A = a$ und $AC = y$, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC gemäss

$$AB^2 = AB'^2 = BC^2 - AC^2 = \varrho^2 - y^2$$

das Wertepaar

$$AB = +b = +\sqrt{\varrho^2 - y^2} \quad 1)$$

$$AB' = -b = -\sqrt{\varrho^2 - y^2} \quad 2)$$

Ist ABC nicht zufälliger Weise ein Pythagoräisches Dreieck, so sind die Zahlen $+b$ und $-b$ irrational; sie erscheinen durch die Strecken AB und AB' dargestellt, wenn man A als Nullpunkt auffasst. Zählt man jedoch vom Ursprung 0 aus, so ergeben sich die Streckenverbindungen

$$0B = 0A + AB = a + b \quad 3)$$

$$0B' = 0A + AB' = a - b \quad 4)$$

durch welche die surdischen Zahlen $(a+b)$ und $(a-b)$ versinnlicht werden. Die Reductionen 3) und 4) liefern

$$0B \,.\, 0B' = a^2 - b^2 \quad 5)$$

Nun hat aber das Product $0B \,.\, 0B'$ die Bedeutung der Potenz des Punktes 0 in Bezug auf alle Kreise des Büschels mit den Trägern B und B', und man hat, wenn $0T = r$ eine Kreistangente vorstellt, die Beziehung

$$0B \cdot 0B' = 0T^2 = r^2 \quad 6)$$

Aus 5) und 6) folgt

$$a^2 - b^2 = r^2 \quad 7)$$

Diese Relation konnte man aus dem mit $AB = b$ als Radius beschriebenen Kreise mittels der Tangente $0T' = r$ direct ablesen. Der Kreis vom Radius r und vom Centrum 0 schneidet die Kreise des Büschels BB' orthogonal. Nennt man

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}$$

den Modul der conjugirten surdischen Zahlen in 3) und 4), so liefert 7) einen leicht zu formulirenden Satz.

Berührt der Kreis C die Abscissenachse, so sind die irrationalen Bestandteile $+b$ und $-b$ der surdischen Zahlen gleich null. Wenn der Kreis C den Ursprung einschliesst, dann wird r^2 negativ und r imaginär. Als Mass von r dient dann nach der Planimetrie bekanntlich die halbe kürzeste Sehne durch 0, welche für alle Kreise des Büschels BB' in derselben Grösse erscheint. Der mit dieser halben Sehne beschriebene Kreis kann somit als Ersatz des in diesem Falle imaginären Orthogonalkreises angesehen werden und wird Diametralkreis genannt; er schneidet den Büschel aber nicht mehr unter rechten Winkeln.

Geht der Kreis C durch 0, dann ist wegen $a = b$ $0B = 2a$ und $0B' = 0$; ausserdem ist b nicht mehr irrational. Liegt das Centrum C in der Ordinatenachse $0Y$, dann verschwindet der rationale Teil a, und die surdischen Binome gehen in rein-irrationale Zahlen über.

Verwendet man die gewonnenen irrationalen Zahlen im Geiste als Coordinaten von Centren und als Radien von neuen Kreisen, so erhält man andere irrationale Zahlen. Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich das System der surdischen Zahlen beliebig erweitern und die Zahlenlinie in Gedanken unendlich eng punktiren.

Obige Entstehung surdischer Strecken kann in ungezwungener Weise auf complexe Strecken ausgedehnt werden. Wenn nämlich in 1) und 2) $\varrho < y$ wird, so erhält man unter Beachtung der Schreibweise $\sqrt{-1} = i$

$$AB_i = +ib = +i\sqrt{y^2 - \varrho^2} \qquad 1')$$

$$AB_i' = -ib = -i\sqrt{y^2 - \varrho^2} \qquad 2')$$

Der entsprechende Kreis C (Fig. 2) geht dann an $0X$ vorbei, und die Schnittpunkte B_i und B_i' sind imaginär. Legt man von A an den Kreis die Tangente AD, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = y^2 - \varrho^2$$

oder

$$AD = \sqrt{y^2 - \varrho^2} = b \qquad 3)$$

Beschreibt man von A aus mit AD den Kreis, so liefert dieser in $0X$ die reellen Punkte B und B', welche als Vertreter der imaginären B_i und B_i' gelten können, weil

$$iAD = iAB = AB_i = +ib$$

und

$$-iAD = iAB' = AB_i' = -ib \quad \text{ist.}$$

Die complexen Strecken

$$0B_i = 0A + AB_i = a + ib \qquad 3')$$

und

$$0B_i' = 0A + AB_i' = a - ib \qquad 4')$$

müssen dann durch die im allgemeinen surdischen Strecken

$$0B = 0A + AB = a + b \qquad 3'')$$

$$0B' = 0A + AB' = a - b \qquad 4'')$$

versinnlicht werden. Der geometrische Ort von B und B' ist eine gleichseitige Hyperbel von der Hauptachse

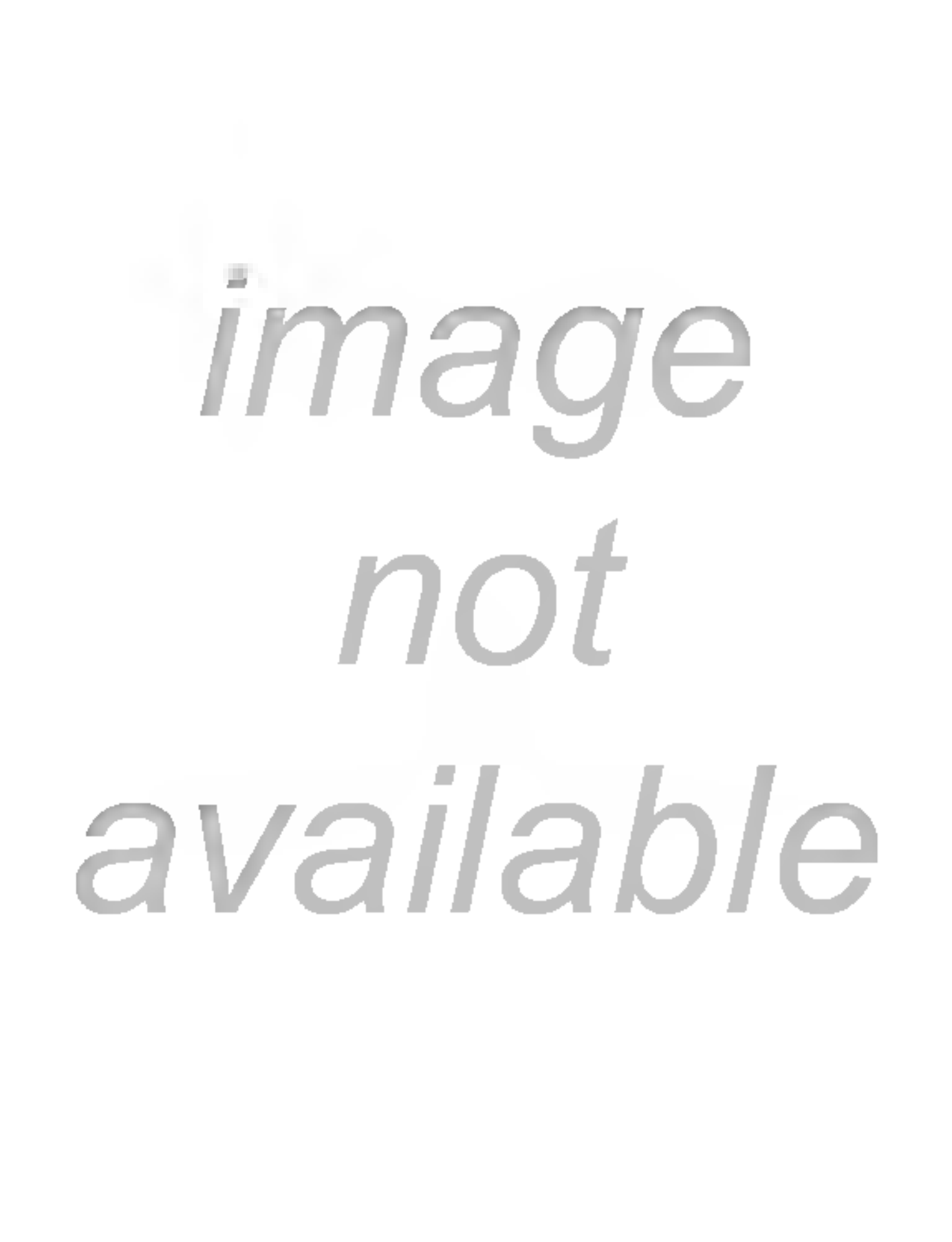


image
not
available

$$AM = AD = b$$

und aus $\triangle 0AM$ folgt

$$0M^2 = 0A^2 + AM^2 = a^2 + b^2 \qquad 10)$$

Hieraus schliesst man unter Hinblick auf 7') und 7)

$$0M^2 = 0T^2 = r^2$$

Mithin geht der Kreis 0 durch die Punkte M und M', welche als Träger eines Kreisbüschels erscheinen. Die Chordale MM' desselben enthält die Centren C aller gemeinsamen Orthogonalkreise. Diese gehen sämtlich durch die imaginären Punkte B_i und B_i' der Centrale $0X$ des Büschels MM' und haben somit $0X$ zur Chordale. Mithin bilden die Orthogonalkreise des Büschels MM' einen zweiten Büschel mit den imaginären Trägern B_i und B_i'. Unter ihnen kommen zwei Nullkreise vor, die sich mit den Punkten M resp. M' decken. Den Centren zwischen M und M' entsprechen imaginäre Orthogonalkreise an den Büschel MM'. Die reellen Ersatzkreise der letzteren gehen mit imaginären Zweigen durch die Punkte B_i und B_i'. Die Vertreter dieser Zweige sind reelle gleichseitige Hyperbeln, deren Hauptachse zu $0X$ parallel ist, und welche den Ersatzkreis mit den Scheiteln berühren. In dem Büschel MM' sind die Nullkreise imaginär und fallen mit den Punkten B_i und B_i' zusammen. Allen Kreisen dieses Büschels, deren Radien kleiner sind als $AM = b$ entsprechen imaginäre Centren, welche zwischen B_i und B_i' zu denken sind. Ersetzt man die imaginären Centren durch reelle, so ergeben sich reelle Kreise, welche durch die imaginär genommenen Punkte M und M' gehen. Die Vertreter der imaginären Zweige sind gleichseitige Hyperbeln, deren Hauptachsen zu $0Y$ parallel sind, und welche durch M und M' gehen.

Durch Variiren des Kreises C bezüglich Lage und Grösse lassen sich alle möglichen complexen Zahlen in derselben Weise zur Darstellung bringen, wie vorhin die surdischen.

Um nun die Vertreter B und B' conjugirter imaginärer Punkte B_i und B_i' von anderen Punkten der Zahlenlinie stets klar unterscheiden zu können, tut man gut, ihre Verbindung durch den Kreis A aufrecht zu erhalten. Dadurch sind Verwechslungen und Irrtümer, welche der Ersatz von 3') und 4') durch 3'') und 4'') leicht hervorrufen könnte, ausgeschlossen.

Ein anderes Mittel besteht in der Drehung des Durchmessers BB' um das Centrum A um 90^0 entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Dadurch gelangt man zu den Punkten M und M', und es stellt dann

$0A + AM$ die Zahl $a + ib$ dar, während
$0A + AM'$ die Zahl $a - ib$ versinnlicht.

Mit dieser Substitution der richtigen Vertreter B und B' der imaginären Punkte B_i und B_i' durch die willkürlichen Ersatzpunkte M und M' erscheint die Zahlenlinie $0X$ zur Zahlenebene $X0Y$ erweitert. $0X$ repräsentirt die reellen Zahlen, $0Y$ die rein imaginären, und jeder Punkt M in den Quadranten eine complexe Zahl und zwar in dem Sinne, dass die Bestandteile a und ib derselben durch die Coordinaten a und b von M ausgedrückt erscheinen. a und b sind dann gewissermassen die parallel zu den Achsen $0X$ und $0Y$ genommenen Componenten des Moduls $0M = r$ als Resultante. Es ist nun naheliegend, diesen Modul unter Angabe seiner Richtung als abermaliges Versinnlichungsmittel der complexen Zahl $a + ib$ zu wählen. Den Uebergang zu dieser Substitution bietet der Winkel $M0A = \varphi$ als Richtungsconstante. φ, auch Amplitude genannt, hat alle Werte von 0 bis $+ 360^0$ zu durchlaufen, während r von 0 bis $+ \infty$ variirt, um alle Punkte der Zahlenebene zu passiren. Zur Bestimmung von φ liefert $\triangle 0AM$ die Relationen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Unter Einführung dieser neuen Bestimmungsgrössen erscheint die complexe Zahl arithmetisch in nachfolgender Doppelbezeichnung:

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird als Normalform oder als goniometrische Form der complexen Zahl bezeichnet und liefert für Durchführung der Rechnungsoperationen die bekannten Sätze über die Moduln und Amplituden, die schliesslich zur Moivre'schen Binomialformel führen. Letztere ist bekanntlich ein Fundament vieler Theorien der algebraischen Analysis, und ihre Eleganz ist wol die Ursache für die Beliebtheit der Gauss'schen Darstellung der complexen Grössen.

Verfolgt man aber den Gang der obigen Entwicklung, so wird man es nur zu begreiflich finden, dass viele Mathematiker gegen die Gauss'sche Interpretation Stellung genommen haben, weil durch

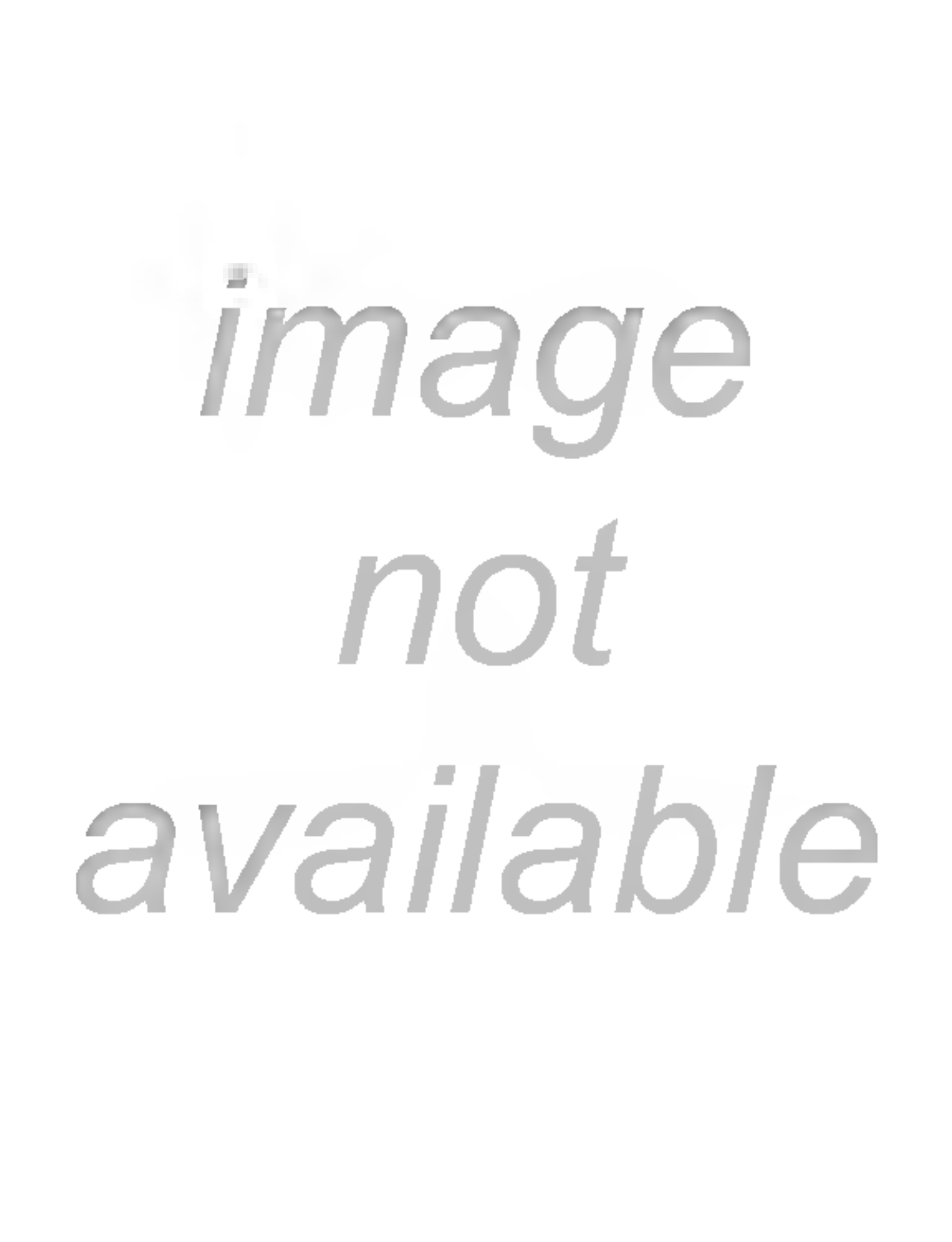


image
not
available

XX.

Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders.

Von

Ernst Liers, stud. math.

Um den Inhalt eines vierdimensionalen Pentaeders zu berechnen, muss man, wie wir später sehen werden, den Winkel kennen, den zwei Flächen eines sphärischen Tetraeders bilden, dessen Kanten gegeben sind. Wir wollen daher zunächst diese Aufgabe lösen.

Gegeben sei ein sphärischer Raum. Der Mittelpunkt desselben, d. h. also derjenige Punkt, der von allen Punkten des sphärischen Raumes gleich weit entfernt ist, heisse M. Ferner sei in diesem Raume ein sphärisches Tetraeder $ABCD$ gegeben mit den Kanten

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = c, \quad BC = d, \quad BD = e, \quad CD = f$$

Die Winkel, welche diesen Kanten gegenüberliegen, sollen α, β, γ, δ, ε, ζ heissen. Es soll der Winkel berechnet werden, welchen die Flächen ABC und BCD oder, was dasselbe ist, die Räume $MABC$ und $MBCD$ mit einander bilden. Dieser Winkel ist derselbe, den die Lote bilden, welche man im Punkte B auf der Ebene MBC in den Räumen $MABC$ und $MBCD$ errichtet. Dieser Winkel sei φ.

Nun lege man durch M und durch jene Lote Ebenen, welche die Ebenen MAC und MCD in MA' und MD' schneiden. Dann sei

$$BA' = a', \quad BD' = e'. \quad CA' = b', \quad CD' = f', \quad A'D' = c'$$

Die Verlängerungen von MA' und MD' mögen die Lote in A'' und D'' schneiden. Dann ist im geradlinigen Dreieck $A''BD''$ das Quadrat von $A''D''$

$$= \operatorname{tg}^2 a' + \operatorname{tg}^2 e' - 2 \operatorname{tg} a' \operatorname{tg} e' \cos \varphi$$

Ferner ist im geradlinigen Dreieck $A''MD''$ das Quadrat von

$$A''D'' = \sec^2 a' + \sec^2 e' - 2 \sec a' \sec e' \cos c'$$

Daraus folgt:

$$\cos \varphi = \frac{\cos c' - \cos a' \cos e'}{\sin a' \sin e'}$$

Dieser Ausdruck muss nun durch die Grössen a, b, c, d, e, f ersetzt werden. Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck $A'BC$ ist

$$\cos \alpha = \cot b' \operatorname{tg} d$$

folglich

$$\cot b' = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} d}$$

Damit ist b' bekannt, denn $\cos \alpha$ lässt sich folgendermassen durch die Seiten ausdrücken:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos d}{\sin b \sin d}$$

Ferner ist nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin a'}{\sin \alpha} = \frac{\sin b'}{\sin \beta'}$$

folglich

$$\sin a' = \sin b' \sin \alpha$$

Damit ist auch a' bekannt.

Die Grösse e' wird berechnet aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $D'BC$ Es ist

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos e - \cos d \cos f}{\sin d \sin f}$$

$$\cot f' = \frac{\cos \varepsilon}{\operatorname{tg} d}$$

$$\sin e' = \sin f' \sin \varepsilon$$

Es bleibt uns nun noch übrig, die Grösse c' zu berechnen.

Zunächst ist im sphärischen Dreieck ACD

$$\cos \gamma = \frac{\cos e - \cos b \cos f}{\sin b \sin f}$$

Im sphärischen Dreieck $A'CD'$ wollen wir den Winkel $CA'D'$ mit ζ'' bezeichnen. Dann ist

$$\cot\zeta'' = \frac{\cot f' \sin b' - \cos b' \cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\sin c' = \frac{\sin\gamma \sin f'}{\sin\zeta''}$$

Damit sind die Grössen a', e' und c' bekannt, und wir können nun den Winkel φ berechnen. Diese Berechnung ist recht langweilig und unerfreulich und erfordert sehr viel Zeit. Ich will nur das Resultat mitteilen, weil ich nachher auf einem viel einfacheren Wege, nämlich mit Hülfe von Determinantensätzen, dasselbe Ergebniss ohne jede Rechnung noch einmal herleiten werde, so dass sich der Leser von der Richtigkeit desselben überzeugen kann.

Wir erhalten also nach Ausführung jener Rechnung

$$\cos\varphi = \frac{\cos c - \cos a\cos e - \cos b\cos f + \cos a\cos d\cos f + \cos b\cos d\cos e - \cos^2 d\cos e}{\sin MABC \sin MBCD}$$

Dabei bedeutet $\sin MABC$ den Sinus der Ecke M im Raume $MABC$. Das Quadrat desselben ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos d \\ \cos b & \cos d & 1 \end{vmatrix}$$

Ebenso ist

$$\sin^2 MBCD = \begin{vmatrix} 1 & \cos d & \cos e \\ \cos d & 1 & \cos f \\ \cos e & \cos f & 1 \end{vmatrix}$$

Der Zähler jenes Bruches lässt sich darstellen als die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ 1 & \cos d & \cos e \\ \cos d & 1 & \cos f \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos a & 1 & \cos d & \cos e \\ \cos b & \cos d & 1 & \cos f \\ \cos c & \cos e & \cos f & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

das $k$te Glied der $i$ten Zeile durch m_{ik} und den zugehörigen Coefficienten dieses Elements in der nach den Elementen der $i$ten Zeile entwickelten Determinante Δ durch μ_{ik}, dann ist

$$\cos\varphi = \frac{\mu_{14}}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{44}}} = \sqrt{\frac{\mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11}\mu_{44}}}$$

Die Winkel, welche die übrigen Flächen des sphärischen Tetraeders mit einander bilden, findet man einfach durch cyklische Vertauschung von a, b, c, d, e, f beziehungsweise durch Vertauschung der μ_{ik}. Der Ausdruck für diesen Winkel ist ganz analog gebildet dem Ausdruck für die Winkel des sphärischen Dreiecks. Legen wir in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix}$$

dem μ_{ik} dieselbe Bedeutung bei, wie oben, dann lassen sich die Winkel des sphärischen Dreiecks folgendermassen ausdrücken

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{11}\mu_{22}}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{\mu_{13}\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{33}}}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{\mu_{23}\mu_{32}}{\mu_{22}\mu_{33}}}$$

Diese Ausdrücke sind, wie wir nachher sehen werden, gültig für ein sphärisches Tetraeder von beliebig hoher Dimensionszahl.

Wir können nun dazu schreiten, den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders zu berechnen, von welchem die Längen von 4 in einer Ecke zusammenstossenden Kanten gegeben sind, sowie die 6 Winkel, welche diese Kanten mit einander bilden.

Der Inhalt eines vierdimensionalen Pentaeders ist gleich $\frac{1}{4}$ Grundkörper mal Höhe.

Der Inhalt des Grundkörpers $MABC$ ist gleich $\frac{1}{6} r r_1 r_2 \sin xyz$, wo r, r_1, r_2 die Länge der Kanten bedeutet, während $\sin xyz$ gleich der Wurzel aus der bekannten Determinante ist, die wir vorhin betrachtet haben. Es handelt sich nun darum, die Länge der Höhe h aus der vierten Kante r_3 und den gegebenen Winkeln zu berechnen. Wir fällen im Raume $MBCD$ von D ein Lot auf die Ebene MBC,

das dieselbe in E treffen möge. Dann errichten wir im Raume $MABC$ auf der Ebene MBC in E ein Lot EH und legen durch dieses Lot und durch DE eine Ebene. Schliesslich fällen wir von D in der Ebene DEH ein Lot DF auf EH; dann steht DF senkrecht auf dem Raume $MABC$; denn die Ebene DEF steht nach Construction senkrecht auf dem Raume $MABC$ und DF senkrecht auf der Schnittlinie des Raumes mit der Ebene. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck DEF jene gesuchte Höhe

$$DF = DE \sin \overline{xyz\ yzt}$$

wo $\sin \overline{xyz\ yzt}$ den Sinus der beiden Räume $MABC$ und $MBCD$ bedeutet. DE ist aber gleich $r_3 \dfrac{\sin yzt}{\sin yz}$, daher ist

$$24\, MABCD = r r_1 r_2 r_3 \sin xyz \sin \overline{xyz\ yzt} \frac{\sin yzt}{\sin yz}$$

Nun ist nach den früher gebrauchten Bezeichnungen

$$\sin^2 xyz = \mu_{11}, \quad \sin^2 yzt = \mu_{44}$$

$$\sin^2 \overline{xyz\ yzt} = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{\mu_{11}\mu_{44} - \mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11}\mu_{44}}$$

Für $\sin^2 yz$ wollen wir die Bezeichnung $\mu_{11\,44}$ einführen, weil dieses Sinusquadrat diejenige Determinante bedeutet, welche übrig bleibt, wenn man in Δ die erste und vierte Zeile und Colonne fortlässt. Dann ist

$$(24\, MABCD)^2 = (r r_1 r_2 r_3)^2 \frac{\mu_{11}\mu_{44} - \mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11\,44}}$$

Der Ausdruck $\dfrac{\mu_{11}\mu_{44} - \mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11\,44}}$ ist nach einem bekannten Determinantensatze (Baltzer § 7, 3 der 5. Auflage) $= \Delta$. Wir erhalten also

$$\sin^2 xyz \sin^2 \overline{xyz\ yzt} \frac{\sin^2 yzt}{\sin yz} = \Delta$$

Die Determinante Δ wollen wir durch $\sin^2 xyzt$ bezeichnen, weil sie ganz analog gebildet ist dem Ausdruck für $\sin^2 xyz$. Demnach ist

$$24\, MABCD = r r_1 r_2 r_3 \sin xyzt$$

Damit hätten wir den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders berechnet. Ganz allgemein lässt sich zeigen, dass der Inhalt des n-dimensionalen $(n+1)$seits multiplicirt mit $n!$ gleich ist

$$r r_1 \ldots r_{n-1} \sin uvw \ldots xyz \sin uvw \ldots \overline{xyz\ vwo} \ldots xyzt, \cdot \frac{\sin vwo \ldots xyzt}{\sin vwo \ldots xyz}$$

Wenn nun

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\mu_{1n}\,\mu_{n1}}{\mu_{11}\,\mu_{nn}}}$$

ist, dann ist jener Ausdruck

$$= r r_1 r_2 \ldots r_{n-1} \sin uvw \ldots xyzt$$

und umgekehrt, wenn wir auf einem anderem Wege, ohne Zuhilfenahme des Winkels φ gefunden haben, dass der Inhalt des n-dimensionalen $(n+1)$ ecks

$$\frac{1}{n!}\, r r_1 \ldots r_{n-1} \sin uvw \ldots xyzt$$

ist, dann können wir daraus schliessen, dass

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\mu_{1n}\,\mu_{n1}}{\mu_{11}\,\mu_{nn}}}$$

ist. Um den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders ohne Zuhilfenahme des Winkels φ zu berechnen, müssen wir uns zunächst den analytischen Ausdruck eines Raumes bilden, der auf ein Coordinatensystem von vier auf einander senkrecht stehenden Achsen bezogen ist. Ein Raum ist bestimmt durch 4 Punkte. Die Coordinaten derselben seien

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0), \quad P_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1), \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$$
$$P_3 (x_3, y_3, z_3, t_3)$$

Jetzt nehmen wir auf $P_0 P_1$ einen Punkt P_1' an, so dass $P_0 P_1' : P_0 P_1 = u$ ist. Dann sind die Coordinaten des Punktes P_1'

$$\begin{aligned} x_1' &= x_0 + (x_1 - x_0)u \\ y_1' &= y_0 + (y_1 - y_0)u \\ z_1' &= z_0 + (z_1 - z_0)u \\ t_1' &= t_0 + (t_1 - t_0)u \end{aligned}$$

Ebenso nehmen wir auf $P_0 P_2$, $P_0 P_3$ Punkte P_2', P_3' an, so dass

$$P_0 P_2' : P_0 P_2 = v \quad \text{und} \quad P_0 P_3' : P_0 P_3 = w$$

ist. Dann bilden wir ein Parallelepiped mit den Kanten $P_0 P_1'$, $P_0 P_2'$, $P_0 P_3'$. Der Punkt, welcher P_0 gegenüberliegt, heisse P. Die Coordinaten desselben sind:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)u + (x_2 - x_0)v + (x_3 - x_0)w \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)u + (y_2 - y_0)v + (y_3 - y_0)w \\ z &= z_0 + (z_1 - z_0)u + (z_2 - z_0)v + (z_3 - z_0)w \\ t &= t_0 + (t_1 - t_0)u + (t_2 - t_0)v + (t_3 - t_0)w \end{aligned}$$

Eliminirt man daraus u, v und w, so ist:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & t-t_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 & t_1-t_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 & t_2-t_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 & t_3-t_0 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn wir nun u, v und w alle möglichen Werte durchlaufen lassen, dann durchläuft der Punkt P den ganzen Raum; jene Determinante ist also der analytische Ausdruck des Raumes, der durch die Punkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ hindurchgeht. Ist die Determinante nicht $= 0$, sondern etwa $= R$, dann liegt auch P nicht in dem Raume $P_0 P_1 P_2 P_3$. Dann ist R der Inhalt eines vierdimensionalen Parallelepipeds mit den Kanten $P_0 P$, $P_0 P_1$, $P_0 P_2$, $P_0 P_3$ oder der vierundzwanzigfache Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders $P P_0 P_1 P_2 P_3$. Nun sei

$$P_0 P = r$$
$$P_0 P_1 = r_1$$
$$P_0 P_2 = r_2$$
$$P_0 P_3 = r_3$$

Ferner seien die Winkel, welche $P_0 P$ mit den Coordinatenachsen bildet $= \alpha, \beta, \gamma, \delta$ und dementsprechend die Winkel der übrigen Kanten mit den Achsen

$$= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2), \quad (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3).$$

Dann wird:

$$R = \begin{vmatrix} r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma & r\cos\delta \\ r_1\cos\alpha_1 & r_1\cos\beta_1 & r_1\cos\gamma_1 & r_1\cos\delta_1 \\ r_2\cos\alpha_2 & r_2\cos\beta_2 & r_2\cos\gamma_2 & r_2\cos\delta_2 \\ r_3\cos\alpha_3 & r_3\cos\beta_3 & r_3\cos\gamma_3 & r_3\cos\delta_3 \end{vmatrix}$$

$$= r r_1 r_2 r_3 \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\delta \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & \cos\delta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \cos\delta_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & \cos\delta_3 \end{vmatrix}$$

Erheben wir den Factor von $r r_1 r_2 r_3$ in's Quadrat, dann wird derselbe gleich

$$\begin{vmatrix} \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta & \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1+\cos\delta\cos\delta_1 & \dots \\ \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1+\cos\delta\cos\delta_1 & \cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1+\cos^2\delta_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Ziehen wir nun durch den Coordinatenanfangspunkt O eine Strecke $OO_1 = 1$ parallel zu $P_0 P$ und projiciren wir dieselbe auf die Achsen, dann sind die Projectionen $= \cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\delta$ und wir erhalten durch wiederholte Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$$

Ziehen wir nun durch O eine Strecke $OO_2 = 1$ parallel zu $P_0 P_1$ und bezeichnen wir den Winkel O_1OO_2 mit xy, dann ist

$$(O_1O_2)^2 = 2 - 2\cos xy$$

nach einer bekannten Formel der Trigonometrie. Drücken wir nun $(O_1O_2)^2$ durch die Coordinaten der Punkte O_1 und O_2 aus, so erhalten wir:

$$(O_1O_2)^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma_1)^2 + (\cos\delta - \cos\delta_1)^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 + \cos\delta\cos\delta_1)$$

Nun war aber

$$(O_1O_2)^2 = 2 - 2\cos xy$$

also ist

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 + \cos\delta\cos\delta_1 = \cos xy$$

Setzt man diese Werte ein in die zuletzt betrachtete Determinante, dann wird dieselbe gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz & \cos xt \\ \cos xy & 1 & \cos yz & \cos yt \\ \cos xz & \cos yz & 1 & \cos zt \\ \cos xt & \cos yt & \cos zt & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante haben wir früher mit $\sin^2 xyzt$ bezeichnet. Es ist also

$$24\,PP_0P_1P_2P_3 = rr_1r_2r_3\sin xyzt$$

Daraus ergiebt sich, wie wir früher gesehen haben, der bekannte Wert für $\cos\varphi$. Wir haben also unsere Aufgabe gelöst, den Winkel φ zu berechnen ohne Zuhilfenahme von sphärischer Tetraedrometrie.

Der Winkel, den zwei Räume von beliebiger Dimension mit einander bilden, lässt sich nach ganz derselben Methode berechnen. Es ist stets:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\mu_{ik}\mu_{ki}}{\mu_{ii}\mu_{kk}}}$$

XXI.

Ueber eine Analogie des Laplace'schen Determinantensatzes.

Von

Ernst Liers.

Nach dem Laplace'schen Determinantensatz kann man eine Determinante vom Grade n zerlegen in Producte, deren einer Factor eine Unterdeterminante vom Grade m, der andere eine Unterdeterminante vom Grade $n-m$ ist. In Folgendem soll nun gezeigt werden, dass man die Determinante auch in Producte zerlegen kann, deren beide Factoren Unterdeterminanten vom Grade m sind; allerdings muss dann die Determinante noch multiplicirt sein mit einer Unterdeterminante vom Grade $2m-n$.

Es sei z. B. gegeben die Determinante

$$R = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{41}\, a_{55}\, a_{66}$$

Die Unterdeterminanten 5. Grades wollen wir mit α_{ik} bezeichnen. Dann ist nach einem bekannten Determinantensatz (Baltzer § 7, 3 der 5. Auflage):

$$R^3 \frac{\partial^4 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}\, \partial a_{55}\, \partial a_{66}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{55} & \alpha_{56} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{51} & \alpha_{52} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{25} & \alpha_{26} \end{vmatrix}$$

Diese Determinanten 2. Grades stellen zweite partielle Differentialquotienten der Determinante R dar; z. B. ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}} \text{ u. s. w.}$$

Wir erhalten also:

$$R \frac{\partial^4 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}\, \partial a_{55}\, \partial a_{66}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{55}\, \partial a_{66}} - \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{52}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{25}\, \partial a_{66}}$$
$$+ \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{62}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{25}\, \partial a_{66}} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{21}\, \partial a_{52}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{15}\, \partial a_{66}}$$
$$- \frac{\partial^2 R}{\partial a_{21}\, \partial a_{62}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{15}\, \partial a_{56}} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{51}\, \partial a_{62}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{15}\, \partial a_{26}}$$

Bezeichnen wir nun die Unterdeterminanten von R in der von Vandermonde eingeführten Weise durch einen Bruch, dessen Zähler die Zeilen, dessen Nenner die Colonnen bedeuten, dann ist:

$$R \frac{34}{34} = \frac{1234}{1234} \cdot \frac{3456}{3456} - \frac{1235}{1234} \cdot \frac{2456}{3456} + \frac{1236}{1234} \cdot \frac{1456}{3456}$$
$$+ \frac{2345}{1234} \cdot \frac{2345}{3456} - \frac{2346}{1234} \cdot \frac{1345}{3456} + \frac{3456}{1234} \cdot \frac{1234}{3456}$$

Damit haben wir eine Determinante vom Grade 6 multiplicirt mit einer Unterdeterminante vom Grade 2 zerlegt in Producte, deren Factoren Unterdeterminanten vom Grade 4 sind. In derselben Weise lässt sich zeigen, dass man ganz allgemein eine Determinante vom Grade n multiplicirt mit einer Unterdeterminante vom Grade $2m-n$ zerlegen kann in Producte, deren Factoren Unterdeterminanten vom Grade m sind. Man beweist diesen Satz, indem man eine Determinante vom Grade $2(n-m)$, deren Elemente Unterdeterminanten vom Grade $n-1$ der Determinante vom Grade n sind, zerlegt in Determinanten vom Grade $n-m$.

XXII.

Ueber eine Schar von Curven auf einer Tangentenfläche.

Von

R. Hoppe.

Ein von Habich gefundener Satz bezüglich ebener Curven, enthalten in seiner Abhandlung: „Sur un système particulier de coordonnées" Annali di Matematica 2. Reihe Bd. II. p. 134—150 — hat zur unmittelbaren Folge einen andern Satz, welcher gleicherweise für Raumcurven gilt. Da der letztere der einfachere ist, und in seinem Beweise der erstere als eine Synthese aus ihm mitbewiesen erscheint, so kehre ich die Deductionsfolge um und stelle als Erweiterung des Habich'schen folgenden Lehrsatz auf.

„Alle Curven, welche die Tangenten einer festen Urcurve unter gleichen Winkeln schneiden, haben die Eigenschaft, dass ihre Krümmungsmittelpunkte entsprechend jeder Tangente mit deren Berührungspunkte in gerader Linie liegen."

Zum Beweise genügt die blosse Entwickelung der analytischen Bestimmungsstücke einer beliebigen Trajectorie. Seien xyz die Coordinaten eines Punkts P der Urcurve s; $x_1 y_1 z_1$ die des entsprechenden Punkts P_1 einer Trajectorie s_1; $x_0 y_0 z_0$ die ihres Krümmungsmittelpunkts; u_1 die Strecke PP_1 längs der Tangente; fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale von s, mit Index 1 von s_1; τ und ϑ der Krümmungs- und Torsionswinkel, mithin $\frac{\partial s}{\partial \tau}$ der Krümmungsradius, und bezeichne der Accent die Differentiation nach τ, bei $f_1 g_1 h_1$ nach τ_1. Dann sind die Gleichungen von s_1:

$$x_1 = x + u_1 f; \quad \text{etc.} \tag{1}$$

Sie geben nach Differentiation:

$$f_1 \partial s_1 = f \partial(u_1 + s) + f' u_1 \partial\tau; \quad \text{etc.}$$

woraus:

$$\partial s_1^2 = [\partial(u_1 + s)]^2 + (u_1 \partial\tau)^2$$

zerlegbar in

$$\frac{\partial(u_1 + s)}{\partial s_1} = \cos\mu; \quad \frac{u_1 \partial\tau}{\partial s_1} = \sin\mu \tag{2}$$

so dass

$$f_1 = f\cos\mu + f'\sin\mu; \quad \text{etc.} \tag{3}$$

wird. Nach neuer Differentiation kommt:

$$f_1' \partial\tau_1 = -f\partial(\mu+\tau)\sin\mu + f'\partial(\mu+\tau)\cos\mu + l\partial\vartheta\sin\mu; \quad \text{etc.}$$

woraus:

$$\partial\tau_1^2 = [(\mu+\tau)]^2 + (\partial\vartheta\sin\mu)^2$$

zerlegbar in

$$\frac{\partial(\mu+\tau)}{\partial\tau_1} = \cos\nu; \quad \frac{\partial\vartheta\sin\mu}{\partial\tau_1} = \sin\nu \tag{4}$$

daher ist

$$f_1' = (-f\sin\mu + f'\cos\mu)\cos\nu + l\sin\nu; \quad \text{etc.} \tag{5}$$

Ferner hat man nach der zweiten Gl. (2)

$$x_0 = x_1 + \frac{\partial s_1}{\partial\tau_1} f_1' = x + u_1\left(f + \frac{\partial\tau}{\partial\tau_1\sin\mu} f_1'\right); \quad \text{etc.}$$

Gleichungen von der Form

$$x_0 = x + u_1 L; \quad y_0 = y + u_1 M; \quad z_0 = z + u_1 N \tag{6}$$

wo

$$L = fA + f'B + lC; \quad M = gA + g'B + mC$$
$$N = hA + h'B + nC \tag{7}$$

und nach Gl. (4) (5)

$$A = \frac{\mu' + \sin^2\nu}{\mu'+1}; \quad B = \frac{\cos\mu\cos^2\nu}{\mu'+1}; \quad C = \frac{\sin\nu\cos\nu}{(\mu'+1)\sin\mu} \tag{8}$$

Den Gleichungen (3) zufolge ist μ der Winkel zwischen den Tangenten an s_1 und s, welcher nach Voraussetzung für alle Trajectorien gleich sein soll. Die Gl. (4) zeigen, dass demzufolge auch

$$\nu = \operatorname{arc\,tg}\frac{\vartheta'\sin\mu}{\mu'+1}$$

für alle Trajectorien dieselbe Grösse ist. Alle andern in den Ausdrücken von L, M, N enthaltenen Grössen gehören der Urcurve an, sind also auch gemeinsam. Da nun nach Gl. (6) L, M, N sich ver-

halten wie die Richtungscosinus der von P ausgehenden Geraden G, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt von s_1 liegt, so ist diese Gerade dieselbe für alle Trajectorien, was zu beweisen war.

Setzt man zur Abkürzung

$$r^2 = A^2 + B^2 + C^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

so sind

$$\frac{L}{r}, \quad \frac{M}{r}, \quad \frac{N}{r}$$

die Richtungscosinus jener für das ganze Trajectoriensystem gemeinsamen Geraden, und

$$u_1 r, \quad u_2 r, \quad u_3 r, \quad \ldots$$

die Strecken, welche die Krümmungsmittelpunkte von $s_1, s_2, s_3 \ldots$ auf ihr von P aus begrenzen.

Die Gerade G variirt mit μ. Daher kann man fragen, ob sie für zwei verschiedene μ, sie seien μ_1 und μ_2, dieselbe sein kann? Hinreichende und notwendige Bedingung ist, dass für irgend eine Function q

$$A_2 = qA_1; \quad B_2 = qB_1; \quad C_2 = qC_1$$

sei. Für gegebene Curve s stehen 3 Grössen μ_1, μ_2 und q zur Verfügung. Die allgemeine Untersuchung der Frage scheint aussichtslos. Setzt man aber $\vartheta' = 0$, mithin $\nu = 0$, so erfüllen die Werte

$$\mu_2 = 2R - \mu_1; \quad q = \frac{1 + \mu_1'}{1 - \mu_1'}$$

alle Bedingungen, und diese Lösung enthält den Habich'schen Satz. Für Raumcurven habe ich keinen entsprechenden Satz gefunden.

Umgekehrt können wir folgern: Entspricht für eine Urcurve s jedem μ_1 ein μ_2 mit gemeinsamer Geraden G, so muss diese Gerade allen durch $\mu = \mu_1$ charakterisirten Trajectorien gemeinsam sein. Da also durch den Habich'schen Satz das hier Vorausgesetzte für ebene Curven s, und nur für ebene, bewiesen ist, so folgt aus ihm für ebene Curven s, und nur für ebene, der anfangs aufgestellte Lehrsatz, ist mithin dieser, sofern er für beliebige Raumcurven gilt, eine Erweiterung von ihm.

XXIII.

Ueber geradlinige Asymptoten algebraischer Curven.

Von

Oberlehrer Dr. **A. Himstedt.**

---

§ 1. Die allgemeine Gleichung einer Curve $n$ter Ordnung hat die Form:

$$(1)\ \ldots\ A_0+(A_1x+B_1y)+(A_2x^2+B_2xy+C_2y^2)+\ldots +(A_nx^n+B_nx^{n-1}y+\ldots+P_nxy^{n-1}+Q_ny^n)=0$$

Um die Richtungen zu bestimmen, nach denen sich die Curve in's Unendliche erstreckt, führen wir Polarcoordinaten ein, indem wir

$$x=r\,.\,\cos\theta \quad \text{und} \quad y=r\,.\,\sin\theta$$

setzen. Dadurch geht die Gleichung (1) über in

$$(2)\ \ldots\ A_0+(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)\,.\,r+(A_2\cos^2\theta+B_2\cos\theta\sin\theta+C_2\sin^2\theta)r^2 +\ldots+(A_n\cos^n\theta+B_n\cos^{n-1}\theta\sin\theta+\ldots +P_n\cos\theta\sin^{n-1}\theta+Q_n\sin^n\theta)r^n=0$$

Soll sich nun diese Curve in's unendliche erstrecken, so muss der Radiusvector $r=\infty$ werden, und dies ist der Fall, wenn:

$$(3)\ \ldots\ A_n\cos^n\theta+B_n\cos^{n-1}\theta\sin\theta+\ldots+Q_n\sin^n\theta=0$$

gesetzt wird, wie sich leicht ergiebt, wenn wir die obige Gleichung durch r^n dividiren und dann $r=\infty$ setzen. Dividiren wir ferner die Gleichung (3) durch $\cos^n\theta$, so ergiebt sich:

$$(4)\ \ldots\ A_n+B_n\operatorname{tang}\theta+\ldots+Q_n\operatorname{tang}^n\theta=0$$

und die Auflösung dieser Gleichung nach $\tang\theta$ ergiebt dann diejenigen Richtungen, für welche der Radiusvector unendlich gross wird. Da die Gleichung (4) in Bezug auf $\tang\theta$ vom $n$ten Grade ist, so folgt hieraus der bekannte Satz:

(5) . . . „Für jede Curve $n$ter Ordnung giebt es im allgemeinen n „verschiedene Richtungen, nach denen sich dieselbe in's „Unendliche erstreckt."

Diese Richtungen mögen die Asymptotenrichtungen der Curve genannt werden.

Gehen wir von Gleichung (3) wieder zu rechtwinkligen Coordinaten über, so ergiebt sich:

$$(6) \ldots A_n x^n + B_n x^{n-1} y + \ldots + Q_n y^n = 0$$

Diese Gleichung repräsentirt bekanntlich n durch den Anfangspunkt gehende Gerade, und nach dem Vorigen ist klar, dass jede dieser Geraden die Curve im Unendlichen durchschneidet. Wir können daher folgende Regel aufstellen:

(7) . . . „Um die Asymptotenrichtungen einer algebraischen Curve „kennen zu lernen, setze man die Glieder höchster Dimen„sion gleich null und zerlege die linke Seite dieser Glei„chung in lineare Factoren."

Dass jede der in (6) enthaltenen Geraden die Curve im Unendlichen durchschneidet, lässt sich auch in folgender Weise dartun. Angenommen, es sei:

$$ax + by = 0$$

eine dieser Geraden. Eliminiren wir eine Veränderliche, z. B. y, aus dieser Gleichung und der allgemeinen Curvengleichung (1), so erhalten wir offenbar eine Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade $n-1$ ist. Nun kann aber jede Gleichung vom Grade $n-1$ angesehen werden als eine Gleichung $n$ten Grades, welche $n-1$ endliche und eine unendliche grosse Wurzel hat. Denn ist

$$(8) \ldots Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

eine Gleichung $n$ten Grades, und setzen wir $x = \frac{1}{z}$, so dass

$$(9) \ldots A + Bz + Cz^2 + \ldots + Pz^{n-1} + Qz^n = 0$$

wird, so erkennt man leicht, dass für $A = 0$ die Gleichung (9) eine Wurzel $z = 0$, und folglich die Gleichung (8) eine unendlich grosse Wurzel hat, und dass gleichzeitig der Grad dieser Gleichung für

$A = 0$ sich um eine Einheit erniedrigt. Wäre ferner $A = B = 0$, so hätte (9) zwei Wurzeln $z = 0$. und folglich (8) zwei unendlich grosse Wurzeln, d. h. jede Gleichung vom Grade $n-2$ kann angesehen werden als eine Gleichung $n$ten Grades, welche zwei unendlich grosse Wurzeln hat, u. s. w.

Die linearen Factoren der Gleichung (6) sind entweder reell oder imaginär. Ist n eine gerade Zahl, so kann es geschehen, dass sämtliche dieser Factoren imaginär sind. Wir können dann schliessen, dass sich die Curve in diesem Falle überhaupt nicht in's Unendliche erstreckt, sondern ganz im Endlichen gelegen ist, wie z. B. die Ellipse, die Lemniskate u. s. w. Wenn aber n eine ungerade Zahl ist, so muss mindestens ein Factor der Gleichung (6) reell sein, da die imaginären Factoren immer paarweise auftreten. Es folgt hieraus unter Anderem der bekannte Satz, dass eine Curve ungerader Ordnung sich stets in's Unendliche erstreckt.

§ 2. Wir wollen jetzt annehmen, dass unsere Curve in der Richtung einer der Coordinatenachsen, z. B. der x-Achse, sich in's Unendliche erstreckt. Dann ist einer der linearen Factoren, in welche sich die Glieder höchster Dimension zerlegen lassen, gleich y, und die Gleichung der Curve hat dann unmittelbar die Form:

$$y \,.\, V_{n-1} + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots + U_0 = 0$$

wo die U und V ganze Functionen von x und y bedeuten, deren Grad durch den Index gegeben ist. Ordnen wir vorstehende Gleichung nach fallenden Potenzen von x, so erhalten wir ein Resultat von der Form:

$$(10) \ldots x^{n-1}(A_0 + A_1 y) + x^{n-2}(B_0 + B_1 y + B_2 y^2) + x^{n-3}(C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3) + \ldots = 0$$

Jede Parallele zur x Achse hat mit dieser Curve einen Punkt im Unendlichen gemein, denn die Substitution $y = a$ liefert in Bezug auf x eine Gleichung vom Grade $n-1$, und diese hat, nach dem, was in dem vorigen § bewiesen ist, eine unendlich grosse Wurzel. Unter allen diesen Geraden giebt es eine, welche mit der Curve zwei Punkte im Unendlichen gemein hat. Diese Gerade ist:

$$(11) \ldots \qquad A_0 + A_1 y = 0$$

Denn durch Elimination von y aus (10) und (11) resultirt eine Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade $n-2$ ist und demnach zwei unendlich grosse Wurzeln hat. Die Gerade (2) wird eine geradlinige Asymptote der Curve genannt. Ist $A_1 = 0$, so liegt diese

Asymptote ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen, wie z. B. bei der Apollonischen Parabel:

$$ax - y^2 = 0$$

Ist dagegen A_1 von null verschieden, so ist (11) eine Gerade im endlichen Abstande vom Anfangspunkte. In letzterem Falle wollen wir diese Gerade als neue x-Achse wählen; dann geht die Gleichung (10) in folgende über:

$$(12) \ldots x^{n-1} \cdot y + x^{n-2}(a_0 + a_1 y + a_2 y^2) + x^{n-3}(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3) + \ldots = 0$$

und wir wissen, dass dann die x-Achse selbst eine Asymptote der Curve ist. Um nun zu untersuchen, wie die Curve zu dieser Asymptote liegt, betrachten wir die der Asymptote benachbarte Parallele:

$$(13) \ldots \qquad y = h, \quad \lim h = 0$$

und bestimmen die Schnittpunkte von (12) und (13). Zu dem Zwecke eliminiren wir y aus diesen beiden Gleichungen und erhalten:

$$(14) \ldots h \cdot x^{n-1} + x^{n-2}(a_0 + a_1 h + a_2 h^2) + x^{n-3}(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h_3) + \ldots = 0$$

Wollen wir die Wurzeln dieser Gleichung nur näherungsweise berechnen, so dürfen, da $\lim h = 0$ ist, die unendlich kleinen Grössen $a_1 h$ und $a_2 h^2$ gegen die endliche Grösse a_0 vernachlässigt werden, ebenso $b_1 h$, $b_2 h^2$ und $b_3 h^3$ gegen b_0 u. s. w., so dass die vorige Gleichung sich zu

$$h x^{n-1} + a_0 x^{n-2} + b_0 x^{n-3} + \ldots = 0$$

vereinfacht. Sollen aber ferner nur diejenigen Wurzeln dieser Gleichung in Betracht gezogen werden, welche unendlich gross sind, so dürfen auch $b_0 x^{n-3}$ und alle niedrigeren Potenzen von x gegen die Glieder $a_0 x^{n-2}$ und $h x^{n-1}$ vernachlässigt werden, denn unendlich grosse Grössen von niedrigerer Ordnung kommen gegen solche von höherer Ordnung nicht in Betracht. Unsere Gleichung vereinfacht sich also weiter auf

$$h x^{n-1} + a_0 x^{n-2} = 0$$

und hieraus folgt:

$$(15) \ldots \qquad x = -\frac{a_0}{h}$$

Die der Asymptote benachbarte Gerade (13) schneidet also die Curve im Unendlichen in demjenigen Punkte, dessen Abscisse durch (15) gegeben ist. Da nun x mit h gleichzeitig sein Vorzeichen ändert,

so folgt, dass von den beiden der x-Achse benachbarten Parallelen $y = +h$ und $y = -h$, die eine die Curve im positiv Unendlichen, die andere im negativ Unendlichen durchschneidet, oder mit andern Worten, die Curve liegt im Unendlichen auf verschiedenen Seiten ihrer Asymptote. (Fig. 1). Dies ist z. B. bei der gleichseitigen Hyperbel

$$xy - a^2 = 0$$

der Fall.

§ 3. Die Resultate des vorigen Paragraphen verlieren ihre Giltigkeit in dem Falle, wo in der Gleichung (14) der Coefficient a_0 verschwindet. Dann reducirt sich diese Gleichung, wenn wir wieder $\lim h = 0$ und $\lim x = \infty$ voraussetzen, auf

$$h x^{n-1} + b_0 x^{n-3} = 0$$

und hieraus folgt:

$$(16) \ldots \qquad x = \pm \sqrt{-\frac{b_0}{h}}$$

Die Gerade $y = h$ schneidet also die Curve nur dann in reellen Punkten, wenn der Ausdruck $\frac{b_0}{h}$ eine negative Grösse ist, d. h. entweder nur für positive oder nur für negative Werte von h. Wir schliessen daraus, dass die Curve im Unendlichen auf einer und derselben Seite ihrer Asymptote liegt, und zwar, wie wir aus dem doppelten Vorzeichen der Wurzelgrösse erkennen, im positiv und im negativ Unendlichen. (Fig. 2). Die Asymptote $y = 0$ schneidet in diesem Falle die Curve dreimal im Unendlichen, denn setzen wir $y = 0$ in die Curvengleichung ein, so erniedrigt sich der Grad derselben offenbar um 3 Einheiten. Die Curve besitzt demnach im Unendlichen einen Wendepunkt, wie dies z. B. bei der Hyperbel dritter Ordnung

$$x^2 y - a^3 = 0$$

der Fall ist.

Nehmen wir ferner an, dass in der Gleichung der Curve (12) auch der Coefficient b_0 verschwindet, dass also $a_0 = b_0 = 0$ ist, so erhalten wir aus (14) die reducirte Gleichung:

$$h x^{n-4} + c_0 x^{n-4} = 0$$

und hieraus

$$(17) \ldots \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{c_0}{h}}$$

Wie man sieht, ist die Abscisse x jetzt wieder für jedes positive oder negative h reell, und wechselt gleichzeitig mit h sein Zeichen,

d. h. die Curve liegt im Unendlichen auf verschiedenen Seiten ihrer Asymptote, und zwar im positiv und im negativ Unendlichen, wie in Fig. 1. Ferner hat die Asymptote jetzt 4 Punkte mit der Curve im Unendlichen gemein, denn der Grad der Curvengleichung wird durch die Substitution $y = 0$ offenbar um 4 Einheiten erniedrigt. Die Curve besitzt in diesem Falle im Unendlichen einen Undulationspunkt. Als Beispiel führen wir die Hyperbel vierter Ordnung an:

$$x^3 y - a^4 = 0$$

Wie diese Untersuchungen weiter fortzusetzen sind, ist leicht ersichtlich. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen:

(18) . . . „Eine algebraische Curve liegt im Unendlichen auf der„selben oder auf verschiedenen Seiten ihrer Asymptote, „je nachdem diese mit der Curve eine ungerade oder ge„rade Anzahl von Punkten im Unendlichen gemein hat."

§ 4. Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, wo zwei der Asymptotenrichtungen in dieselbe Gerade, z. B. die x-Achse zusammenfallen. Die Gleichung unserer Curve hat dann offenbar die Form:

$$y^2 \cdot V_{n-2} + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots + U_0 = 0$$

oder nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$$(19) \ldots A x^{n-1} + x^{n-2}(A_0 + A_1 y + A_2 y^2) + x^{n-3}(B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y^3) + \ldots = 0$$

Jede Parallele zur x-Achse schneidet die Curve einmal im Unendlichen, denn die Substitution $y = a$ erniedrigt den Grad der Gleichung um eine Einheit. Allein es giebt jetzt keine zur x-Achse parallele Asymptote, so lange die Constante A von null verschieden ist. Ist jedoch $A = 0$, so schneidet jede Parallele zur x-Achse die Curve zweimal im Unendlichen, und die Curve hat alsdann einen Doppelpunkt im Unendlichen. Unter allen diesen Geraden giebt es nun zwei, welche mit der Curve 3 Punkte im Unendlichen gemein haben, und welche daher die beiden Asymptoten des unendlich fernen Doppelpunktes genannt werden. Diese beiden Asymptoten, welche offenbar durch die Gleichung

$$(20) \ldots \qquad A_0 + A_1 y + A_2 y^2 = 0$$

gegeben sind, können reell oder imaginär sein. Lässt sich die linke Seite der vorstehenden Gleichung nicht in reelle Factoren zerlegen, so hat die Curve zwei imaginäre Asymptoten und im Unendlichen einen isolirten Punkt, woraus wir dann schliessen, dass die Curve sich in

diesem Falle überhaupt nicht in der Richtung der x-Achse in's Unendliche erstreckt, wie z. B. die Curve

$$x(a^2+y^2)-a^3=0$$

Im andern Falle sei

$$A_0+A_1y+A_2y^2\equiv A_2(y-a)(y-a')$$

wo a und a' wei reelle Grössen bedenten. Die Curve hat dann die beiden reellen Asymptoten

$$y-a=0 \quad \text{und} \quad y-a'=0$$

und jede derselben hat mit der Curve 3 Punkte im Unendlichen gemein, wie sich durch Substitution unmittelbar aus der Gleichung (19) ergiebt, indem wir die Annahme $A=0$ berücksichtigen. Um nun zu untersuchen, wie die Curve in Bezug auf die Asymptoten liegt, bestimmen wir wieder, in derselben Weise wie vorher, die Schnittpunkte der Curve mit einer der Asymptote benachbarten Parallelen:

$$y-a=h, \quad \text{oder} \quad y-a'=h, \quad \lim h=0$$

Die Resultate sind offenbar dieselben wie im vorigen Paragraphen. So hat z. B. die Curve

$$x(a^2-y^2)-a^3=0$$

die beiden Asymptoten $a\pm y=0$, und zwar liegt die Curve im Unendlichen auf verschiedenen Seiten jeder Asymptote. Die Curve

$$x^2(a^2-y^2)-2ax(a+y)^2+a^4=0$$

liegt im Unendlichen auf derselben Seite der Asymptote $a-y=0$, dagegen auf verschiedenen Seiten der Asymptote $a+y=0$. Endliegt die Curve

$$x^2(a^2-y^2)-a^4=0$$

im Unendlichen auf derselben Seite der einen wie der andern Asymptote.

§. 5. Es bleibt jetzt noch der Fall zu betrachten übrig, wo nicht allein 2 Asymptotenrichtungen, sondern auch die beiden Asymptoten selbst zusammenfallen. Die Gleichung der Curve hat dann die Form:

$$Ax^{n-1}\,.\,(y-a)^2+x^{n-3}(B_0+B_1y+B_2y^2+B_3y^3)+\ldots=0$$

oder, wenn wir die Gerade $y-a=0$ als neue x-Achse wählen:

$$(21) \ldots x^{n-2} \cdot y^2 + x^{n-3}(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3) + x^{n-4}(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b^4 y^4) + \ldots = 0$$

Um die Lage der Curve zu ihrer Asymptote $y = 0$ zu bestimmen, untersuchen wir, wie bisher, die Schnittpunkte der Curve mit einer zur Asymptote benachbarten Parallelen

$$y = h, \quad \lim h = 0$$

Durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung (21) geht diese über in

$$(22) \ldots h^2 x^{n-2} + x^{n-3}(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3) + x^{n-4}(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 + b_4 h^4) + \ldots = 0$$

woraus annäherungsweise

$$h^2 \cdot x^{n-2} + a_0 \cdot x^{n-3} = 0$$

oder

$$(23) \ldots \qquad x = -\frac{a_0}{h_2}.$$

folgt. Demnach hat die Abscisse x des unendlich fernen Schnittpunkts stets dasselbe Vorzeichen, gleichviel, ob h positiv oder negativ genommen wird. Wir schliessen daraus, dass die Curve im Unendlichen auf beiden Seiten ihrer Asymptote liegt und zwar so, dass beide Aeste sich der Asymptote in derselben Richtung nähern. (Fig. 3). Die Curve besitzt im Unendlichen einen Rückkehrpunkt der ersten Art, wie z. B. die Hyperbel dritter Ordnung:

$$xy^2 - a^3 = 0$$

Anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn in der Gleichung (21) der Coefficient a_0 verschwindet. In diesem Falle leiten wir aus der Gleichung (22) die folgende ab:

$$h^2 \cdot x^{n-2} + a_1 h x^{n-3} + b_0 x^{n-4} = 0$$

oder, nach Division durch x^{n-4}:

$$h^2 x^2 + a_1 h x + b_0 = 0$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind

$$(24) \ldots \qquad x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4b_0}}{2h}$$

und von ihnen hängt offenbar die Lage der Curve ab. Ist zunächst $a_1^2 - 4b_0 < 0$, so sind jene Wurzeln complex, woraus wir schliessen können, dass die Curve dann überhaupt keine Aeste besitzt, welche sich in der Richtung der x-Achse in's Unendliche erstrecken. Die Curve besitzt im Unendlichen einen isolirten Punkt, dem in diesem Falle allerdings zwei reelle und zusammenfallende Asymptoten entsprechen. Als Beispiel führen wir die Curve an:

$$x^2y^2 - axy(2a+y) + 2a^4 = 0$$

Ist ferner $a_1^2 - 4b_0 > 0$, so sind die beiden Wurzeln (24) reell und verschieden, und die Curve besitzt dann 4 Aeste, welche sich in der Richtung der x-Achse in's Unendliche erstrecken. Haben beide Wurzeln dasselbe Vorzeichen (und dies ist der Fall, wenn $b_0 > 0$), so hat die Curve die Gestalt der Fig. 4. Sind die Wurzeln von ungleichen Vorzeichen ($b_0 < 0$), so haben wir eine der Fig. 5 ähnliche Gestalt. In beiden Fällen besitzt die Curve im Unendlichen einen Selbstberührungspunkt. Als Beispiele seien erwähnt:

$$x^2y^2 - axy(2a+y) \pm \tfrac{1}{2}a^4 = 0$$

Ist endlich drittens $a_1^2 - 4b_0 = 0$, wie z. B. bei der Curve

$$y^3y^2 - 2a^2x^2y + a^4x - a^5 = 0$$

so werden die beiden Wurzeln (24) einander gleich. Da wir in diesem Falle noch keinen Schluss über die Lage der unendlichen Aeste machen können, so müssen wir noch weitere Glieder der Gleichung (22) in Betracht ziehen. Wir erhalten dann:

$$h^2x^{n-2} + (a_1h + a_2h^2)x^{n-3} + (b_0 + b_1h)x^{n-4} = 0$$

oder nach Division durch x^{n-4}:

$$h^2x^2 + (a_1h + a_2h^2)x + (b_0 + b_1h) = 0$$

Als Wurzeln dieser Gleichung finden wir, unter Berücksichtigung unserer Annahme, dass

$$a_1^2 - 4b_0 = 0$$

sein soll:

$$(25) \ldots x = \frac{-(a_1 + a_2h) \pm \sqrt{2h(a_1a_2 - 2b_1) + a_2^2h^2}}{2h}$$

Wie man sieht, sind diese Wurzeln nur für solche Werte des h reell, welche mit der Grösse $a_1a_2 - 2b_1$ dasselbe Zeichen haben, d. h. die unendlichen Aeste liegen auf derselben Seite der Asymptote. Da ferner beide Wurzeln stets dasselbe Vorzeichen haben, so

hat die Curve die Gestalt der Figur 6 und besitzt demnach im Unendlichen einen Rückkehrpunkt der zweiten Art. — Wie diese Untersuchungen weiter fortzusetzen sind, wenn noch weitere Coefficienten der Gleichung (21) verschwinden, ist leicht ersichtlich. Man wird stets finden, dass die Curve im Unendlichen entweder einen Rückkehrpunkt (erster oder zweiter Art), oder einen Selbstberührungspunkt oder endlich einen isolirten Punkt besitzt.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass auch in dem Falle, wo drei oder mehr der Asymptotenrichtungen zusammenfallen, die Lage der Curve in Bezug auf ihre Asymptoten in ganz ähnlicher Weise bestimmt werden kann.

Loebau, Westpreussen, im Juli 1893.

XXIV.

Ueber die Trisection des Winkels mittelst beliebiger fester Kegelschnitte.

Von

Dr. Stephan Glaser,

Oberlehrer am Falk-Realgymnasium zu Berlin.

In den letzten Heften des Archivs (II. Reihe, 10. Teil pag. 333 bis 336, 441—442, 11. Teil pag. 349—351) befindet sich eine Reihe von Mitteilungen des Herrn Panzerbieter, welche die Trisection des Winkels mittelst fester Kegelschnitte betreffen. Der Verfasser zeigt, dass und wie die Dreiteilung jedes Winkels mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel, der Hyperbel von der Excentricität 2 und der Ellipse von der Excentricität $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ausgeführt werden kann. In einer weiteren Abhandlung (Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Falk-Realgymnasiums zu Berlin, Ostern 1892) legt der Verfasser den Zusammenhang seiner Lösungen mit älteren Lösungen desselben Problems dar und fügt dann noch eine weitere Construction mittelst der festen Parabel hinzu. Bei allen diesen Lösungen spielt ein System von 4 Kreispunkten eine besondere Rolle, von denen 3 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Angeregt durch diese Untersuchungen, habe ich es unternommen, die sämtlichen durch das genannte System von Punkten gehenden Curven zweiten Grades einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen, in der Absicht, dadurch zu einer allgemeinen Lösung des Problems zu gelangen. In der Tat ist es gelungen, auf diesem Wege nachzuweisen, dass jede beliebig gegebene feste Curve zweiten Grades zur Trisection des Winkels benutzt werden kann, ein Resultat, welches die obigen Fälle der gleichseitigen Hyperbel u. s. w. als specielle Fälle in sich enthält.

§ 1.

Ableitung der allgemeinen Gleichung und Bestimmung des vierten Schnittpunktes mit dem Kreise. Figur 1.

Gegeben sei ein Kreis vom Radius r und auf der Peripherie desselben die Eckpunkte P_1, P_2, P_3 eines gleichseitigen Dreiecks. Machen wir den Mittelpunkt M des Kreises zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems und legen die positive x Axe durch den einen Punkt P_1, so sind die Coordinaten

$$P_1 = (r,\ 0),\quad P_2 = \left(-\frac{r}{2},\ \frac{r}{2}\sqrt{3}\right),\quad P_3 = \left(-\frac{r}{2},\ -\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$$

Die allgemeine Gleichung der Curven zweiten Grades lautet:

$$(1)\qquad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0$$

Soll die Curve durch P_1, P_2, P_3 gehen, so muss

$$a_{11}r^2+a_{13}r+a_{33}=0,$$

$$a_{11}\frac{r^2}{4}-a_{12}\frac{r^2}{2}\sqrt{3}+a_{22}\frac{3r^2}{4}-a_{13}\frac{r}{2}+a_{23}\frac{r}{2}\sqrt{3}+a_{33}=0,$$

$$a_{11}\frac{r^2}{4}+a_{12}\frac{r^2}{2}\sqrt{3}+a_{22}\frac{3r^2}{4}-a_{13}\frac{r}{2}-a_{23}\frac{r}{2}\sqrt{3}+a_{33}=0$$

sein. Subtraction der letzten beiden Gleichungen ergiebt

$$a_{23}=r\,.\,a_{12}$$

Addition derselben beiden Gleichungen liefert

$$a_{11}\frac{r^2}{2}+a_{22}\frac{3r^2}{2}-a_{13}r+2a_{33}=0$$

Stellt man die mit dem Factor 2 erweiterte erste Gleichung hinzu, so folgt durch Subtraction

$$a_{13}=-\frac{r}{2}(a_{11}-a_{22})$$

Endlich erhält man durch Einsetzen dieses Wertes in die erste Gleichung

$$a_{33}=-\frac{r^2}{2}(a_{11}+a_{22})$$

Die allgemeine Gleichung einer Curve zweiten Grades, welche durch die obigen 3 Punkte geht, lautet demnach:

$$(2)\quad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-\frac{r}{2}(a_{11}-a_{22})x+ra_{12}y-\frac{r^2}{2}(a_{11}+a_{22})=0$$

Wir bestimmen nun den vierten Schnittpunkt der Curve mit dem Kreise und substituiren

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

Es kommt dann nach kurzer Umformung

$$(a_{11} - a_{22})(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}) + 2a_{12}\sin\varphi(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}) = 0$$

woraus

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

Diese Beziehung gewährt die Möglichkeit a_{12} durch a_{11}, a_{22} und φ auszudrücken, wodurch sämtliche Coefficienten der Gleichung auf a_{11}, a_{22} und φ oder, nach Division mit a_{11}, auf den Quotienten $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ und auf Functionen des Winkels φ zurückgeführt wären. Bei fester Lage des vierten Schnittpunktes P_4 würden sie daher nur noch von dem Verhältniss $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ abhängig sein. Es ist vorteilhaft diese Ersetzung erst nach der Reduction auf die Hauptaxen vorzunehmen.

§ 2.

Transformation für den Fall einer von null verschiedenen Determinante. Figur 1.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit den Mittelpunktscurven, nehmen also an, dass die Determinante der quadratischen Form $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ von null verschieden sei. Um den Mittelpunkt zu finden, substituiren wir

$$x = p + \xi, \quad y = q + \eta$$

und suchen p und q so zu bestimmen, dass in der neuen Gleichung für ξ und η die Coefficienten des linearen Teiles verschwinden. Es muss dann

$$a_{11}p + a_{12}q = (a_{11} - a_{22})\frac{r}{4}$$

und

$$a_{12}p + a_{22}q = -a_{12}\frac{r}{2}$$

sein, woraus sich ergiebt:

$$\text{(4)} \qquad p = \frac{r}{4}\,\frac{(a_{11} - a_{22})a_{22} + 2a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad \text{und}$$

$$q = -\frac{r}{4}\,\frac{(a_{11}-a_{22})\,a_{12}+2a_{11}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^{\,2}}$$

Die Gleichung selbst wird:

$$a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2+a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2 - \frac{r}{2}(a_{11}-a_{22})p+r\,a_{12}q-\frac{r^2}{2}(a_{11}+a_{22})=0$$

Multipliciren wir die erste der Bedingungsgleichungen mit p, die zweite mit q, so erhalten wir durch Addition:

$$a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2=\frac{r}{4}(a_{11}-a_{22})p-\frac{r}{2}a_{12}q$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung ein, so kommt

$$a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2-\frac{r}{4}(a_{11}-a_{22})p+\frac{r}{2}a_{12}q-\frac{r^2}{2}(a_{11}+a_{22})=0$$

und mit Einsetzen der Werte von p und q nach wenigen Reductionen:

$$(5)\quad a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2 = \frac{r^2}{16}\cdot\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^{\,2}}\left[(3a_{11}+a_{22})^2-12\,a_{12}^{\,2}\right]$$

Es erübrigt jetzt noch eine Drehung um den gefundenen Mittelpunkt. Wir setzen zu dem Ende

$$\xi=\cos\psi\,.\,X-\sin\psi\,.\,Y$$
$$\eta=\sin\psi\,.\,X+\cos\psi\,.\,Y$$

und bestimmen den Winkel ψ durch die Bedingung, dass in der neuen Gleichung für X und Y das Glied mit XY wegfallen soll. Dann muss

$$a_{12}(\cos^2\psi-\sin^2\psi)=(a_{11}-a_{22})\cos\psi\sin\psi$$

sein, woraus

$$\frac{2\cos\psi\sin\psi}{\cos^2\psi-\sin^2\psi}=\operatorname{tg}(2\psi)=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

wird. Nun ist aber nach (3) auch

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

es muss also

$$\operatorname{tg}(2\psi)=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\quad\text{oder}$$

(6)

$$\psi=\frac{\varphi}{4}\quad\text{sein.}$$

Sämtliche Mittelpunktscurven zweiten Grades, welche durch dieselben 4 Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gehen, haben demnach gleiche Richtung der Hauptaxen, und zwar ist der Drehungswinkel gleich dem vierten Teile des Winkels, welchen der Radiusvector nach dem vierten Punkte P_4 mit der positiven $x$axe bildet. Trägt man nun einen Winkel gleich $\frac{\varphi}{2}$ im Punkte M an MP_1 nach unten hin an, so wird der ganze Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ von MP_1 trisecirt und von einer durch M zur gemeinsamen Axenrichtung der Kegelschnitte parallel gezogenen Geraden halbirt. Wäre man nun im Stande, aus den Dimensionen eines beliebig gegebenen Kegelschnitts und den Functionen des ebenfalls beliebig gegebenen Winkels $\frac{3}{2}\varphi$ oder $\frac{3}{4}\varphi$ die Coordinaten des Kreismittelpunktes M in Bezug auf die Hauptaxen des Kegelschnitts und den Radius r geometrisch construirbar auszudrücken, so wäre damit auch die Möglichkeit gewonnen, jeden Winkel mit Hülfe des festen Kegelschnitts zu trisecíren. Man brauchte nur durch M eine Parallele zur Hauptaxe zu ziehen und nach beiden Seiten den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ anzutragen. Der mit dem Radius r um M beschriebene Kreis würde dann den Kegelschnitt in einem Punkte P_1 derart treffen, dass der ganze Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ durch den Radiusvector MP_1 trisecirt wird. Ausserdem würde der Kreis den Kegelschnitt noch in 3 Punkten P_2, P_3, P_4 treffen, von welchen die beiden ersten mit P_1 die Ecken eines dem Kreise einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks bilden, während der letzte gemeinsamer Schnittpunkt des Kegelschnitts, des Kreises und des einen Schenkels von $\frac{3}{2}\varphi$ ist. Dieser letzte Umstand macht die Berechnung des Kreisradius selbst unnötig, da derselbe sich nach Construction des Mittelpunktes M durch Antragen des Winkels $\frac{3}{2}\varphi$ von selbst ergiebt. Wie die weitere Untersuchung zeigen wird, ist die angedeutete Reduction in der Tat allgemein durchzuführen und erstreckt sich auch auf den im nächsten Paragraphen zu behandelnden Fall der Parabel.

Wir haben noch Gleichung (5) zu transformiren. Wir erhalten:

$$\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4} + 2a_{12}\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4} + a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)X^2$$
$$+ \left(a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4} - 2a_{12}\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\cdot Y^2$$
$$= \frac{r^2}{16}\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\left[(3a_{11}+a_{22})^2 - 12a_{12}^2\right]$$

und, wenn wir nunmehr die am Schlusse von § 1. angeführte Ersetzung vornehmen:

$$(7)\quad \left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\cdot X^2+\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\cdot Y^2$$
$$-\frac{r^2}{16}\,\frac{a_{22}\cos^3\frac{\varphi}{2}\left[(3a_{11}+a_{22})^2-3(a_{11}-a_{22})^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

Dieselbe Substitution liefert für p und q die Werte:

$$(8)\quad \begin{cases} p=\dfrac{r}{8}\,\dfrac{(a_{11}-a_{22})\cos^2\frac{\varphi}{2}\left[2a_{22}+(a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)} \\ q=-\dfrac{r}{16}\,\dfrac{(3a_{11}-a_{22})(a_{11}-a_{22})\sin\varphi}{\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)} \end{cases}$$

§ 3.

Besondere Behandlung im Falle einer verschwindenden Determinante.

Wir kommen jetzt zu dem Falle, dass

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

ist. Setzen wir aus (3)

$$a_{12}=\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(a_{11}-a_{22})=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}\cdot(a_{11}-a_{22})}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}}$$

so wird nach Weglassung des Nenners $\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}\right)^2$:

$$a_{11}a_{22}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}\right)^2-(a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}=0$$

oder

$$-\left(a_{22}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\right)\left(a_{22}-a_{11}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}\right)=0$$

Es ist also entweder

$$a_{22}=a_{11}\cot^2\frac{\varphi}{4}\quad\text{oder}\quad a_{22}=a_{11}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$$

Wir bemerken, dass dieses dieselben Bedingungen sind, welche in der allgemeinen Gleichung (7) die Coefficienten von X^2 be-

ziehungsweise Y^2 und den Nenner der rechten Seite zum Verschwinden bringen. In diesem Falle ist der Quotient $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ entweder gleich $\cot^2\frac{\varphi}{4}$ oder gleich $\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{4}$. Beide Fälle sollen nun der Reihe nach behandelt werden.

A.

Ist erstens

$$a_{22} = a_{11}\cot^2\frac{\varphi}{4}$$

so ergiebt sich aus (3)

$$a_{12} = \tfrac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a_{11}}{2}\left(1 - \cot^2\frac{\varphi}{4}\right)\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$$

oder

$$a_{12} = -a_{11}\cot\frac{\varphi}{4}$$

Setzen wir diese Werte für a_{22} und a_{12} in die ursprüngliche Gleichung (2) ein, so erhalten wir nach kurzer Umformung und nach Division mit a_{11}:

$$\sin^2\frac{\varphi}{4}\,.\,x^2 - \sin\frac{\varphi}{2}\,.\,xy + \cos^2\frac{\varphi}{4}\,.\,y^2 + \frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,.\,x - \frac{r}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,.\,y - \frac{r^2}{2} = 0$$

Wir drehen nun das Axensystem um einen Winkel ψ, setzen wie früher

$$x = \cos\psi\,.\,\xi - \sin\psi\,.\,\eta$$
$$y = \sin\psi\,.\,\xi + \cos\psi\,.\,\eta$$

und bestimmen den Winkel ψ dieses Mal durch die Bedingung, dass in der neuen Gleichung der Coefficient von $\xi\eta$ verschwinden soll. Dann muss

$$-2\sin^2\frac{\varphi}{4}\,.\,\cos\psi\sin\psi + \sin\frac{\varphi}{2}\sin^2\psi - \sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\psi + 2\cos^2\frac{\varphi}{4}\sin\psi\cos\psi = 0$$

sein, oder

$$\sin(2\psi)\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos(2\psi) = \sin\left(2\psi - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

woraus sich ergiebt:

$$\psi = \frac{\varphi}{4}$$

Es weicht also auch bei der Parabel die Richtung der Hauptaxen von der Richtung des ursprünglichen Axensystems um denselben Winkel ab.

Da gleichzeitig mit dem Coefficienten von $\xi\eta$ auch derjenige von ξ^2 verschwindet, nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\eta^2 + \frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4} - 3\right) . \xi - \frac{r}{2}\sin\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4} - 1\right) . \eta - \frac{r^2}{2} = 0$$

oder

$$(9) \qquad \eta^2 + \frac{r}{2}\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right) . \xi - \frac{r}{2}\sin\left(\frac{3}{4}\varphi\right) . \eta - \frac{r^2}{2} = 0$$

Dieselbe kann auch in die Form gebracht werden:

$$\left[\eta - \frac{r}{4}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)\right]^2 + \frac{r}{2}\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)\left[\xi - \frac{r}{8}\frac{8 + \sin^2\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}\right] = 0$$

Verschiebt man endlich noch den Anfangspunkt des Coordinatensystems und setzt:

$$\eta = \frac{r}{4}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) + Y$$

$$\xi = \frac{r}{8}\frac{8 + \sin^2\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right)} + X$$

so kommt als Gleichung der auf ihre Hauptaxen bezogenen Parabel:

$$(10) \qquad Y^2 = -\frac{r}{2}\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) . X$$

Ferner sind die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Hauptaxen der Parabel:

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\frac{r}{8}\frac{8 + \sin^2\left(\frac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right)} \\ \mathfrak{Q} = -\frac{r}{4}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) \end{cases}$$

Da diese Formeln es gestatten, für jede beliebige Parabel aus den Dimensionen derselben und aus den Functionen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ die Coordinaten des Kreismittelpunktes M zu finden, so ist damit nachgewiesen, dass mit Hülfe einer jeden Parabel jeder beliebige Winkel trisecirt werden kann. Die Construction selbst wird im letzten Paragraphen zur Besprechung kommen.

Wir wenden uns nun zum zweiten Falle, begnügen uns aber mit der Angabe der Hauptformeln.

B.

Ist

$$a_{22} = a_{11}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}, \quad \text{so wird} \quad a_{12} = a_{11}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}$$

Die Gleichung heisst dann:

$$\cos^2\frac{\varphi}{4}\cdot x^2 + \sin\frac{\varphi}{2}\cdot xy + \sin^2\frac{\varphi}{4}\cdot y^2 - \frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot x + \frac{r}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot y - \frac{r^2}{2} = 0$$

Drehen wir um den Winkel $\frac{\varphi}{4}$, so kommt:

$$(12) \qquad \xi^2 - \frac{r}{2}\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)\cdot\xi + \frac{r}{2}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)\cdot\eta - \frac{r^2}{2} = 0$$

Wird schliesslich noch

$$\xi = \frac{r}{4}\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) + X$$

$$\eta = \frac{r}{8}\frac{8+\cos^2\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)}{\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)} + Y$$

gesetzt, so kommt die Schlussgleichung:

$$(13) \qquad X^2 = -\frac{r}{2}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)\cdot Y$$

und als Coordinaten des Kreismittelpunktes M

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\frac{r}{4}\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) \\ \mathfrak{Q} = -\frac{r}{8}\frac{8+\cos^2\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)}{\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)} \end{cases}$$

§ 4.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte. Figur 1.

Wir wenden uns nun wieder zurück zu dem allgemeinen Falle der Mittelpunktscurven. Bevor wir uns auf eine Discussion der dort aufgestellten Gleichung (7) einlassen können, ist es nötig eine Vorstellung von den verschiedenen Lagen des Mittelpunkts zu gewinnen und zu dem Zwecke den geometrischen Ort desselben abzuleiten.

Dazu dienen die Gleichungen (8). Bezeichnen wir den Quotienten $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ der Kürze halber mit z, so ist

$$p = \frac{r}{8} \frac{(1-z)\cos^2\frac{\varphi}{2}\left[2z+(1-z)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

$$q = -\frac{r}{8} \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}(3-z)(1-z)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

Dann wird

$$\frac{p}{q} = -\frac{2z+(1-z)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{(3-z)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \quad \text{und}$$

$$z = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(3p+q\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{q\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-2q+p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

ferner

$$1-z = \frac{-2\left(p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+q\right)}{N}; \quad 3-z = \frac{2q\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-3\right)}{N}$$

$$\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{N^2}\left(p^2\sin\frac{\varphi}{2}-2pq\cos\frac{\varphi}{2}-q^2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(3-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

sofern der Nenner von z mit N bezeichnet wird.

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck für q ein, so ergiebt sich

$$q = -\frac{r}{2} \frac{p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+q}{p^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-2pq-q^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

oder in gewöhnlichen Coordinaten als geometrischer Ort der Mittelpunkte:

$$(15) \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot x^2 - 2xy - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot y^2 + \frac{r}{2}\left(x \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + y\right) = 0$$

Von vornherein sind 4 Punkte bekannt, durche welche die Curve der Mittelpunkte gehen muss. Es sind dies: der Mittelpunkt M des gegebenen Kreises und die drei Punkte, in welchen sich je zwei gegenüberliegende Seiten des Kreisvierecks $P_1P_4P_2P_3$ und die Diagonalen desselben schneiden. Wir wollen den Schnittpunkt von P_1P_4 und P_3P_2 mit Q, den von P_2P_4 und P_3P_1 mit R und den von P_1P_2 und P_3P_4 mit S bezeichnen.

Es ist für die weitere Untersuchung wünschenswert, die Coordinaten dieser 4 Punkte und die denselben entsprechenden Werte von z zu kennen. Für den Punkt M ergiebt sich sogleich aus (8) der Wert $z = 1$.

Für die andern Punkte ergiebt directe Berechnung aus der Figur die Coordinaten:

$$Q = \left(-\frac{r}{2}, \tfrac{3}{2} r \cot\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$R = \left(r\frac{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{r\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}\right)$$

$$S = \left(r\frac{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} - 2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{r\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}}\right)$$

Um die entsprechenden Werte von z zu finden, hätte man diese Ausdrücke in Verbindung zu setzen mit (8). Man kann jedoch auch durch die Ueberlegung zum Ziele gelangen, dass für die betreffenden Werte von z die rechte Seite in Gleichung (7) null sein muss, da in allen 3 Fällen die Curve in 2 sich schneidende gerade Linien übergeht. Die rechte Seite von (7) verschwindet aber erstens für $a_{22} = 0$, dann für zwei andere Werte, die sich aus der Gleichung

$$(3a_{11} + a_{22})^2 - 3(a_{11} - a_{22})^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = 0$$

ergeben. Einsetzung dieser Werte in die Gleichungen (8) und Vergleichung der Resultate mit den obigen Ausdrücken für die Coordinaten würde dann die Zugehörigkeit der verschiedenen Werte ergeben. Wir beschränken uns auf die Angabe der Resultate:

für M ist $z = 1$, für Q ist $z = 0$, für R ist

$$s = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1}$$

und für S ist

$$s = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1}$$

Um den Mittelpunkt des geometrischen Orts zu bestimmen, setzen wir

$$x = k + \xi, \quad y = l + \eta$$

Die Bedingungen für k und l heissen dann:

$$k\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - l = -\frac{r}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

$$k + l\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{4}$$

woraus sich ergiebt:

(16) $$k = \frac{r}{4}\cos\varphi \quad \text{und} \quad l = \frac{r}{4}\sin\varphi$$

Der Mittelpunkt liegt also auf dem Radiusvector nach P_4, um $\frac{r}{4}$ von M entfernt.

Die Gleichung wird:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\xi^2 - 2\xi\eta - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\eta^2 + \frac{r^2}{16}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\varphi\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 1\right) = 0$$

Nun muss noch, um die Reduction auf die Hauptaxen zu vollenden, eine Drehung der Axen vorgenommen werden. Wir substituiren wiederum

$$\xi = \cos\psi \cdot X - \sin\psi \cdot Y$$
$$\eta = \sin\psi \cdot X + \cos\psi \cdot Y$$

Die Bedingungsgleichung für ψ wird dann:

$$-4\sin\psi\cos\psi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 2\cos^2\psi + 2\sin^2\psi = 0$$

woraus

$$\operatorname{tg}(2\psi) = -\cot\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\left(90^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

oder

(17) $$\psi = 45^0 + \frac{\varphi}{4}$$

sich ergiebt.

Die Gleichung selbst wird zu:

(18)
$$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{16} \sin\frac{\varphi}{2} \cos\varphi \left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 1\right) \quad \text{oder}$$
$$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{16} \sin(\tfrac{3}{2}\varphi)$$

Der geometrische Ort der Mittelpunkte ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Axenrichtung von der Hauptaxenrichtung der sämtlichen durch die angenommenen 4 Kreispunkte gehenden Kegelschnitte um 45^0 abweicht, deren Asymptoten folglich dieser parallel laufen. Der eine Zweig dieser Hyperbel geht durch den Kreismittelpunkt M, der andere durch die Punkte Q, R und S.

Es tritt nun für die weitere Untersuchung die Notwendigkeit ein, in Betreff des Winkels φ besondere Annahmen zu machen. Wie man sich leicht aus der Figur überzeugt, ist es in allen Fällen, in welchen der Punkt P_4 nicht im ersten Sextanten (mit Einschluss der Grenzwerte $\varphi = 0$ und $\varphi = 60^0$) liegt, mit Hülfe einer blossen Aenderung des Coordinatensystems möglich, die Aufgabe auf diesen Fall zu reduciren. Wir dürfen uns daher unbeschadet der Allgemeinheit im Folgenden auf die Voraussetzung, dass φ zwischen 0 und 60^0 liegt und auf die beiden Grenzfälle $\varphi = 0$ und $\varphi = 60^0$ beschränken. Ist $0 < \varphi < 60^0$, so ist $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1 < 0$. Daraus folgt, dass sowol für R wie auch für S der zugehörige Wert von z negativ ist. Bildet man die Differenz dieser Werte, so ergiebt sich der Ausdruck

$$\frac{8\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1\right)\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1\right)}$$

Derselbe ist jedenfalls negativ, woraus zu folgern ist, dass man auf dem Wege von 0 nach $-\infty$ von Q aus zuerst zum Punkte S und dann erst zum Punkte R gelangt.

Dem Werte $z = 1$ entspricht, wie schon gesagt, der Punkt M; die Curve fällt in diesem Falle mit dem gegebenen Kreise zusammen. Zufolge der Stetigkeit lässt sich daraus schon schliessen, dass sämtlichen Punkten des durch M gehenden Hyperbelzweiges Ellipsen

entsprechen werden. Rückt der Mittelpunkt von M aus in der Richtung MT immer weiter, so werden die Dimensionen der Ellipsen beständig grösser, bis dieselben schliesslich in die in § 3. unter A. behandelte Parabel übergehen. Daraus ist zu entnehmen, dass dem auf dem Aste MT in unendlicher Ferne gelegenen Punkte der Wert

$$z = \cot^2 \frac{\varphi}{4}$$

entspricht. Rückt der Mittelpunkt von M aus in der Richtung MU immer weiter, so gelangen wir in derselben Weise für einen unendlich fernen Punkt zur Parabel B in § 3., zu welcher der Wert

$$z = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}$$

gehört. Während demnach z die Werte von $\cot^2 \frac{\varphi}{4}$ herunter bis zu $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}$ durchläuft, durchwandert der Mittelpunkt den ganzen unteren Zweig der Hyperbel und zwar in der Richtung TMU. Lassen wir jetzt z weiter abnehmen, so erscheint der Mittelpunkt wieder in sehr grosser Entfernung auf dem Aste SV, welcher dem Aste MU entgegengesetzt gerichtet ist und mit ihm zur selben Asymptote gehört. Mit abnehmendem z nähert der Mittelpunkt sich allmählich dem Punkte Q, den er für $z = 0$ erreicht. Auf dem weitern Wege gelangen wir dann bei

$$z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1}$$

zum Punkte S, bei

$$z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1}$$

zum Punkte R. Lassen wir z noch weiter abnehmen, so bewegt sich der Mittelpunkt über R hinaus und erreicht für $z = -\infty$ einen bestimmten Punkt L, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche Axensystem sich aus (8) mit Leichtigkeit ergeben als:

$$p = \frac{r}{2}\left(2\cot^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) \quad \text{und} \quad q = \frac{r}{2}\cot\frac{\varphi}{2}$$

Zu diesem Punkte gelangen wir auch, wenn wir z mit 1 beginnend

über $\cot^2\frac{\varphi}{4}$ hinaus wachsen lassen. Für $\cot^2\frac{\varphi}{4}$ verschwand der Mittelpunkt in der Richtung MT in unendlicher Ferne; nimmt z weiter zu, so erscheint derselbe wieder auf dem entgegengesetzt gerichteten Aste RW und rückt mit wachsendem z auf den Punkt L los, den er bei $z = +\infty$ erreicht. Wenn wir die Mittelpunkte in der zuerst angenommenen Richtung von Q ,über S und R hinaus weiter verfolgen bis in's Unendliche, so ergiebt sich demnach für die entsprechende Reihe der Werte von z beim Punkte L eine Unstetigkeit, indem auf ein unendlich grosses negatives z unmittelbar ein unendlich grosses positives folgt.

Welche Gestalt und Dimensionen in jedem einzelnen Falle die Curve hat, wird die allgemeine Discussion der Gleichung (7) im nächsten Paragraphen feststellen.

Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der beiden Grenzfälle $\varphi = 60^0$ und $\varphi = 0^0$.

Ist $\varphi = 60^0$, so wird der Drehungswinkel $\psi = 60^0$; die Hauptaxe der Hyperbel stimmt also überein mit dem Radiusvector zum Punkte P_4. Der Mittelpunkt der Curve liegt nach wie vor in der Entfernung $\frac{r}{4}$ von M. Die Gleichung selbst wird:

$$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{16}$$

Der eine Zweig geht wieder durch M, der andere durch Q, S und R. Bei dem einen durchläuft z die Werte von $\cot^2(15^0)$ bis $\mathrm{tg}^2(15^0)$, bei dem andern die von $\mathrm{tg}^2(15^0)$ durch die Null hindurch bis $-\infty$ und von $+\infty$ zurück nach $\cot^2(15^0)$. Bei Q ist wieder $z = 0$, bei S ist $z = -1$ und bei R ist $z = \mp\infty$. Der ganze Unterschied zwischen diesem Falle und dem allgemeinen besteht darin, dass der Punkt L, in welchem der Sprung von $-\infty$ auf $+\infty$ stattfindet, in den Punkt R hineingerückt ist.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn wir annehmen, dass $\varphi = 0$ ist, dass also die Curven zweiten Grades und der Kreis sich in P_1 berühren. Die Gleichung des geometrischen Orts ist dann:

$$X^2 - Y^2 = 0$$

und stellt 2 sich senkrecht schneidende gerade Linien dar. Da der Drehungswinkel in diesem Falle 45^0 beträgt, so sind diese beiden Linien die $x$axe selbst und eine im Abstande $\frac{r}{4}$ zur $y$axe gezogene

Parallele. Aus (8) ergiebt sich aber für die Coordinaten des Mittelpunktes

$$p = \frac{r}{4}(1-z)$$

und $q = 0$, woraus hervorgeht, dass sämtliche Mittelpunkte auf der x axe allein liegen, dass also die genannte Senkrechte gar nicht in Betracht kommt. Diese Senkrechte ist entstanden aus den beiden Aesten, welche sich erstrecken vom Scheitel des durch M gehenden Zweiges in der Richtung MU in's Unendliche und auf der entgegengesetzten Seite vom Unendlichen zurück über Q zum Scheitel des andern Zweiges. Man würde die zu diesen beiden Aesten gehörenden Werte von z finden aus den Gleichungen (8), wenn man p und q gleich den Coordinaten der beiden Scheitelpunkte setzte. Je näher die beiden Scheitelpunkte rücken, um so kleiner wird das Intervall von z werden. In unserm Falle, wo die beiden Scheitel zusammenfallen, ist das Intervall zu null geworden.

Was die Art und Gestalt der einzelnen Curven in diesem Falle angeht, so wird das Nähere hierüber im Anschluss an die Discussion der allgemeinen Gleichung folgen.

§ 5.

Allgemeine Discussion der Gleichung. Figur 1.

Führen wir in Gleichung (7) für $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ die Bezeichnung z ein, so wird dieselbe:

$$(19)\quad \left(\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{4}\right).X^2 + \left(z\cos^2\frac{\varphi}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{4}\right).Y^2 = \frac{r^2}{16}\,\frac{z\cos^2\frac{\varphi}{2}\left[(3+z)^2 - 3(1-z)^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

Der Ausdruck $(3+z)^2 - 3(1-z)^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ verschwindet, wie wir in § 4. sahen, für die Werte

$$z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1} \quad \text{und} \quad z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1}$$

oder für die Punkte S und R. Zwischen diesen Punkten wird derselbe also das entgegengesetzte Zeichen von dem haben, welches er für alle übrigen Werte von z besitzt. Da für $z = 0$, beim Punkte Q, der Ausdruck gleich $3\left(3-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$ also positiv ist, so ist zu schliessen, dass derselbe zwischen S und R negativ, für alle übrigen Lagen dagegen positiv ist.

$\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\sin^2\frac{\varphi}{4}$ ist positiv, sofern $z < \cot^2\frac{\varphi}{4}$ ist, also für den ganzen durch M gehenden Zweig und für den andern vom Unendlichen über Q, S, R bis zum Punkte L.

$z\cos^2\frac{\varphi}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{4}$ ist positiv, solange $z > \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{4}$ ist, d. h. für den ganzen durch M gehenden Zweig und für den Teil des andern, welcher sich vom Punkte L in der Richtung Q, S, R bis in's Unendliche erstreckt.

Bezeichnen wir diese 3 Ausdrücke der Kürze halber beziehungsweise mit γ, α, β, so lautet die Gleichung:

$$20) \qquad \alpha \,.\, X^2 + \beta \,.\, Y^2 = \frac{r^2}{16} z \,.\, \cos^3\frac{\varphi}{2} \,.\, \frac{\gamma}{\alpha\beta}$$

Wir gehen nun die einzelnen Intervalle für z der Reihe nach durch:

1. $z = \cot^2\frac{\varphi}{4}$; $\alpha = 0$. In diesem Falle ist der Mittelpunkt in der Richtung MT unendlich weit zu denken; die Curve ist die in § 3. unter A angegebene Parabel, welche als Grenze einer Schar von Ellipsen mit beständig zunehmenden Axen anzusehen ist, deren einer Scheitel im Endlichen geblieben, während der andere in unendliche Ferne gerückt ist.

2. $\cot^2\frac{\varphi}{4} > z > \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{4}$. Dann ist $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $z > 0$, $\gamma > 0$. Die Gleichung stellt demnach eine Ellipse dar. Rückt der Mittelpunkt aus dem Unendlichen in der Richtung TM auf M zu, so erscheint auch der andere Scheitel der Ellipse wieder, die Dimensionen der Halbaxen werden allmählich kleiner; doch ist, wie der Augenschein lehrt, die erste (zur Xaxe gehörige) beständig grösser als die zweite (zur Yaxe gehörige). Der Unterschied wird aber immer geringer, bis schliesslich für $z = 1$, im Punkte M,

die Halbaxen einander gleich werden und die Ellipse in den gegebenen Kreis übergeht. Nimmt z noch weiter ab, rückt der Mittelpunkt über M hinaus in der Richtung MU weiter, so nehmen die Dimensionen der Halbaxen wieder zu, aber in der Weise, dass die zweite die grössere wird, und der Unterschied beider beständig zunimmt.

3. $z = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$; $\beta = 0$. Der Mittelpunkt liegt in der Richtung MU unendlich weit. Die Curve ist die in § 3. B behandelte Parabel.

4. $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4} > z > 0$. Dann ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z > 0$, $\gamma > 0$. Die Gleichung stellt Hyperbeln dar mit reeller zweiter Axe. Die zuletzt angeführte Parabel kann auch angesehen werden als Grenze einer Schar von Hyperbeln mit wachsenden Dimensionen, deren einer Scheitel im Endlichen bleibt, whhrend der andere in's Unendliche rückt. Wird $z < \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$ d. h. erscheint der Mittelpunkt auf dem andern Zweige des geometrischen Orts oberhalb von Q wieder, so kommt auch der andere Zweig der Hyperbel wieder znm Vorschein. Der erste kommt ihm von unten entgegen, die Entfernung der Scheitel wird immer kleiner, bis diese endlich zusammenstossen.

5. $z = 0$. Dann ist der Mittelpunkt in den Punkt Q gerückt, die Hyperbel übergegangen in das Paar gerader Linien P_1P_4 und P_3P_2.

6. $0 > z > \sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1}$. Dann ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z < 0$, $\gamma > 0$. Wir bekommen also auf dem ganzen Wege von Q bis S Hyperbeln mit reeller erster Axe. Die beiden Zweige, welche vor Q von oben und unten auf einander zurückten und endlich in Q zusammentrafen, entfernen sich also nachher seitlich von einander. Die vier Kreispunkte, die vorher sämtlich auf einem Zweige der Hyperbel lagen, verteilen sich nachher auf beide und zwar liegen P_1, P_4 auf dem einen und P_2, P_3 auf dem andern. Anfänglich liegen sie sämtlich unterhalb der Xaxe; allmählich jedoch rückt diese gegen sie vor und tritt schliesslich zwischen dieselben. Die Curven selbst, welche gleich nach Q eine

geringe Grösse der reellen Halbaxe besitzen, und deren Asymptoten mit der Xaxe einen ziemlich grossen Winkel bilden, nehmen nach und nach eine weniger ungewöhnliche Gestalt an. Da $\sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1}$ unter der für den Winkel φ gemachten Voraussetzungen kleiner als -1, so passiren wir auf dem Wege von Q nach S auch die gleichseitige Hyperbel. Setzen wir nämlich in (19) für z den Wert -1 ein, so resultirt die Gleichung:

$$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{4}\cos(\tfrac{3}{2}\varphi)$$

7. $z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1}$; $\gamma = 0$. Rückt der Mittelpunkt an S heran, so nähern sich die beiden Hyperbelzweige wieder und treffen im Punkte S zusammen. Die Curve geht in die beiden Geraden P_1P_2 und P_3P_4 über.

8. $\sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1} > z > \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1}$. Dann ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z < 0$, $\gamma < 0$. Die Gleichung liefert wiederum Hyperbeln mit reeller zweiter Axe. Die beiden Zweige, die sich von rechts und links näherten und in S zusammentrafen, entfernen sich also wieder nach oben und unten von einander. Die vier Kreispunkte sind wieder auf beide Zweige verteilt, aber dieses Mal liegen P_4, P_2 auf dem einen oberen, P_1, P_3 auf dem anderen unteren. Bei weiterem Voranschreiten des Mittelpunktes entfernt sich die reelle Axe, welche erst zwischen den Punkten hindurchgieng, allmählich von diesen; die Punkte rücken sämtlich nach der negativen Seite der X. Nachdem die Entfernung der Scheitel ein gewisses Maximum erreicht hat,, nimmt dieselbe wieder ab, bis endlich im Punkte R die Scheitel zum dritten Male zusammenfallen.

9. $z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1}$; $\gamma = 0$. Die Gleichung liefert die beiden Geraden P_1P_3 und P_4P_2.

10. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1} > z > -\infty$. Hierfür ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z < 0$, $\gamma > 0$. Wir erhalten demnach Hyperbeln mit reeller erster Axe. Die Scheitel weichen also vom Punkte R ab wieder nach rechts und links auseinander. Die vier Kreispunkte liegen wieder auf demselben Zweige, wie es vor Q bereits der Fall gewesen war.

11. $z = -\infty$ oder $+\infty$ liefert, wie schon im vorigen Paragraphen angegeben wurde, eine ebensolche Hyperbel, deren Mittelpunkt L genannt worden war.

12. $\infty > z > \cot^2\frac{\varphi}{4}$. So ist $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $z > 0$, $\gamma > 0$. Also auch für den weiteren Lauf des Mittelpunktes von L in's Unendliche ergeben sich Hyperbeln mit reeller erster Axe. Der eine Zweig rückt immer weiter fort, der andere bleibt im Endlichen und nähert sich immer mehr der Parabel A in § 3., die er für einen unendlich fernen Mittelpunkt erreicht.

Damit ist die allgemeine Discussion der Gleichung beendet, und können wir uns jetzt der Besprechung der beiden Grenzfälle zuwenden.

§ 6.

Discussion der beiden Grenzfälle.

Wie schon in § 4. bei Besprechung des geometrischen Orts der Mittelpunkte bemerkt wurde, unterscheidet sich der erste der beiden Grenzfälle im Wesentlichen nicht von dem allgemeinen Falle. Der einzige Unterschied besteht darin, dass z den Wert -1 nicht zwischen Q und S, sondern in S selbst annimmt, und dass der Punkt L mit R zusammenfällt.

Auch die Gestalt der verschiedenen Curven in den einzelnen Intervallen ist genau dieselbe, wie in § 5. auseinandergesetzt wurde. Die gleichseitige Hyperbel entspricht dem Punkte S.

Sehr verschieden wird aber die Sache in dem Falle, dass $\varphi = 0$ ist. Wir wissen schon, dass dann sämtliche Mittelpunkte auf der Xaxe liegen, und die Axenrichung mit der Richtung der Coordinaten übereinstimmt. Die Gleichung der Curven lautet hierfür:

$$X^2+z\,.\;Y^2=\frac{r^2}{16}(3+z)^2$$

und für den Mittelpunkt kommt:

$$p=\frac{r}{4}(1-z)$$

Ist $z>1$, so wird p negativ, d. h. der Mittelpunkt liegt auf der negativen Seite der X. Die Curve selbst ist in diesem Falle eine Ellipse. Wächst z, so rückt der Mittelpunkt nach links immer weiter fort, um für $z=\infty$ im Unendlichen zu verschwinden. Die Ellipse geht dabei in eine Parabel über, deren Gleichung auf den Scheitelpunkt P_1 bezogen lautet:

$$Y^2=-\frac{r}{2}X$$

Nähert sich umgekehrt z dem Werte 1, so rückt der Mittelpunkt nach M, beide Halbaxen werden kleiner, und der Unterschied zwischen der bisher grösseren ersten Axe und der zweiten wird beständig geringer, bis für $z=1$ der Mittelpunkt auf M fällt, und die Ellipse in den gegebenen Kreis übergeht.

Nimmt z noch weiter ab, so erhalten wir wiederum Ellipsen, doch ist jetzt die zweite Halbaxe die grössere, und zwar wächst dieselbe sehr schnell über jedes Mass hinaus, während die erste langsam weiter abnimmt und sich allmählich dem Werte $\frac{3}{4}r$ nähert.

Für $z=0$ ist die zweite Axe unendlich gross geworden, die erste hat den Wert $\frac{3}{4}r$ erreicht, und aus der Ellipse ist ein Paar paralleler zur Xaxe senkrechter Geraden geworden, nämlich die Gerade P_2P_3 und die im Punkte P_1 an den Kreis gelegte Tangente. Der Mittelpunkt liegt dann auf der positiven Seite der X in der Entfernung $\frac{r}{4}$ von M, und die Gleichung in Bezug auf denselben lautet:

$$X^2=\frac{9}{16}r^2 \quad \text{oder} \quad X=\pm\frac{3}{4}r$$

Dieses Paar paralleler Linien ist anzusehen als Grenze der Ellipsen und gleichzeitig als Grenze der zweiten Parabel, die sich bei jedem von null verschiedenen Werte von φ durch die vier Kreispunkte legen lässt. In der Tat ergiebt die Betrachtung der unter (14) angegebenen Coordinaten des Kreismittelpunktes in Bezug auf die Axen der Parabel, dass für ein abnehmendes φ der Scheitel der Parabel in's Unendliche rückt.

Dieses selbe Paar paralleler Linien ist aber drittens auch anzusehen als Grenze einer Schar von Hyperbeln, zu der wir nunmehr bei weiterem Fortschreiten des Mittelpunktes gelangen. Die beiden parallelen Geraden biegen sich gewissermassen nach rechts und links um, während der bewegliche linke Scheitel sich dem für alle bisherigen Curven festen rechten Scheitel P_1 nähert.

Auf diesem Wege passiren wir auch die gleichseitige Hyperbel bei $z = -1$. Bei $z = -3$ ist der Mittelpunkt nach P_1 gerückt, die beiden Scheitel sind zusammengefallen, und die Curve hat sich verwandelt in das Paar gerader Linien P_1P_2 und P_1P_3.

Wird z noch kleiner, so bekommen wir wieder Hyperbeln mit reeller erster Axe. Der Mittelpunkt und mit ihm der ganze rechte Zweig rückt immer weiter fort, der linke Zweig dagegen bleibt im Endlichen und nähert sich immer mehr der Parabel, mit der wir die Betrachtung begonnen; er erreicht dieselbe für $z = -\infty$, wenn der Mittelpunkt in's Unendliche gerückt ist.

§ 7.

Weitere Umformung der allgemeinen Gleichung.

Wir treten jetzt an die in § 2. angedeutete Aufgabe näher heran, aus den Dimensionen eines gegebenen Kegelschnitts und den Functionen des Winkels φ die Coordinaten von M und den Radius r zu berechnen.

Von grösster Wichtigkeit für die Gestalt einer jeden Curve ist das Verhältniss der Coefficienten der Gleichung. Wir wollen dieses Verhältniss in (19) einführen und setzen zu dem Zwecke

$$z\cos^2\frac{\varphi}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{4} = u\left(\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right) \tag{21}$$

Dann wird

$$z = \frac{u\cos^2\frac{\varphi}{4} + \sin^2\frac{\varphi}{4}}{\cos^2\frac{\varphi}{4} + u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$$

Ferner wird

$$\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\sin^2\frac{\varphi}{4} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{4} + u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$$

und

$$z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}=\frac{u\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (19) ein, so erhalten wir zunächst:

$$(22)\quad X^2+u\,.\,Y^2=\frac{r^2}{16}\,\frac{u\cos^2\frac{\varphi}{4}+\sin^2\frac{\varphi}{4}}{u}\times$$
$$\cdot\left[\left[1+2\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\left(1+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\right]^2-3(1-u)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

woraus sich nach entsprechender Transformation die Gleichung

$$X^2+u\,.\,Y^2=\frac{r^2}{32u}\left[(u^2+14u+1)(u+1)+(u-1)^3\cos(\tfrac{3}{2}\varphi)\right]$$

oder auch

$$(23)\quad X^2+u\,.\,Y^2=\frac{r^2}{16u}\left[u(u+3)^2\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)+(3u+1)^2\sin^2(\tfrac{3}{4}\varphi)\right]$$

ergiebt. Die rechte Seite der Gleichung enthält ausser r und u nur Functionen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$.

Wir müssen jetzt die Coordinaten von M in Bezug auf die Hauptaxen der Curve berechnen. Unter (8) hatten wir die Coordinaten des Mittelpunktes O der Curve in Bezug auf das ursprüngliche System angegeben. Dieselben Ausdrücke stellen daher, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen, die Coordinaten des Kreismittelpunktes in Bezug auf ein Axensystem dar, welches durch den Mittelpunkt der Curve parallel zu dem ursprünglichen System gezeichnet wird. Wir suchen aber die Coordinaten von M in Bezug auf das Hauptaxensystem der Curve, welches gegen das vorige um $\frac{\varphi}{4}$ gedreht ist. Nennen wir diese $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, so ist:

$$(24)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{P}&=-p\cos\frac{\varphi}{4}-q\sin\frac{\varphi}{4}\\ \mathfrak{Q}&=p\sin\frac{\varphi}{4}-q\cos\frac{\varphi}{4}\end{aligned}$$

Bevor wir hierin die Ausdrücke für p und q einsetzen, müssen wir dieselben erst transformiren, indem wir einmal den Quotienten

$\frac{a_{22}}{a_{11}}$ durch z und dann z durch den Ausdruck $\frac{u\cos^2\frac{\varphi}{4}+\sin^2\frac{\varphi}{4}}{\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$ ersetzen. Es ergiebt sich dann:

$$p = \frac{r}{8u}(1-u)\left[2(u-1)\cos^2\frac{\varphi}{2}+(u+1)\cos\frac{\varphi}{2}+1-u\right]$$

(25)

$$q = -\frac{r}{8u}(1-u)\left[2(1-u)\cos\frac{\varphi}{2}+1+u\right]\sin\frac{\varphi}{2}$$

Substituiren wir diese Werte in die Gleichung (24) und ersetzen die Functionen des halben Winkels durch die des vierten Teils, so ergiebt sich nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder

$$\mathfrak{P} = -\frac{r}{4}(1-u)\cos\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4}-3\right)$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{r}{4u}(1-u)\sin\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4}-1\right)$$

oder

(26) $$\mathfrak{P} = -\frac{r}{4}(1-u)\cos(\tfrac{3}{4}\varphi) \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{r}{4u}(1-u)\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Auch diese Ausdrücke enthalten nur r, u und Functionen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$. Da dasselbe für die rechte Seite der Gleichung (23) gilt, so ist damit nachgewiesen, dass in der Tat aus den Dimensionen einer gegebenen Mittelpunktscurve zweiten Grades mit Hülfe des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ die Coordinaten des zugehörigen Kreismittelpunkts M und der Radius r des Kreises gefunden werden können.

Da dasselbe, wie wir früher nachgewiesen haben, aber auch für die Parabel gilt, so ist damit gezeigt, dass jede beliebige Curve zweiten Grades zur Trisection des Winkels verwendet werden kann.

Wie sich im einzelnen Falle die geometrische Construction gestaltet, wird in den folgenden Paragraphen eingehend erörtert worden.

§ 8.

Die Trisection des Winkels mittelst fester Ellipsen. Figur 2.

Nehmen wir an, dass die Ellipse, welche zur Trisection verwendet werden soll, die Halbaxen a und b hat, so lautet die Gleichung derselben:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{oder} \quad X^2+\frac{a^2}{b^2}Y^2=a^2$$

Soll die Gleichnng (23) diese Curve darstellen, so muss

$$u=\frac{a^2}{b^2} \quad \text{und}$$

$$a^2=\frac{r^2}{16a^2b^4}\left[a^2(a^2+3b^2)^2\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)+b^2(3a^2+b^2)^2\sin^2(\tfrac{3}{4}\varphi)\right]$$

(ein, woraus

$$r^2=\frac{16a^4b^4}{a^2(a^2+3b^2)^2\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)+b^2(3a^2+b^2)^2\sin^2(\tfrac{3}{4}\varphi)} \tag{27}$$

wird. Ferner ergiebt sich aus (26) für die Coordinaten von M:

$$\mathfrak{P}=\frac{r}{4}\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{Q}=-\frac{r}{4}\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi) \tag{28}$$

Diese Formeln ermöglichen es, aus den Halbaxen a und b zu jedem beliebigen Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ den Radius r und den Punkt M zu finden.

Die Construction selbst würde freilich, ohne besondere Voraussetzungen in dieser Weise ausgeführt, recht complicirt sein und müsste für jeden neuen Winkel von Anfang bis zu Ende wiederholt werden. Wenn man dagegen zur Construction Ellipsen mit bestimmtem, in Zahlen angegebenem Verhältniss der Halbaxenquadrate verwendet, so ergiebt sich für die Construction unter Umständen eine wesentliche Vereinfachung.

Unseres Wissens findet sich die erste Angabe über die Trisection mittelst einer Ellipse in dem dritten Artikel von Panzerbieter. Die benutzte Ellipse hat die Excentricität $\sqrt{\frac{2}{3}}$, es ist also

$$\frac{a^2}{b^2}=3$$

Unsere Formeln ergeben für diesen Fall:

$$r^2=\frac{12a^2}{27\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)+25\sin^2(\tfrac{3}{4}\varphi)}$$

$$\mathfrak{P}=\frac{r}{2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{Q}=-\frac{r}{6}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Der Verfasser selbst nennt seine Construction weniger einfach. In der Tat ist dieselbe schon ziemlich verwickelt und leidet an dem Uebelstande, dass sie für jeden neuen Winkel von Anfang an wieder-

holt werden muss. Der folgende Weg führt in einfacherer Weise zum Ziele.

Man construire zur gegebenen Ellipse eine concentrische mit den Halbaxen $\frac{3}{5}a$ und $\frac{6}{5}b$, deren Gleichung also

$$\frac{X^2}{\frac{4a^2}{9}} + \frac{Y^2}{\frac{36}{25}b^2} = 1$$

lautet. Trägt man jetzt in O an die positive Seite der Abscissen nach unten hin den Winkel $\frac{1}{4}\varphi$ an und verlängert die Linie bis zum Schnitte mit der Ellipse, so findet sich das Quadrat des zugehörigen Radiusvector gleich $\frac{12a^2}{27\cos^2(\frac{3}{4}\varphi)+25\sin^2(\frac{3}{4}\varphi)}$. Der Radiusvector stellt also direct den Kreisradius r dar. Wenn man dann durch die Mitte des Radiusvectors r eine Parallele zur Yaxe, durch den Endpunkt des ersten Sechstels eine Parallele zur Xaxe zieht, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Mittelpunkte M. Man hat also nach dieser Construction nur den jedesmaligen Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ anzutragen, den gefundenen Radiusvector in 6 gleiche Teile zu teilen und durch die entsprechenden Teilpunkte Parallele zu den Axen zu ziehen.

In ähnlicher Weise wird sich die Construction bei andern Werten von $\frac{a^2}{b^2}$ einrichten lassen.

Auch im allgemeinen Falle lässt sich eine Ellipse derart angeben, dass der unter dem Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ gezogene Radiusvector den Kreisradius r darstellt. Die Gleichung derselben lautet:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{4\,al^2}{a^2+3l^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{4a^2b}{3a^2+b^2}\right)^2} = 1$$

Obwol die Construction dieser Ellipse nicht mehr Schwierigkeiten bietet als die derjenigen Curve, von welcher nachher die Rede sein wird, so ziehen wir doch für den allgemeinen Fall eine andere Methode der Lösung vor, da es auf dem ersten Wege noch wieder besonderer complicirter Constructionen bedarf, um aus dem gefundenen r nun wirklich die Coordinaten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zu gewinnen.

Die Sache gestaltet sich einfacher, wenn man statt der obigen Ellipse den geometrischen Ort der Kreismittelpunkte benutzt. Man hat dann für jeden einzelnen Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ nur noch die Richtung von OM zu bestimmen und findet den Kreismittelpunkt als Durchschnittspunkt des geometrischen Orts mit einer in dieser Richtung gezogenen

Geraden. Den Radius r erhält man dann ganz von selbst, wenn man in M an eine zur positiven Xaxe parallel gezogene Gerade nach oben den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ anträgt und den freien Schenkel bis zum Schnitt mit der Ellipse verlängert. Wir finden diesen geometrischen Ort der Kreismittelpunkte, wenn wir die Werte von $r\cos(\frac{1}{2}\varphi)$ und $r\sin(\frac{1}{2}\varphi)$, die sich aus (28) ergeben, in die Gleichung (27) einsetzen. Es ergiebt sich dann die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{X}^2}{\left[\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}\right]^2}+\frac{\mathfrak{Y}^2}{\left[\frac{b(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}\right]^2}=1 \tag{29}$$

Was nun die Construction dieser Ellipse angeht, so wollen wir zunächst die Annahme machen, dass $a > b$ ist. Der Brennpunkt F liegt dann auf der Xaxe in der Entfernung $\sqrt{a^2-b^2}$ von 0. Berücksichtigen wir ferner die Darstellungen

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+3b^2}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}+b^2}$$

und

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3a^2+b^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{4}}$$

so ergeben sich für die Halbaxen die folgenden Constructionen:

1. Man errichte in der Mitte von $0F$ ein Lot, welches die durch den Scheitel B zur Xaxe gezogene Parallele in E trifft, verbinde 0 mit E und trage von 0 aus $\frac{1}{2}0F$ darauf ab bis G. Verbindet man dann E mit A, zieht GH par. EA, verbindet H mit E und zieht GJ par. EH, so ist $0J$ die erste Halbaxe der Ellipse.

   Beweis: Nach der Construction verhält sich $0G$ zu $0E$ wie $\sqrt{a^2-b^2}$ zu $\sqrt{a^2+3b^2}$. Es ist daher

$$0H = a\cdot\frac{0G}{0E}=\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+3b^2}} \quad \text{und}$$

$$0J = 0H\cdot\frac{0G}{0E}=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}$$

2. Man beschreibe um $0A$ einen Halbkreis, ferner mit $\frac{1}{2}0F$ um A einen Kreis, welcher den Halbkreis in K trifft, verbinde 0 mit K und trage von 0 aus $\frac{1}{2}0F$ darauf ab bis L.

Verbindet man dann K mit B, zieht LN par. KB, verbindet N mit K und zieht LT par. KN, so ist $0T$ die zweite Halbaxe.

Beweis: Es verhält sich $0L$ zu $0K$ wie $\sqrt{a^2-b^2}$ zu $\sqrt{3a^2+b^2}$. Daher ist

$$0N = b\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{3a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad 0T = \frac{b\,(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}$$

Es kommt nun darauf an die Richtung $0M$ zu bestimmen. Sofern wir annehmen, dass der zu trisecirende Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ ein concaver ist, liegt M im vierten Quadranten. Bezeichnen wir den Winkel, welchen $0M$ mit der positiven Xaxe bildet, mit ϑ, so ergiebt sich aus (28)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Man ziehe nun im Scheitel, A die Tangente und errichte auf der positiven Seite der X im Abstande $\frac{b^2}{a}$ von 0 nach beiden Seiten das Lot. Den Fusspunkt dieses Lotes findet man am einfachsten, indem man C mit B verbindet und in B auf BC die Senkrechte errichtet, welche die Xaxe in dem gewünschten Punkte trifft. Nach diesen Vorbereitungen gestaltet sich die Construction nun einfach in der folgenden Weise: Man trage an $0A$ nach unten $\frac{3}{4}\varphi$ an und verlängere den Schenkel, bis er das Lot in V trifft, ziehe VW par. $0A$ und verbinde W mit 0, so ist $0W$ der gesuchte Radiusvector, auf welchem der Mittelpunkt M liegt.

Beweis. Es ist

$$AW = \frac{b^2}{a}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi) = a\operatorname{tg}(A0W)$$

also

$$\operatorname{tg}(A0W) = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi) = \operatorname{tg}\vartheta \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } A0W = \vartheta$$

Der Mittelpunkt M ist der Schnittpunkt von $0W$ mit dem geometrischen Ort der Kreismittelpunkte. Zieht man dann durch M eine Parallele zu $0A$, trägt nach beiden Seiten den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ an, verlängert den oberen Schenkel bis zum Schnittpunkt P_4 mit der gegebenen Ellipse und beschreibt mit MP_4 um M den Kreis, so trifft derselbe die Ellipse in den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 eines gleichseitigen Dreiecks, und es teilt die Verbindungslinie MP_1 den ganzen Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ in drei gleiche Teile.

Nachdem der geometrische Ort der Kreismittelpunkte einmal construirt, in A die Scheiteltangente und im Abstande $\frac{b^2}{a}$ von 0 die Senkrechte zur Xaxe gezeichnet ist, gestaltet sich also die weitere Construction im einzelnen Falle sehr einfach.

Uebrigens gilt dieselbe Construction auch für Winkel grösser als 180^0.

Der Punkt M rückt dann in den dritten Quadranten. In diesem Falle muss natürlich der Schenkel des in 0 an $0A$ angetragenen Winkels $\frac{1}{2}\varphi$ über 0 hinaus verlängert werden; die Punkte V und W liegen im ersten Quadranten und M liegt dieses Mal auf der Verlängerung von $0W$ über 0 hinaus.

Für den Winkel 180^0 fällt M mit dem unteren Scheitel des geometrischen Orts der Kreismittelpunkte zusammen und r ist gleich der Entfernung dieses Punktes von B. Für den Winkel 360^0 endlich ist M der linke Scheitel der Mittelpunktscurve und r die Entfernung dieses Punktes von C. Auch in diesen Fällen behält unsere Construction ihre Gültigkeit.

Wir gehen nun zu dem zweiten Falle über, dass $a < b$ ist.

Der Brennpunkt E liegt dann auf der Yaxe in der Entfernung $\sqrt{b^2-a^2}$ von 0. Der geometrische Ort der Kreismittelpunkte ist dann genau dieselbe Ellipse, die man erhält, wenn man die grössere Halbaxe b als die erste, die kleinere a als die zweite ansieht und die Construction nach den im ersten Falle angegebenen Vorschriften ausführt.

Der Mittelpunkt M liegt in diesem Falle für concave Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ im zweiten Quadranten, für convexe im ersten.

Um die Richtung $0M$ zu finden, verfahre man wie früher. Man ziehe in A die Scheiteltangente, verbinde C mit B, errichte in B auf BC das Lot, welches dieses Mal die Verlängerung von CA trifft und construire in dem Schnittpunkte das Lot. Dann trage man an $0A$ den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ an, verlängere bis zum Schnittpunkte V mit dem Lote, ziehe VW par. $A0$ und verbinde 0 mit W. Bei concavem Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ liegt dann M auf der Verlängerung von $W0$ über 0 hinaus, bei convexem auf $0W$ selbst.

Die Behandlung der beiden Fälle lässt erkennen, dass man mit Hülfe derselben Ellipse jeden Winkel auf 2 Arten triseciren kann.

Bei der einen Construction öffnet sich der Winkel von M aus in der Richtung der positiven Xaxe, bei der andern in der Richtung der positiven Yaxe. Beide Mittelpunkte liegen auf derselben Ellipse. Ist in der zu Grunde liegenden Ellipse die erste Axe grösser als die zweite, so liegt bei concavem $\frac{2}{3}\varphi$ der eine Mittelpunkt im vierten, der andere im dritten, bei convexem $\frac{2}{3}\varphi$ der eine im dritten, der andere im zweiten Quadranten. Ist dagegen die erste Axe kleiner als die zweite, so liegt bei concavem $\frac{2}{3}\varphi$ der eine Mittelpunkt im zweiten, der andere im ersten, bei convexem $\frac{2}{3}\varphi$ der eine im ersten, der andere im vierten Quadranten. Da nun aber der Symmetrie wegen zu jedem der beiden Mittelpunkte noch drei andere gehören, von denen aus die Trisection ebenfalls ausgeführt werden kann, so giebt es im Ganzen 8 verschiedene Möglichkeiten.

Bei zwei derselben öffnet sich der Winkel nach der Richtung der positiven, bei zwei andern nach der der negativen Xaxe, ebenso bei zwei weiteren nach der der positiven und bei den beiden letzten nach der der negativen Yaxe.

§ 9.

Die Trisection des Winkels mittelst fester Hyperbeln. Fig. 3.

Es sei die Hyperbel

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

gegeben. Soll diese mit der durch Gleichung (23) dargestellten Curve identisch sein, so muss

$$u = -\frac{a^2}{b^2}$$

und

$$a^2 = \frac{r^2}{16\,a^2b^4}\left[a^2(a^2-3b^2)^2\cos^2(\tfrac{1}{4}\varphi) - b^2(3a^2-b^2)^2\sin^2(\tfrac{1}{4}\varphi)\right]$$

sein, woraus

$$(30)\qquad r^2 = \frac{16\,a^4b^4}{a^2(a^2-3b^2)^2\cos^2(\frac{3}{4}\varphi) - b^2(3a^2-b^2)^2\sin^2(\frac{3}{4}\varphi)}$$

wird. Aus (26) erhalten wir ferner für die Coordinaten von M:

$$(31)\qquad \mathfrak{B} = -\frac{r}{4}\frac{a^2+b^2}{b^2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{L} = -\frac{r}{4}\frac{a^2+b^2}{a^2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Ferner wird der geometrische Ort der Kreismittelpunkte dargestellt durch:

$$\frac{\mathfrak{P}^2}{\left[\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-3b^2}\right]^2} - \frac{\mathfrak{Q}^2}{\left[\frac{b(a^2+b^2)}{3a^2-b^2}\right]^2} = 1 \tag{32}$$

Der Ausdruck für r^2 lässt zunächst erkennen, dass das Intervall der Winkel $\frac{3}{4}\varphi$, welche mit Hülfe der vorgelegten Hyperbel trisecirt werden können, ein beschränktes ist. Die Construction ist nur dann ausführbar, wenn der Nenner von r^2 positiv ist, also nur für die Werte, für welche

$$a^2(a^2-3b^2)^2\cos^2(\tfrac{1}{4}\varphi) > b^2(3a^2-b^2)^4\sin^2(\tfrac{1}{4}\varphi) \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg}^2(\tfrac{1}{4}\varphi) < \frac{a^2(a^2-3b^2)^2}{b^2(3a^2-b^2)^2} \tag{33}$$

ist. Die Construction kann in analoger Weise ausgeführt werden wie bei der Ellipse. Der Mittelpunkt M wird gefunden als Durchschnittspunkt des geometrischen Orts mit einer durch O gehenden Geraden. Für concave Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ liegt M im dritten Quadranten.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen OM mit der negativen X axe bildet, mit ϑ, so ist

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Wenn wir ferner den Winkel, welchen die im entsprechenden Quadranten liegende Asymptote der Mittelpunktshyperbel mit der negativen X axe bildet, ε nennen, so ergiebt sich aus (32) der Wert

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon = \frac{b^2(a^2-3b^2)^2}{a^2(3a^2-b^2)^2}$$

Die unter dem Winkel ϑ gezogene Gerade trifft daher die Hyperbel der Mittelpunkte nur dann, wenn

$$\operatorname{tg}^2\vartheta < \operatorname{tg}^2\varepsilon \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}^2(\tfrac{3}{4}\varphi) < \frac{a^2(a^2-3b^2)^2}{b^2(3a^2-b^2)^2}$$

ist. Dieses Resultat stimmt mit dem aus dem Ausdruck von r^2 gewonnenen völlig überein, und wir erkennen jetzt, dass die Hyperbel deswegen für keine grösseren Winkel zur Trisection verwandt werden kann, weil dann die unter dem Winkel ϑ gezogene Gerade den geometrischen Ort der Mittelpunkte nicht mehr trifft.

Will man grössere Winkel trisecciren, so muss man sich der conjugirten Hyperbel

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

bedienen, welche gerade für diese und nur für diese benutzt werden kann. Man zeichne also gleich von vorn herein beide Hyperbeln und die beiden zugehörigen geometrischen Oerter der Kreismittelpunkte, welche natürlich auch conjugirt sein müssen. Dann lassen sich alle Winkel trisecciren mit alleiniger Ausnahme derjenigen, für welche

$$\operatorname{tg}^2(\tfrac{1}{4}\varphi) = \frac{a^2(a^2-3b^2)^2}{b^2(3a^2-b^2)^2}$$

ist. Die Construction des Radiusvectors bleibt auch für die conjugirte Hyperbel dieselbe. Liegt M auf dem geometrischen Ort zur ersten Hyperbel, so wird der Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ auch durch die erste Hyperbel trisecirt, im andern Falle durch die zweite.

Nur wenn die Richtung des Radiusvectors mit der Richtung der Asymptoten zur Curve der Mittelpunkte übereinstimmt, ist die Trisection unmöglich, da dann M unendlich weit rückt.

Bevor wir in der Betrachtung des allgemeinen Falles fortfahren, ist es wünschenswert, das bisher Abgeleitete an Beispielen zu demonstriren.

Die gleichseitige Hyperbel.

Der geometrische Ort der Kreismittelpunkte hat die Eigenschaft, in einem Falle mit der gegebenen Hyperbel selbst übereinzustimmen. Dieser Fall tritt ein für die gleichseitige Hyperbel.

Setzen wir in (32) $a^2 = b^2$. so kommt

$$\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{Q}^2 = a^2$$

Für die Coordinaten von M ergiebt sich ferner

$$\mathfrak{P} = -\frac{r}{2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{Q} = -\frac{r}{2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Endlich wird

$$r = 2\,.\,0M$$

Die Construction mit Hülfe der Hyperbel selbst ist ausführbar, so lange

$$\operatorname{tg}^2(\tfrac{3}{4}\varphi) < 1$$

ist, d. h. für alle Winkel unter 90°. Für die Winkel über 90° gilt die conjugirte Hyperbel. Die Construction gestaltet sich folgendermassen: Man trage in 0 an die negative Xaxe nach unten den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ an und verlängere den Schenkel bis zum Schnitte mit der gegebenen Hyperbel. Der Schnittpunkt ist der Kreismittelpunkt M, und $M0$ ist gleich $\frac{1}{2}r$. Man verlängere dann $M0$ über 0 hinaus bis zum Schnitte mit dem andern Hyperbelzweig und beschreibe mit der Entfernung von M bis zu diesem Schnittpunkte um M den Kreis, welcher die Hyperbel noch in den drei weiteren Punkten P_1, P_2, P_3 der Art trifft, dass P_1, P_2, P_3 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, und MP_1 den in M an $M0$ angetragenen Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ trisecirt. Es ist dies die in dem ersten Artikel von Panzerbieter angegebene Lösung des Problems.

Die Hyperbel von der Exentricität 2.

Noch in zwei andern Fällen erfordert die Construction des geometrischen Orts keine besondere Anstrengung, wenn nämlich entweder

$$3a^2 = b^2 \quad \text{oder} \quad a^2 = 3b^2 \quad \text{ist.}$$

Im ersten Falle erhalten wir die Gleichung

$$\mathfrak{P}^2 = \frac{a^2}{4}$$

welche zwei zur Xaxe senkrechte Geraden darstellt. Die Gleichung der Hyperbel heisst dann

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{3a^2} = 1$$

ihre Excentricität ist also gleich 2.

Ferner folgt aus (33), dass in diesem Falle die Curve zur Trisection aller Winkel verwendet werden kann, für welche

$$\operatorname{tg}^2(\tfrac{3}{4}\varphi) < \infty$$

ist, d. h. für alle Winkel mit Ausnahme des gestreckten, während die conjugirte Hyperbel

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{3a^2} = -1$$

zur Trisection völlig ungeeignet ist.

Für r ergiebt sich der Wert $\pm \frac{a}{\cos(\frac{1}{4}\varphi)}$, je nachdem $\frac{1}{4}\varphi$ concav oder convex ist, und als Coordinaten des Mittelpunktes M

$$\mathfrak{B} = \mp \frac{a}{2}, \quad \mathfrak{C} = \mp \tfrac{1}{2} a \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\varphi)$$

Bei concavem Winkel liegt demnach M im dritten, bei convexem im vierten Quadranten.

Daraus ergeben sich die folgenden Constructionen, welche fast ebenso einfach sind wie die bei der gleichseitigen Hyperbel.

Ist $\frac{1}{4}\varphi$ concav, so trage man im Scheitelpunkte A an $A0$ nach unten die Hälfte des Winkels an und verlängere den Schenkel, bis er die Senkrechte

$$X = -\frac{a}{2}$$

trifft. Dann ist, der Schnittpunkt der gesuchte Kreismittelpunkt M und die Entfernung MA gleich dem Kreisradius r.

Wie man erkennt, gehen alle Kreise durch den Scheitel A der Hyperbel.

Im Falle, dass $\frac{1}{4}\varphi$ convex ist, trage man $\frac{1}{4}\varphi$ im andern Scheitelpunkte C an die Verlängerung von $0C$ nach unten hin an und verlängere den Schenkel, bis er die Senkrechte

$$X = +\frac{a}{2}$$

trifft. Dann ist wiederum der Schnittpunkt der Mittelpunkt M und die Entfernung MC gleich dem Radius des Kreises.

In diesem Falle gehen alle Kreise durch den Scheitel C.

Beide Fälle lassen sich auch vereinigen, wenn man den Mittelpunkt M in der früheren Art als Durchschnittspunkt einer durch 0 gehenden Geraden mit dem geometrischen Orte bestimmt. Man errichte auf der positiven X axe in der Entfernung

$$\frac{b^2}{a} = 3a$$

das Lot, construire die Scheiteltangente in A, trage in 0 an $0A$ nach oben $\frac{1}{4}\varphi$ an, verlängere den Schenkel bis zum Schnitt mit der Senkrechten (eventuell über 0 hinaus), ziehe durch den Schnittpunkt eine Parallele zur X axe und verbinde den Schnittpunkt dieser Pa-

rallelen und der Tangente mit 0. Im Falle eines concaven Winkels liegt dann M auf der Verlängerung dieser Verbindungslinie über 0 hinaus, im Falle eines convexen Winkels auf ihr selbst.

Da zum Punkte M noch 3 andere zu den Axen symmetrisch gelegene gehören, von denen aus der Winkel ebenfalls trisecirt werden kann, so giebt es im Ganzen 4 Möglichkeiten. Bei zwei derselben öffnet sich der Winkel in der Richtung der positiven Xaxe, bei den andern beiden in der entgegengesetzten Richtung. Ausserdem giebt es noch 4 weitere Möglichkeiten, bei welchen sich der Winkel nach der positiven und negativen Yaxe öffnet. Dieselben ergeben sich aber erst aus der Betrachtung des Falles

$$a^2 = 3b^2$$

zu dem wir jetzt übergehen.

Wenn $a^2 = 3b^2$ ist, so lässt sich die Hyperbel

$$\frac{X^2}{3b^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

da hierfür der Ausdruck von r^2 stets negativ ist, überhaupt nicht zur Trisection verwenden, wohl aber die conjugirte Hyperbel

$$\frac{X^2}{3b^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

Diese hat wieder die Excentricität 2 und unterscheidet sich von der vorigen nur durch die Lage zu den Axen Während sich im vorigen Falle der trisecirte Winkel von M aus in der Richtung der Hauptaxe erstreckte, öffnet er sich jetzt senkrecht dazu.

Es wird für diesen Fall

$$r = \tfrac{3}{2}\frac{b}{\sin(\frac{3}{4}\varphi)}, \quad \mathfrak{P} = -\tfrac{3}{2}b\cot(\tfrac{3}{4}\varphi) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = -\frac{b}{2}$$

Die Construction gilt demnach für alle Winkel; M liegt für concave Winkel im dritten, für convexe im vierten Quadranten. Man trage für einen concaven Winkel das Complement des halben Winkels im Scheitel B an $B0$ nach links hin an und verlängere bis zum Schnitt mit der Geraden

$$Y = -\frac{b}{2}$$

Dieser Schnittpunkt ist dann der Mittelpunkt M und MB der Kreisradius. Alle Kreise gehen durch den Scheitel B.

Ist der Winkel convex, so trage man $\frac{3}{4}\varphi - 90^0$ in B an BO nach rechts hin an und verlängere wieder bis zum Schnitt mit

$$Y = -\frac{b}{2}$$

Der Schnittpunkt ist M und MB der Radius. Alle Kreise gehen durch denselben Scheitelpunkt B.

Uebrigens lässt sich auch hier der Mittelpunkt M für beide Fälle in derselben Weise finden, wenn man denselben als Schnittpunkt des geometrischen Orts mit einer durch O gehenden Geraden bestimmt. Man errichte auf der positiven Xaxe in der Entfernung

$$\frac{a^2}{b} = \frac{1}{3}a$$

das Lot, construire im Scheitel A der conjugirten Hyperbel die Tangente, trage in O an O A nach unten $\frac{3}{4}\varphi$ an, verlängere den Schenkel bis zum Schnitte mit der Senkrechten (eventuell über O hinaus), ziehe durch den Schnittpunkt eine Parallele zur Xaxe und verbinde den Schnittpunkt dieser Parallelen und der Tangente mit O. Im Falle eines concaven Winkels liegt dann M auf der Verlängerung dieser Linie über O hinaus, im andern Falle auf ihr selbst.

Es ist dies fast wörtlich die im Falle $3a^2 = b^2$ an der entsprechenden Stelle angegebene Construction.

Aus der Betrachtung beider Fälle ergiebt sich das Resultat, dass es im Ganzen 8 Möglichkeiten giebt, mit Hilfe der Hyperbel von der Excentricität 2 den Winkel zu trisecciren. Von 4 symmetrisch zu den Axen gelegenen Mittelpunkten öffnet sich der Winkel in der Richtung der Hauptaxe und entgegengesetzt, von den 4 andern in den beiden dazu senkrechten Richtungen.

Diese Lösung der Dösiteilung des Winkels findet sich sowol in den ersten beiden Artikeln von Panzerbieter wie auch in der genannten Programmabhandlung.

Weitere Behandlung im Falle einer beliebigen Hyperbel.

Es war schon gesagt worden und hat sich auch in den behandelten Beispielen bestätigt, dass die Construction des Mittelpunktes für die ursprüngliche Hyperbel wie für die conjugirte nach derselben Regel ausgeführt werden kann. Der Grund hierfür liegt in dem Umstande, dass die Formeln (31) unabhängig davon sind, von welcher der beiden

Hyperbeln im gegebenen Falle die Trisection wirklich ausgeführt wird. Es ist allgemein

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Daraus ergiebt sich die folgende Construction, welche der für die Ellipse gegebenen ganz analog ist: Man ziehe im Scheitel A die Tangente und errichte auf der positiven Seite der X im Abstande $\frac{b^2}{a}$ von 0 das Lot. Den Fusspunkt findet man am einfachsten, indem man C mit B verbindet und in B auf BC die Senkrechte errichtet, welche die Xaxe in dem gesuchten Punkte trifft. Sodann trage man $\frac{3}{4}\varphi$ an $0A$ nach oben an und verlängere den Schenkel (eventuell über 0 hinaus), bis er das Lot in V trifft, ziehe VW par. $0A$ und verbinde W mit 0. Im Falle eines concaven Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ liegt dann M auf der Verlängerung des Radiusvectors über 0 hinaus, im Falle eines convexen Winkels auf ihm selbst. Je nachdem nun die eine oder andere Mittelpunktscurve getroffen wird, wird der Winkel durch die eine oder andere Hyperbel trisecirt.

Führt man die Construction in entsprechender Weise für die Yaxe aus, indem man die conjugirte Hyperbel als die ursprüngliche ansieht, so erhält man noch einen zweiten Radiusvector, auf welchem der Mittelpunkt M liegt, von welchem aus der Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ sich nach der Yaxe hin öffnet. Zu jedem der beiden Punkte gehören aber noch drei andere symmetrisch zu den Axen liegende, es lässt sich also auch im allgemeinen Falle die Construction auf 8 verschiedene Arten ausführen.

Auch die Construction des geometrischen Orts der Mittelpunkte kann in ähnlicher Weise erfolgen wie bei der Ellipse. Der Brennpunkt F liegt auf der Xaxe in der Entfernung $\sqrt{a^2+b^2}$ von 0. Je nach dem Verhältniss dieser Strecke zu den Axen $2a$ und $2b$ gestaltet sich der Anfang der Construction verschieden. Um dieselbe wenigstens für einen Fall vollständig angeben zu können, wollen wir die Annahme machen, dass $a^2 > 3b^2$ sei. Es ist aus den Formeln leicht zu entnehmen, wie sich die Construction für die andern Fälle verändert. Für unsern Fall ist $a^2+b^2 > 4b^2$ und $4a^2 > a^2+b^2$. Die Construction ist die folgende:

1. Man construire über $\frac{1}{2}0F$ als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck $0EZ$, dessen eine Kathete $E\overline{Z}$ gleich b ist, und trage von 0 aus auf $0E$ und dessen Verlängerung $\frac{1}{2}0F$ ab bis G. Verbindet man dann E mit A, zieht

GH par. EA, verbindet H mit E und zieht GJ par. EH, so ist $0J$ die erste Halbaxe.

2. Man construire über $0A$ als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck $0KA$, dessen eine Kathete

$$KA = \tfrac{1}{2}0F$$

ist und trage von 0 aus auf $0K$ $\frac{1}{2}0F$ ab bis L. Verbindet man dann K mit B, zieht LN par. KB, verbindet N mit K und zieht LT par. KN, so ist $0T$ die zweite Halbaxe.

Während bei der Ellipse die Construction stets endliche Werte ergiebt, die der Grösse nach unter den Halbaxen der gegebenen Ellipse gelegen sind, gestaltet sich hier die Sache ganz anders. Um uns eine klare Vorstellung zu verschaffen, wollen wir die Annahme machen, dass die Halbaxe a fest gegeben sei. Wir erschöpfen dann alle Möglichkeiten, wenn wir b sämtliche Werte von 0 bis ∞ durchlaufen lassen. Wir beginnen mit dem Falle, dass $a^2 = b^2$ ist. Wie wir schon bei der Behandlung des ersten Beispiels sahen, fallen dann beide Oerter mit den gegebenen Curven zusammen. Wird b kleiner, so entfernen sich die Scheitel des ersten Orts, während die des zweiten näher an 0 heranrücken Bei $a^2 = 3b^2$ sind beide Zweige des ersten in unendliche Ferne gerückt, der zweite ist zu dem Paar gerader Linien

$$Y = \pm \frac{b}{2}$$

geworden. Nimmt b noch weiter ab, so erscheinen die beiden Zweige des ersten wieder und rücken an 0 heran, der zweite setzt seine Bewegung gegen den Mittelpunkt hin fort.

An der Grenze $b = 0$ wird die erste Halbaxe gleich a, die zweite gleich null. Gehen wir wieder zu dem Falle $a^2 = b^2$ zurück und lassen jetzt b zunehmen, so rückt umgekehrt der erste Ort gegen 0 vor, der zweite entfernt sich.

Für $3a^2 = b^2$ ist der erste zu dem Paar gerader Linien

$$X = \pm \frac{a}{2}$$

geworden, während der zweite in unendlicher Ferne verschwindet. Bei weiterem Wachsen von b erscheinen die Zweige des zweiten Orts anfangs wieder und nähern sich, der erste setzt seine Bewegung gegen den Mittelpunkt hin fort. Für $b = \infty$ rückt der erste Ort bis auf $\frac{a}{3}$ vor, der zweite aber ist im Unendlichen verschwunden, da

die entsprechende Halbaxe sich dem Werte b genähert hat und mit unendlichem b selbst unendlich geworden ist.

Was die Grenze angeht, bis zu welcher die gegebene Hyperbel selbst und von welcher ab die conjugirte zur Trisection verwendet wird, so ist darüber das Folgende zu sagen: Bei $a^2 = b^2$ verteilen sich die Winkel gleichmässig auf beide Curven, die Winkel unter 90^0 werden von der ersten, die über 90^0 von der zweiten trisecirt. Nimmt b ab, so sinkt auch die Grenze und erreicht den Wert null für $a^2 = 3b^2$. In diesem Falle kann mit der ersten Hyperbel überhaupt kein Winkel trisecirt werden; sämtliche Trisectionen werden von der conjugirten Hyperbel ausgeführt. Wird b noch kleiner, so wächst die Grenze wieder und nähert sich mit abnehmendem b allmählich dem Werte 180^0. Ist $b^2 > a^2$, so nimmt der Grenzwert zu und erreicht bei $3a^2 - b^2$ den höchsten Wert 180^0. In diesem Falle trisecirt die Hyperbel selbst alle Winkel, die conjugirte kann zur Construction überhaupt nicht verwendet werden, Bei noch grösseren Werten von b sinkt die Grenze wieder, d. h. die conjugirte Hyperbel tritt wieder für einen Teil der Winkel in Benutzung, und zwar fällt ihr mit wachsendem b ein immer grösserer Teil der Winkel zu, bis für $b = \infty$ der Grenzwert null geworden ist. Für ein sehr grosses b übernimmt also die conjugirte Hyperbel fast allein die Trisection, wie es für ein sehr kleines b die erste Hyperbel tat.

Die Betrachtung zeigt, dass ausser für die gleichseitige Hyperbel noch für zwei andere Fälle sich die Winkel auf beide Curven gleichmässig verteilen. Der eine tritt ein innerhalb des Intervalls $\infty > a^2 > 3b^2$, der andere innerhalb des Intervalls $\infty > b^2 > 3a^2$. Man findet die entsprechenden Bedingungen aus (33), indem man die rechte Seite gleich der Einheit setzt. Es ergiebt sich dann:

$$a = (2 \pm \sqrt{3})\, b$$

Wie wir bei der Discussion in § 5. sahen, stellt die allgemeine Gleichung Hyperbeln mit reeller erster Axe dar, wenn der Mittelpunkt sich von Q nach S und von R über L in's Unendliche bewegt. Wir bemerkten ferner, dass für den zweiten Teil des Weges sämtliche 4 Kreispunkte auf demselben Zweige der Hyperbel liegen. Es lässt sich nun leicht geometrisch erkennen, dass für die Hyperbeln von Q bis S stets $3b^2 > a^2$ und für alle Hyperbeln von R ab $3b^2 < a^2$ sein muss, und dass die Hyperbel $3b^2 = a^2$ für keinen Wert des Winkels φ durch die Gleichung dargestellt wird.

Wir wollen dieses Resultat auch analytisch bestätigen. Wir berechnen zu dem Zwecke die Coordinaten des vierten Kreispunktes

P_4. Da derselbe gleichzeitig auf dem einen Schenkel des Winkels $\frac{3}{2}\varphi$ liegt, und dieser durch eine Parallele zur X axe halbirt wird, so sind die Coordinaten

$$\mathfrak{P} + r\cos(\tfrac{3}{4}\varphi) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} + r\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

oder gleich

$$-\frac{r}{4b^2}(a^2 - 3b^2)\cos(\tfrac{3}{4}\varphi) \quad \text{und} \quad -\frac{r}{4a^2}(b^2 - 3a^2)\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Diese Coordinaten lassen die verschiedenen Lagen von P_4 erkennen.

Für den Fall eines concaven Winkels ergiebt sich das Folgende:

Ist $a^2 > 3b^2$, so liegt P_4 im zweiten Quadranten. Es müssen daher, soweit die Trisection mit der gegebenen Hyperbel selbst ausgeführt wird, alle 4 Kreispunkte auf dem linken Zweige derselben liegen. Für $a^2 = 3b^2$ wird die erste Coordinate gleich null, P_4 rückt in die Y axe hinein und stellt den Schnittpunkt derselben mit der conjugirten Hyperbel dar, welche in diesem Falle allein zur Construtionverwendet wird. Es stimmt dieses mit dem früheren Resultat völlig überein, dass alle Kreise durch den Scheitel B der conjugirten Hyperbel gehen.

Wenn $a^2 < 3b^2$ und $b^2 < 3a^2$ ist, liegt P_4 im ersten Quadranten. Da aber M stets im dritten Quadranten liegt, muss der Kreis jeden Zweig der Hyperbel in 2 Punkten treffen.

Für $b^2 = 3a^2$ rückt P_4 in die X axe hinein, fällt also mit dem Scheitel A zusammen. Alle Kreise gehen durch A, wie schon früher gefunden wurde.

Ist endlich $b^2 > 3a^2$, so liegt P_4 im vierten Quadranten. Soweit die Construction mit der gegebenen Hyperbel selbst ausgeführt wird, schneidet der Kreis jeden Zweig in 3 Punkten, soweit aber die conjugirte Hyperbel benutzt wird, liegen alle 4 Schnittpunkte auf demselben Zweige.

Für den Fall eines convexen Winkels liegt P_4 für das erste Intervall im ersten Quadranten, rückt dann durch die Y axe hindurch in den zweiten Quadranten hinein und von diesem durch die negative X axe in den dritten. Doch ändert dieses nichts an der Tatsache, dass für das erste und letzte Intervall ein Teil der Kreise nur den einen Zweig der Hyperbel schneidet.

§ 10.

Die Trisection mittelst fester Parabeln. Figur 4.

Die Gleichung der Parabel sei zunächst

$$Y^2 = -2pX$$

wo $p > 0$ ist. Soll die in § 3 unter (10) dargestellte Gleichung diese Parabel darstellen, so muss

$$r = \frac{4p}{\cos(\frac{1}{4}\varphi)} \tag{34}$$

sein, womit der Kreisradius sogleich bestimmt ist. Da r nur positiv sein kann, so muss der zu trisecirende Winkel concav sein. Sollte aber die Aufgabe gestellt sein, einen convexen Winkel zu trisecirеn, so benutze man entweder die Parabel

$$Y^2 = 2pX$$

oder man führe die Construction für den concaven Winkel aus, welcher den gegebenen zu $4R$ ergänzt. Dann trisecirt MP_3 den zugehörigen convexen Winkel.

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind nach (11)

$$\mathfrak{P} = -\frac{r}{8}\,\frac{9-\cos^2(\frac{1}{4}\varphi)}{\cos(\frac{1}{4}\varphi)}, \quad \mathfrak{Q} = -\frac{r}{4}\sin(\tfrac{1}{4}\varphi) \tag{35}$$

Derselbe liegt also stets im dritten Quadranten.

Wie man sich durch kurze Berechnung überzeugen kann, stimmt diese Lösung mit der von Panzerbieter in der angeführten Programmabhandlung gegebenen überein. Was die Construction selbst angeht, so weisen unsere Formeln auf die folgende, von der dortigen etwas abweichende Art der Ausführung hin: Die Entfernung des Brennpunktes F von der Directrix ist gleich p. Man verlängere diese Strecke über F hinaus um das Dreifache bis zum Punkte B und um das Dreiundeinhalbfache bis zum Punkte C, so dass

$$AB = 4p \quad \text{und} \quad AC = 4\tfrac{1}{2}p$$

wird, und errichte in F, B und C Lote zur Axe. Hierauf trage man in A an AC den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ an, verlängere den freien Schenkel, bis er die Senkrechten in D, E und G schneidet, errichte $HG \perp GA$ und ziehe durch H eine Parallele zur Yaxe und durch D eine Parallele zur Xaxe. Dann ist der Schnittpunkt der beiden Parallelen der gesuchte Kreismittelpunkt M und AE der Radius des Kreises.

Trägt man daher in M an MD nach beiden Seiten $\frac{1}{4}\varphi$ an und beschreibt mit AE um M einen Kreis, so trifft derselbe die Parabel in den Endpunkten P_1, P_2, P_3 eines gleichseitigen Dreiecks und der Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ wird durch MP_1 trisecirt.

Beweis: $4p = AE \cdot \cos(\frac{3}{4}\varphi)$, also

$$AE = \frac{4p}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}$$

Ferner ist

$$HO = HA - OA = \frac{9}{8}\frac{r}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)} - \frac{r}{8}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi) = \frac{r}{8}\frac{9-\cos^2(\frac{3}{4}\varphi)}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}$$

und

$$FD = AD \cdot \sin(\tfrac{3}{4}\varphi) = \frac{r}{4}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Man hat also im gegebenen Falle nur die Hälfte des trisecirenden Winkels anzutragen, ein Lot zu errichten und zwei Parallelen zu ziehen.

Die Construction ist so elementar, dass wir des geometrischen Ortes der Kreismittelpunkte für diesen Fall gar nicht bedürfen. Dennoch wollen wir die Gleichung desselben ableiten.

Aus (34) ergiebt sich

$$\cos(\tfrac{3}{4}\varphi) = \frac{4p}{r}$$

Wir setzen diesen Wert in die Ausdrücke für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{L}^2$ ein, die sich aus (35) ergeben. Dann kommt

$$32p \cdot \mathfrak{P} = 16p^2 - 9r^2 \quad \text{und}$$
$$16\mathfrak{L}^2 = r^2 - 16p^2$$

woraus durch Elimination von r^2:

$$\mathfrak{L}^2 = -\tfrac{8}{9}p[\mathfrak{P} + 4p] \tag{36}$$

Der geometrische Ort ist also eine Parabel, die sich vom Punkte C als Scheitelpunkt aus nach der negativen Seite der Xaxe erstreckt. Der Parameter ist gleich dem neunten Teile des Parameters der gegebenen Parabel.

Will man den geometrischen Ort zur Construction verwenden, so gestaltet sich diese insofern einfacher, als man nur in A den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ anzutragen und durch D eine Parallele zur Xaxe zu ziehen

braucht, welche die Parabel der Mittelpunkte in M trifft. Durch Antragen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ an MD ergiebt sich dann der Radius r von selbst.

Wir verwiesen oben für den Fall eines convexen Winkels auf die Parabel

$$Y^2 = 2pX$$

Setzen wir diese in Verbindung mit (10), so ergiebt sich:

$$r = \frac{-4p}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}$$

woraus ersichtlich, dass diese Curve in der Tat und zwar nur zur Trisection eines convexen Winkels verwendet werden kann. Der Mittelpunkt liegt hierfür im vierten Quadranten. Die Construction gestaltet sich genau wie im vorigen Falle.

Wir nehmen nun an, die gegebene Parabel habe die Gleichung

$$X^2 = -2pY$$

Dann ergiebt sich durch Vergleichung mit (13)

$$r = \frac{4p}{\sin(\frac{3}{4}\varphi)} \tag{37}$$

und für die Coordinaten des Mittelpunkts kommt:

$$\mathfrak{X} = -\frac{r}{4}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{Y} = -\frac{r}{8}\frac{9-\sin^2(\frac{3}{4}\varphi)}{\sin(\frac{3}{4}\varphi)} \tag{38}$$

In diesem Falle kann die Construction, da r den halben sinus des halben Winkels enthält, für alle Winkel angewendet werden. Für concave Winkel liegt M im dritten, für convexe im vierten Quadranten.

Für die Construction ergiebt sich das Folgende:

Man construire wie im vorigen Falle

$$AB = 4p, \quad AC = 4\tfrac{1}{2}p$$

errichte wieder in F, B und C Lote, trage aber dieses Mal das Complement von $\frac{3}{4}\varphi$ in A an AC nach der Seite der negativen X zu an und verlängere bis J, K und L, construire $NL \perp AL$ und ziehe

durch N und J Parallelen zu den Axen, die sich in M' schneiden. Der Radius ist dann gleich AK.

Die Behandlung beider Fälle lässt erkennen, dass auch mit Hülfe jeder Parabel der Winkel auf 2 Arten trisecirt werden kann. Da aber zu jedem der beiden Kreismittelpunkte der Symmetrie wegen noch ein zweiter gehört, so giebt es im Ganzen sogar 4 Möglichkeiten. Ist der Winkel concav, so öffnet er sich für 2 symmetrisch gelegene Mittelpunkte in der Richtung der Hauptaxe vom Brennpunkt zum Scheitel hin, für die beiden andern ebenfalls symmetrisch gelegenen nach den beiden zur Hauptaxe senkrechten Richtungen. Ist der Winkel convex, so öffnen sich 2 Winkel in der Richtung der Hauptaxe vom Scheitel zum Brennpunkt zurück, die beiden andern wieder nach den beiden hierzu senkrechten Richtungen.

Berlin, den 1. December 1892.

XXV.

Analytische Entwicklung von Gleichungen über drei in demselben Punkte sich schneidende Transversalen eines Dreieckes.

Von

Professor **Josef Kiechl.**

Einleitung.

Wird die Richtung von A gegen B (Fig. 1) als die positive gewählt, und hat die Strecke AB die Länge von $+e$ Einheiten, so ist die Strecke BA mit Rücksicht auf den Gegensatz der Rictung von der Länge $-e$, also

$$BA = -AB$$

Jede Strecke auf der durch die Punkte A und B gehenden Geraden ist als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem die Richtung von dem ersten zum zweiten Endpunkte der Richtung AB gleich oder entgegengesetzt ist.

Bei zwei oder mehreren verschiedenen Geraden ist die positive Richtung der einen von jener der andern im allgemeinen unabhängig, sind aber die Linien parallel, so wird vorausgesetzt, dass ihre positiven Richtungen übereinstimmen; zwei parallele Strecken MN und RS haben gleiche oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem die Richtung von M nach N mit der Richtung von R nach S übereinstimmt oder nicht.

Unter dem Teilverhältnisse in Bezug auf eine Strecke AB, nach welchem diese in irgend einem dritten Punkte geschnitten wird, — sei es, dass derselbe in ihr oder in ihrer Verlängerung liegt —,

verstehe man das Verhältniss zwischen dem Abschnitte, welcher sich von dem im Ausdrucke der Linie zuerst gesetzten Punkte A bis zum Schneidepunkte erstreckt, und dem Abschnitte vom Schneidepunkte bis zum andern Grenzpunkte B.

Die absolute Länge des ersten Abschnittes sei x, die des zweiten y (x und y veränderlich); so hat (Fig. 1)

$$\begin{aligned} AC &\text{ die Länge } +x \\ CB &\quad ,, \quad ,, \quad +y \\ AC' &\quad ,, \quad ,, \quad +x \\ C'B &\quad ,, \quad ,, \quad -y \\ AC'' &\quad ,, \quad ,, \quad -x \\ C''B &\quad ,, \quad ,, \quad +y \end{aligned}$$

und es ist

$$\frac{AC}{CB} = \frac{+x}{+y}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{+x}{-y}, \quad \frac{AC''}{C''B} = \frac{-x}{+y}$$

Das Teilverhältniss des Schnittpunktes in Bezug auf die Strecke AB ist demnach positiv, wenn der Uebergang von dem Endpunkte A zum Teilpunkte und von diesem zum andern Endpunkte B in gleichem Sinne, negativ, wenn der Uebergang von dem einem Endpunkte der Strecke zum Teilpunkte in dem entgegengesetzten Sinne von dem erfolgt, in welchem man von diesem letztern zum andern Endpunkte der Strecke gelangt.

Es ist somit das Teilverhältniss positiv für die innere, negativ für die äussere Teilung.

In der Geraden, die durch A und B geht, ist jeder Punkt durch das Verhältniss $\pm\frac{x}{y}$ oder $\pm\frac{xz}{yz}$ bestimmt, in welchem die Strecke AB von ihm geteilt wird

Für den Halbirungspunkt C''' ist das Teilverhältniss

$$\frac{AC'''}{C'''B} = +1$$

Liegt der Teilpunkt im Unendlichen, so wird das Teilverhältniss

$$\frac{A\infty}{\infty B} = \frac{AB}{\infty B} + \frac{B\infty}{\infty B} = -1$$

Es ist ferner

$$\frac{AC}{AC+CB} = \frac{x}{x+y} = \frac{AC}{AB} \quad \text{positiv}$$

$$\frac{CB}{AC+CB} = \frac{y}{x+y} = \frac{CB}{AB} \quad ,,$$

$$\frac{AC'}{AC'+C'B} = \frac{x}{x-y} = \frac{AC'}{AB} \quad ,, \qquad x > y$$

$$\frac{C'B}{AC'+C'B} = \frac{-y}{x-y} = \frac{C'B}{AB} \quad \text{negativ}$$

$$\frac{AC''}{AC'+C''B} = \frac{-x}{-x+y} = \frac{AC''}{AB} \quad ,, \qquad x < y$$

$$\frac{C'B}{AC''+C''B} = \frac{y}{-x+y} = \frac{C''B}{AB} \quad \text{positiv}$$

Es stellen also die Ausdrücke

$$\frac{\pm x}{\pm x+y} = \frac{x}{x \pm y}, \quad \frac{\pm y}{x \pm y} = \frac{y}{\pm x+y}$$

die Verhältnisse dar von den Abschnitten zur Strecke AB, sie sind positiv oder negativ, je nachdem die Abschnitte, genommen vom ersten Endpunkte bis zum Teilpunkte, beziehungsweise von diesem zum zweiten Endpunkte, mit der Richtung AB übereinstimmen oder nicht.

Sind x, y die Cartesischen Coordinaten des Punktes M (Fig. 2), welcher die Strecke $M'M''$ mit den Endpunktscoordinaten $x'y'$, $x''y''$ in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ teilt, so ist

$$m : n = M'M : MM'' = P'P : PP''$$

oder

$$m : n = (x' - x) : (x - x'')$$

$$mx - mx'' = nx' - nx$$

also

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m+n}$$

ferner ist

$$m : n = M'M : MM'' = M'Q' : Q''M''$$

oder

$$m : n = (y' - y) : (y - y'')$$

$$my - my'' = ny' - ny$$

also

$$y = \frac{my'' + ny'}{m+n}$$

Für den äusseren Teilpunkt ergibt sich

$$x = \frac{mx'' - nx'}{m - n}, \quad y = \frac{my'' - ny'}{m - n}$$

Hiernach können die Fälle der innern und äussern Teilung wieder von einander unterschieden werden dadurch, dass die Teilung einer Strecke im Verhältnisse $+\frac{m}{n}$ die innere, im Verhältnisse $-\frac{m}{n}$ die äussere Teilung im quantitativen Verhältnisse $m : n$ bezeichnen soll; die Formeln für die Coordinaten des äussern Teilpunktes werden aus denen des innern erhalten durch die Veränderung des Vorzeichens eines Gliedes.

Die Coordinaten eines Punktes, welcher eine Strecke mit den Endpunktscoordinaten $x'y'$, $x''y''$ im quantitativen Verhältnisse $m : n$ teilt, sind demnach durch

$$x = \frac{mx'' \pm nx'}{m \pm n}, \quad y = \frac{my'' \pm ny'}{m \pm n}$$

darstellbar, das positive Zeichen gilt für die innere, das negative für die äussere Teilung.

Handelt es sich um die Aufgabe, das Verhältniss $m : n$ zu bestimmen, in welchem eine Gerade

$$Ax + By + C = 0$$

die gerade Verbindungslinie der Punkte $x'y'$, $x''y''$ teilt, so gelangt man zur Lösung durch die Bedingung, dass die Coordinaten des Teilungspunktes

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$$

der Gleichung der teilenden Linie genügen müssen, also

$$A \cdot \frac{mx'' + nx'}{m + n} + B \cdot \frac{my'' + ny'}{m + n} + C = 0$$

woraus folgt

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C}$$

Um das Verhältniss zu bestimmen, nach dem die Strecke mit den Endpunktscoordinaten $x'y'$, $x''y''$ geteilt wird durch die Gerade, welche die Punkte $x'''y'''$, $x^{IV}y^{IV}$ enthält, bildet man die Gleichung dieser Geraden

$$(y''' - y^{IV})x - (x''' - x^{IV})y + x''' y^{IV} - x^{IV} y''' = 0$$

und man erhält

$$\frac{m}{n} = -\frac{(y''' - y^{IV})x' - (x''' - x^{IV})y' + x''' y^{IV} - x^{IV} y'''}{(y''' - y^{IV})x'' - (x''' - x^{IV})y'' + x''' y^{IV} - x^{IV} y'''}$$ [1])

A. Der den Transversalen gemeinsame Punkt liegt im Endlichen.

Die drei Seiten eines Dreieckes ABC (Fig. 3) werden von drei Transversalen, die sich in einem Punkte O treffen, durchschnitten. Der gemeinsame Punkt sei gewählt als Anfangspunkt eines Parallel-Coordinatensystems mit beliebigem Achsenwinkel, α, α, b, β, c, γ seien die veränderlichen Coordinaten der Dreieckspunkte, nämlich

$$A = (a, \alpha), \quad B = (b, \beta), \quad C = (c, \gamma);$$

es sei ferner

$$\frac{AD}{DB} = \pm\frac{p}{q}, \quad \frac{AI}{IB} = \pm\frac{p'}{q'}, \quad \frac{AM}{MB} = \pm\frac{p''}{q''}$$

$$\frac{BE}{EC} = \pm\frac{r}{s}, \quad \frac{BG}{GC} = \pm\frac{r'}{s'}, \quad \frac{BL}{LC} = \pm\frac{r''}{s''}$$

$$\frac{CF}{FA} = \pm\frac{t}{u}; \quad \frac{CH}{HA} = \pm\frac{t'}{u'}, \quad \frac{CK}{KA} = \pm\frac{t''}{u''}$$

wobei p, q, p', q', p'', q'' u. s. w. die absoluten veränderlichen Längen der Seiten-Abschnitte bedeuten, und die Teilverhältnisse positiv zu nehmen sind für die innere, negativ für die äussere Teilung, und es gelte für die Seite AB die Richtung von A nach B, für BC von B nach C und für CA von C nach A als positive Richtung, so ist

$$D = \left(\frac{pb \pm qa}{p \pm q}, \frac{p\beta \pm q\alpha}{p \pm q}\right), \quad I = \left(\frac{p'b \pm q'a}{p' \pm q'}, \frac{p'\beta \pm q'\alpha}{p' + q'}\right)$$

$$M = \left(\frac{p''b \pm q''a}{p'' \pm q''}, \frac{p''\beta \pm q''\alpha}{p'' \pm q''}\right)$$

$$E = \left(\frac{rc \pm sb}{r \pm s}, \frac{r\gamma \pm s\beta}{r \pm s}\right), \quad G = \left(\frac{r'c \pm s'b}{r' \pm s'}, \frac{r'\gamma \pm s'\beta}{r' \pm s'}\right)$$

$$L = \left(\frac{r''c \pm s''b}{r'' \pm s''}, \frac{r''\gamma \pm s''\beta}{r'' \pm s''}\right)$$

---

1) Salmon-Fiedler, anal. Geom. d. Kegelschn. § 42, 43.

$$F = \left(\frac{ta \pm uc}{t \pm u};\ \frac{t\alpha \pm u\gamma}{t \pm u}\right),\quad H = \left(\frac{t'a \pm u'c}{t' \pm u'},\ \frac{t'\alpha \pm u'\gamma}{t' \pm u'}\right)$$
$$K = \left(\frac{t''a \pm u''c}{t'' \pm u''},\ \frac{t''\alpha \pm u''\gamma}{t'' \pm u''}\right)$$

Mit Benutzung der in der Einleitung zuletzt erhaltenen Formel gelangt man zu den folgenden Ausdrücken für die Verhältnisse der Abschnitte, in welche die verschiedenen Strecken der Transversalen durch die Dreiecksseiten geteilt werden. Durch die vier innerhalb der Klammern befindlichen Buchstaben ist die Aufeinanderfolge der Punkte entsprechend den Punkten (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), $(x^{IV}\ y^{IV})$ der Formel angezeigt.

$(O,\ E,\ A,\ B)$

$$\frac{OD}{DE} = -\frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha-\beta)\dfrac{re \pm sb}{r \pm s} - (a-b)\dfrac{r\gamma \pm s\beta}{r \pm s} + a\beta - b\alpha}$$
$$= -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{r}{r \pm s}(c\alpha - c\beta - a\gamma + b\gamma + a\beta - b\alpha)} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{r.}{r \pm s}S}$$

$(O,\ D,\ B,\ C)\quad S = c\alpha - c\beta - a\gamma + b\gamma + a\beta - b\alpha$

$$\frac{OE}{ED} = -\frac{b\gamma - c\beta}{(\beta-\gamma)\dfrac{pb \pm qa}{p \pm q} - (b-c)\dfrac{p\beta \pm q\alpha}{p \pm q} + b\gamma - c\beta}$$
$$= -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{\pm q}{p \pm q}(a\beta - a\gamma - b\alpha + c\alpha + b\gamma - c\beta)} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{\pm q}{p \pm q}S}$$

$(O,\ D,\ C,\ A)$

$$\frac{OF}{FD} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{(\gamma-\alpha)\dfrac{pb \pm qa}{p \pm q} - (c-a)\dfrac{p\beta \pm q\alpha}{p \pm q} + c\alpha - a\gamma}$$
$$= -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{p}{p \pm q}(b\gamma - b\alpha - c\gamma + a\beta + c\alpha - a\gamma)} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{p}{p \pm q}S}$$

$(O,\ F,\ A,\ B)$

$$\frac{OD}{DF} = -\frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha-\beta)\dfrac{ta \pm uc}{t \pm u} - (a-b)\dfrac{t\alpha \pm u\gamma}{t \pm u} + a\beta - b\alpha}$$
$$= -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{\pm u}{t \pm u}(c\alpha - c\beta - a\gamma + a\beta + a\beta - b\alpha)} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{\pm u}{t \pm u}S}$$

(O, F, B, C)

$$\frac{OE}{EF} = -\frac{b\gamma - c\beta}{(\beta-\gamma)\dfrac{ta \pm uc}{t \pm u} - (b-c)\dfrac{t\alpha \pm u\gamma}{t \pm u} + b\gamma - c\beta}$$

$$= -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{t}{t \pm u}(a\beta - a\gamma - b\alpha + c\alpha + b\gamma - c\beta)} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{t}{t \pm u}\, S}$$

(O, E, C, A)

$$\frac{OF}{FE} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{(\gamma-\alpha)\dfrac{rc \pm sb}{r \pm s} - (c-a)\dfrac{r\gamma \pm s\beta}{r \pm s} + c\alpha - a\gamma}$$

$$= -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{\pm s}{r \pm s}(b\gamma - b\alpha - c\beta + a\beta + c\alpha - a\gamma)} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{\pm s}{r \pm s}\, S}$$

In derselben Weise wird gefunden

$$\frac{OI}{IG} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{r'}{r' \pm s'}\, S}, \quad \frac{OG}{GI} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{\pm q'}{p' \pm q'}\, S}, \quad \frac{OH}{HG} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{\pm s'}{r' \pm s'}\, S}$$

$$\frac{OI}{II} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{\pm u'}{t' \pm u'}\, S}, \quad \frac{OG}{GII} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{t'}{t' \pm u'}\, S}, \quad \frac{OH}{HI} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{p'}{p' \pm q'}\, S}$$

$$\frac{OM}{MK} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{\pm u''}{t'' \pm u''}\, S}, \quad \frac{OL}{LK} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{t''}{t'' \pm u''}\, S}, \quad \frac{OK}{KL} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{\pm s''}{r'' \pm s''}\, S}$$

$$\frac{OM}{ML} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\dfrac{r''}{r'' \pm s''}\, S}, \quad \frac{OL}{LM} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\dfrac{\pm q''}{p'' \pm q''}\, S}, \quad \frac{OK}{KM} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\dfrac{p''}{p'' \pm q''}\, S}$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\frac{OE}{ED} \cdot \frac{DE}{OD} = -\frac{OE}{OD} = \frac{EO}{OD} = \frac{r}{r \pm s} \cdot \frac{p \pm q}{\pm q} \cdot \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}$$

$$\frac{OD}{DF} \cdot \frac{FD}{OF} = -\frac{OD}{OF} = \frac{DO}{OF} = \frac{p}{p \pm q} \cdot \frac{t \pm u}{\pm u} \cdot \frac{a\beta - b\alpha}{c\alpha - a\gamma}$$

$$\frac{OF}{FE} \cdot \frac{EF}{OE} = -\frac{OF}{OE} = \frac{FO}{OE} = \frac{t}{t \pm u} \cdot \frac{r \pm s}{\pm s} \cdot \frac{c\alpha - a\gamma}{b\gamma - c\beta}$$

und durch Multiplication dieser drei Gleichungen

$$-1 = \pm\frac{p}{q}\cdot\pm\frac{r}{s}\cdot\pm\frac{t}{u}$$

$$\frac{OH}{HG}\cdot\frac{GH}{OG} = -\frac{OH}{OG} = \frac{HO}{OG} = \frac{t'}{t'\pm u'}\cdot\frac{r'\pm s'}{\pm s'}\cdot\frac{c\alpha - a\gamma}{b\gamma - c\beta}$$

$$\frac{OG}{GH}\cdot\frac{IG}{OI} = -\frac{OG}{OI} = \frac{GO}{OI} = \frac{r'}{r'\pm s'}\cdot\frac{p'\pm q'}{\pm q'}\cdot\frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}$$

$$\frac{OI}{HI}\cdot\frac{HI}{OH} = -\frac{OI}{OH} = \frac{IO}{OH} = \frac{p'}{p'\pm q'}\cdot\frac{t'\pm u'}{\pm u'}\cdot\frac{a\beta - b\alpha}{c\alpha - a\gamma}$$

$$-1 = \pm\frac{p'}{q'}\cdot\pm\frac{r'}{s'}\cdot\pm\frac{t'}{u'}$$

$$\frac{OK}{KL}\cdot\frac{LK}{OL} = -\frac{OK}{OL} = \frac{KO}{OL} = \frac{t''}{t''\pm u''}\cdot\frac{r''\pm s''}{\pm s''}\cdot\frac{c\alpha - a\gamma}{b\gamma - c\beta}$$

$$\frac{OM}{MK}\cdot\frac{KM}{OK} = -\frac{OM}{OK} = \frac{MO}{OK} = \frac{p''}{p''\pm q''}\cdot\frac{t''\pm u''}{\pm u''}\cdot\frac{a\beta - b\alpha}{c\alpha - a\gamma}$$

$$\frac{OL}{LM}\cdot\frac{ML}{OM} = -\frac{OL}{OM} = \frac{LO}{OM} = \frac{r''}{r''\pm s''}\cdot\frac{p''\pm q''}{\pm q''}\cdot\frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}$$

$$-1 = \pm\frac{p''}{q''}\cdot\pm\frac{r''}{s''}\cdot\pm\frac{t''}{u''}$$

Auf der Seite AB ist A der erste B der zweite Punkt

„ BC „ B „ C „

„ CA „ C „ A „

Ein Abschnitt zwischen dem ersten und dem Schnittpunkte wird in der Folge stets genommen vom ersten aus, z. B. AD, BL, CF, ein Abschnitt zwischen dem zweiten und dem Schnittpunkte von diesem aus z. B DB, LC, HA.

Der Abschnitt der Transversale, dessen beide Endpunkte auf Seiten des Dreieckes ABC liegen, heisse ein „Seitensegment", derjenige, welcher zwischen einer Seite und dem gemeinsamen Punkte O liegt, mit Bezug auf diesen „Punktsegment" der Transversale.

Die Abschnitte der Seiten und die Punktabschnitte der Transversalen sind als anliegend, wenn sie einen Endpunkt gemein haben, im andern Falle als nicht anliegend bezeichnet. Die neben dem Dreiecke ABC im Gebilde vorhandenen Dreiecke heissen „Nebendreiecke". Seiten, die nicht näher bezeichnet werden, sind als Seiten des Dreieckes der Betrachtung ABC anzusehen.

Es ist

$$\frac{OE}{ED}\cdot\frac{FD}{OF}=\pm\frac{p}{q}\cdot\frac{b\gamma-c\beta}{c\alpha-a\gamma}$$

$$\frac{OH}{HG}\cdot\frac{IG}{OI}=\pm\frac{r'}{s'}\cdot\frac{c\alpha-a\gamma}{a\beta-b\alpha}$$

$$\frac{OM}{MK}\cdot\frac{LK}{OL}=\pm\frac{t''}{u''}\cdot\frac{a\beta-b\alpha}{b\gamma-c\beta}$$

daher

$$\pm\frac{p}{q}\cdot\pm\frac{r_1}{s'}\cdot\pm\frac{t''}{u''}=\frac{OE}{ED}\cdot\frac{DF}{FO}\times\frac{OH}{HG}\cdot\frac{GI}{IO}\times\frac{OM}{MK}\cdot\frac{KL}{LO}$$

oder nach Einführung der Abschnitte der Seiten und entsprechender Umformung

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}=\frac{DF}{FO}\cdot\frac{GI}{IO}\cdot\frac{KL}{LO}\times\frac{1}{\frac{DE}{EO}\cdot\frac{GH}{HO}\cdot\frac{KM}{MO}}$$

Ebenso ist

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CH}{HA}=\frac{DF}{FO}\cdot\frac{LM}{MO}\cdot\frac{HG}{GO}\times\frac{1}{\frac{DE}{EO}\cdot\frac{LK}{KO}\cdot\frac{HI}{IO}}$$

$$\frac{AI}{IB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{IH}{HO}\cdot\frac{LM}{MO}\cdot\frac{FE}{EO}\times\frac{1}{\frac{IG}{GO}\cdot\frac{LK}{KO}\cdot\frac{FD}{DO}}\qquad\text{I.}$$

$$\frac{AI}{IB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CK}{KA}=\frac{IH}{HO}\cdot\frac{ED}{DO}\cdot\frac{KL}{LO}\times\frac{1}{\frac{IG}{GO}\cdot\frac{EF}{FO}\cdot\frac{KM}{MO}}$$

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{MK}{KO}\cdot\frac{GI}{IO}\cdot\frac{FE}{EO}\times\frac{1}{\frac{ML}{LO}\cdot\frac{GH}{HO}\cdot\frac{FD}{DO}}$$

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CH}{HA}=\frac{MK}{KO}\cdot\frac{ED}{DO}\cdot\frac{HG}{GO}\times\frac{1}{\frac{ML}{LO}\cdot\frac{EF}{FO}\cdot\frac{HI}{IO}}$$

Das Product der Teilverhältnisse der Schnittpunkte je einer Transversale in Bezug auf je eine Seite ist gleich dem Producte multiplicirt mit dem reciproken Producte aus den Verhältnissen der Seiten- und derjenigen zugehörigen Punktsegmente der drei Transversalen, welche den entsprechenden Abschnitten der Seiten nicht anliegen; die vom Schnittpunkte aus genommenen Seitensegmente

in dem einen Producte sind mit den Vordergliedern, die im reciproken mit den Hintergliedern der Verhältnisse des ersten Productes Seiten desselben Nebendreieckes.

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K beziehungsweise die Halbirungspunkte der Seiten AB, BC, CA (Fig. 4) so folgt aus der ersten Gleichung

$$\frac{DE}{EO}\cdot\frac{GH}{HO}\cdot\frac{KM}{MO}=\frac{DF}{FO}\cdot\frac{GI}{IO}\cdot\frac{KL}{LO}$$

2. Gehen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so vereinfacht sich die erste Gleichung

da $$\frac{DF}{FO}=\frac{DE}{EO}=\frac{DC}{CO}$$

$$\frac{GI}{IO}=\frac{GH}{HO}=\frac{GA}{AO}$$

$$\frac{KL}{LO}=\frac{KM}{MO}=\frac{KB}{BO}$$

zu $$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}=+1 \quad \text{(Ceva's Theorem)}$$

3. Sind die Transversalen parallel zu den drei Seiten des Dreieckes ABC nämlich

$$DO \parallel BC,\quad GO \parallel CA,\quad KO \parallel AB \quad \text{(Fig. 6)}$$

so ist

$$\frac{DE}{EO}=\frac{GH}{HO}=\frac{KM}{MO}=-1$$

da die Durchschnittspunkte E, H, M im Unendlichen liegen, daher folgt aus der ersten Gleichung

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}=-\frac{DF}{FO}\cdot\frac{GI}{IO}\cdot\frac{KL}{LO}$$

oder, da

$$DB=-LO,\quad GC=-FO,\quad KA=-IO$$

$$\frac{AD}{KL}\cdot\frac{BG}{DF}\cdot\frac{CK}{GI}=+1$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich

$$\frac{IB}{KL}\cdot\frac{LC}{DF}\cdot\frac{FA}{GI}=+1$$

und aus der sechsten

$$\frac{FO}{OD}\cdot\frac{IO}{OG}\cdot\frac{LO}{OK}=+1\ ^{1})$$

Es ist

$$\frac{EO}{OD}\cdot\frac{HO}{OG}\cdot\frac{MO}{OK}=\frac{r}{r\pm s}\cdot\frac{t'}{t'\pm u'}\cdot\frac{p''}{p''\pm q''}\times\frac{p\pm q}{\pm q}\cdot\frac{r'\pm s'}{\pm s'}\cdot\frac{t''\pm u''}{\pm u''}$$

oder nach Einführung der Seiten und ihrer Abschnitte

$$\frac{EO}{OD}\cdot\frac{HO}{OG}\cdot\frac{MO}{OK}=\frac{BE}{BC}\cdot\frac{CH}{CA}\cdot\frac{AM}{AB}\times\frac{1}{\frac{DB}{AB}\cdot\frac{GC}{BC}\cdot\frac{KA}{CA}}$$

$$=\frac{BE}{DB}\cdot\frac{CH}{GC}\cdot\frac{AM}{KA}$$

Ebenso ist

$$\frac{EO}{OD}\cdot\frac{IO}{OH}\cdot\frac{KO}{OL}=\frac{BE}{BC}\cdot\frac{AI}{AB}\cdot\frac{CK}{CA}\times\frac{1}{\frac{DB}{AB}\cdot\frac{HA}{CA}\cdot\frac{LC}{BC}}$$

$$=\frac{BE}{DB}\cdot\frac{AI}{HA}\cdot\frac{CK}{LC}$$

$$\frac{FO}{OD}\cdot\frac{IO}{OG}\cdot\frac{LO}{OK}=\frac{FA}{CA}\cdot\frac{IB}{AB}\cdot\frac{LC}{BC}\times\frac{1}{\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BG}{BC}\cdot\frac{CK}{CA}}$$

$$=\frac{FA}{AD}\cdot\frac{IB}{BG}\cdot\frac{LC}{CK}\qquad\text{II.}$$

$$\frac{FO}{OD}\cdot\frac{GO}{OH}\cdot\frac{MO}{OL}=\frac{FA}{CA}\cdot\frac{GC}{BC}\cdot\frac{MB}{AB}\times\frac{1}{\frac{AD}{BC}\cdot\frac{CH}{CA}\cdot\frac{BL}{BC}}$$

$$=\frac{FA}{AD}\cdot\frac{GC}{CH}\cdot\frac{MB}{BL}$$

$$\frac{FO}{OE}\cdot\frac{GO}{OI}\cdot\frac{MO}{OK}=\frac{CF}{CA}\cdot\frac{BG}{BC}\cdot\frac{AM}{AB}\times\frac{1}{\frac{EC}{BC}\cdot\frac{IB}{AB}\cdot\frac{KA}{CA}}$$

$$=\frac{CF}{EC}\cdot\frac{BG}{IB}\cdot\frac{AM}{KA}$$

---

1) Adams, die Lehre von den Transversalen V. 1.

$$\frac{FO}{OE}\cdot\frac{IO}{OH}\cdot\frac{LO}{OM}=\frac{CF}{CA}\cdot\frac{AI}{AB}\cdot\frac{BL}{BC}\times\frac{1}{\frac{EC}{BC}\cdot\frac{HA}{CA}\cdot\frac{MB}{AB}}$$

$$=\frac{CF}{EC}\cdot\frac{AI}{HA}\cdot\frac{BL}{MB}$$

„Das Product der Teilverhältnisse des gemeinsamen Punktes O in Bezug auf die Seitensegmente der drei Transversalen zwischen je einem Seitenpaare ist gleich dem Producte aus den Verhältnissen derjenigen Abschnitte der Seiten, welche mit den Seitensegmenten ein Nebendreieck bilden und den entsprechenden Segmenten der Teilverhältnisse anliegen; von den letztern sind je zwei Vorder- sowie je zwei Hinterglieder nicht Seiten desselben Nebendreieckes".

Zur Prüfung der Uebereinstimmung im Zeichen der beiden Producte können die Abschnitte des zweiten so geordnet werden, dass die Abschnitte derselben Seite je ein Verhältniss bilden.

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Mitten von AB, BC, CA (Fig. 4), so geht aus der ersten Gleichung

$$\text{da}\quad\frac{DB}{AB}=\frac{GC}{BC}=\frac{KA}{CA}=\frac{1}{2}$$

hervor

$$\frac{EO}{OD}\cdot\frac{HO}{OG}\cdot\frac{MO}{OK}=8\frac{BE}{BC}\cdot\frac{CH}{CA}\cdot\frac{AM}{AB}$$

und aus der dritten Gleichung

$$\frac{FO}{OD}\cdot\frac{IO}{OG}\cdot\frac{LO}{OK}=8\frac{FA}{CA}\cdot\frac{IB}{AB}\cdot\frac{LC}{BC}$$

2. Gehen die Transversalen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so wird in der ersten Gleichung

$$\frac{BE}{BC}=\frac{CH}{CA}=\frac{AM}{AB}=1$$

$$EO=CO,\quad HO=AO,\quad MO=BO$$

daher ist

$$\frac{CO}{OD}\cdot\frac{AO}{OG}\cdot\frac{BO}{OK}=\frac{AB}{DB}\cdot\frac{BC}{GC}\cdot\frac{CA}{KA}$$

die dritte Gleichung nimmt die Form an

$$\frac{CO}{OD}\cdot\frac{AO}{OG}\cdot\frac{BO}{OK}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{BC}{BG}\cdot\frac{CA}{CK}$$ [1]

Für die Mitteltransversalen folgt

$$\frac{CO}{OD}\cdot\frac{AO}{OG}\cdot\frac{BO}{OK}=+8$$

3. Sind die Transversalen parallel zu den drei Seiten (Fig. 6), so wird in der dritten Gleichung

$$\frac{FA}{CA}=\frac{AD}{AB},\quad\frac{IB}{AB}=\frac{BG}{BC},\quad\frac{LC}{BC}=\frac{CK}{CA}$$

und es ergibt sich die bereits gefundene Gleichung

$$\frac{FO}{OD}\cdot\frac{IO}{OG}\cdot\frac{LO}{OK}=+1$$

Es ist

$$\pm\frac{p}{q}\cdot\pm\frac{r}{s}\cdot\pm\frac{t}{u}\times\pm\frac{p'}{q'}\cdot\pm\frac{r'}{s'}\cdot\pm\frac{t'}{u'}\times\pm\frac{p''}{q''}\cdot\pm\frac{r''}{s''}\cdot\pm\frac{t''}{u''}=-1$$

oder nach Einführung der Abschnitte und Vertauschung der Factoren

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{AI}{IB}\cdot\frac{AM}{MB}\times\frac{BG}{GC}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{BE}{EC}\times\frac{CK}{KA}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{CH}{HA}=-1$$ [2] III.

„Das Product der Teilverhältnisse sämtlicher Schnittpunkte der drei Transversalen in Bezug auf die Seiten ist gleich -1“.

Specielle Fälle.

1. Sind die Seiten in D, G, K halbirt (Fig. 4), so vereinfacht sich die Gleichung

$$\text{zu}\quad\frac{AI}{IB}\cdot\frac{AM}{MB}\times\frac{BL}{LC}\cdot\frac{BE}{EC}\times\frac{CF}{FA}\cdot\frac{CH}{HA}=-1$$

---

1) Grunerts Archiv Tl. XXVII p. 345, Adams, Transv. X.

2) Die Gleichung gilt auch bei beliebiger gegenseitigen Lage der drei Transversalen. Carnot, Geom. der Stellung Tl. II p. 232.

2. Gehen DO, GO, KO beziehungsweise durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so verwandelt sich die Gleichung zunächst in

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}\times\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}=-1$$

nach der sechsten Gleichung der Gruppe II

$$\text{ist}\quad\frac{AI}{MB}\cdot\frac{BL}{EC}\cdot\frac{CF}{HA}=\frac{FO}{OE}\cdot\frac{IO}{OH}\cdot\frac{LO}{OM}$$

welche Gleichung beim Uebergange auf die in der Figur 5 gegebenen Grenzlage die Form annimmt

$$\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}=\frac{CO}{OC}\cdot\frac{AO}{OA}\cdot\frac{BO}{OB}=-1$$

daher folgt

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}=+1\quad\text{(Ceva's Theorem)}$$

3. Ist $DO\parallel BC$, $GO\parallel CA$, $KO\parallel AB$ (Fig. 6), so ist

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CH}{HA}=-1$$

daher

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{AI}{IB}\times\frac{BG}{GC}\cdot\frac{BL}{LC}\times\frac{CK}{KA}\frac{CF}{FA}=+1\ ^{1})$$

Es ist

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{r}{r\pm s}=-\frac{a\beta-b\alpha}{S}$$

$$\frac{OG}{GH}\cdot\frac{t'}{t'\pm u'}=-\frac{b\gamma-c\beta}{S}$$

$$\frac{OK}{KM}\cdot\frac{p''}{p''\pm q''}=-\frac{c\alpha-a\gamma}{S}$$

folglich

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{r}{r\pm s}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{t'}{t'\pm u'}+\frac{OK}{KM}\cdot\frac{p''}{p''\pm q''}=-1$$

oder

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{BE}{BC}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{CH}{CA}+\frac{OK}{KM}\cdot\frac{AM}{AB}=-1$$

Auf dieselbe Weise wird gefunden

---

1) Adams, Transv. V. 2.

$$\frac{OE}{ED}\cdot\frac{DB}{AB}+\frac{OH}{HG}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{OM}{MK}\cdot\frac{KA}{CA}=-1 \qquad \text{IV.}$$

$$\frac{OF}{FD}\cdot\frac{AD}{AB}+\frac{OI}{IG}\cdot\frac{BG}{BC}+\frac{OL}{LK}\cdot\frac{CK}{CA}=-1$$

$$\frac{OD}{DF}\cdot\frac{FA}{CA}+\frac{OG}{GI}\cdot\frac{IB}{AB}+\frac{OK}{KM}\cdot\frac{AM}{AB}=-1$$

$$\frac{OE}{EF}\cdot\frac{CF}{CA}+\frac{OH}{HG}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{OM}{ML}\cdot\frac{BL}{BC}=-1$$

$$\frac{OF}{FE}\cdot\frac{EC}{BC}+\frac{OI}{IH}\cdot\frac{HA}{CB}+\frac{OL}{LK}\cdot\frac{CK}{CA}=-1$$

u. s. f.

Im Ganzen können 48 Gleichungen dieser Art gebildet werden.

„Die algebraische Summe der drei Producte aus den Verhältnissen der Punktsegmente, von welchen je zwei nicht Seiten desselben Nebendreieckes sind, zu den zugehörigen Seitensegmenten der drei Transversalen, und den Verhältnissen der Abschnitte, welche mit den Seitensegmenten als Seiten desselben Nebendreieckes erscheinen und den Punktsegmenten nicht anliegen, zu ihren Seiten ist gleich — 1.

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Mitten der Seiten AB, BC, CA (Fig. 4), so liefert die zweite Gleichung

$$\frac{OE}{ED}+\frac{OH}{HG}+\frac{OM}{MK}=-2$$

die dritte

$$\frac{OF}{FD}+\frac{OI}{IG}+\frac{OL}{LK}=-2\ ^{1})$$

2. Gehen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so folgt aus der ersten und vierten Gleichung

$$\frac{OD}{DC}+\frac{OG}{GA}+\frac{OK}{KB}=-1$$

1) Diese Gleichung findet sich abgeleitet mit der Beschränkung, dass der gemeinsame Punkt innerhalb des Dreieckes liegt, im Progr. des kath. Gymn. zu Köln 1859.

3. Sind die Transversalen parallel zu den drei Seiten (Fig. 6), so geht aus der ersten Gleichung,

$$\text{da } \frac{BE}{DE} = \frac{CH}{GH} = \frac{AM}{KM} = 1$$

$$\text{und } OD = -BL, \quad OG = -CF, \quad OK = -AI$$

$$\text{hervor } \frac{BL}{BC} + \frac{CF}{CA} + \frac{AI}{AB} = +1$$

die zweite Gleichung geht über in

$$\frac{DB}{AB} + \frac{GC}{BC} + \frac{KA}{CA} = +1$$

Durch Subtraction dieser zwei Gleichungen von der Identität $3 = 3$ ergeben sich noch

$$\frac{LC}{BC} + \frac{FA}{CA} + \frac{IB}{AB} = +2.$$

$$\frac{AD}{AB} + \frac{BG}{BC} + \frac{CK}{CA} = +2$$

Durch Addition des Ausdruckes

$$\frac{BE}{BC} + \frac{CH}{CA} + \frac{AM}{AB}$$

zu beiden Teilen der ersten Gleichung der Gruppe IV wird erhalten

$$\frac{BE}{BC}\left(1+\frac{OD}{DE}\right) + \frac{CH}{CA}\left(1+\frac{OG}{GH}\right) + \frac{AM}{AB}\left(1+\frac{OK}{KM}\right) = -1 + \left(\frac{BE}{BC} + \frac{CH}{CA} + \frac{AM}{AB}\right)$$

nun ist

$$1 + \frac{OD}{DE} = \frac{DE+OD}{DE} = \frac{OE}{DE} = -\frac{OE}{ED}$$

ferner

$$1 + \frac{OG}{GH} = -\frac{OH}{HG}, \quad 1 + \frac{OK}{KM} = -\frac{OM}{MK}$$

daher

$$\frac{OE}{ED}\cdot\frac{BE}{BC} + \frac{OH}{HG}\cdot\frac{CH}{CA} + \frac{OM}{MK}\cdot\frac{AM}{AB} = 1 - \left(\frac{BE}{BC} + \frac{CH}{CA} + \frac{AM}{AB}\right)$$

Auf gleiche Weise wird aus den übrigen Gleichungen der Gruppe IV gefunden

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{DB}{AB}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{OK}{KM}\cdot\frac{KA}{CA}=1-\left(\frac{DB}{AB}+\frac{GC}{BC}+\frac{KA}{CA}\right)$$

$$\frac{OD}{DF}\cdot\frac{AD}{AB}+\frac{OG}{GI}\cdot\frac{BH}{BC}+\frac{OK}{KL}\cdot\frac{CK}{CA}=1-\left(\frac{AD}{AB}+\frac{BG}{BC}+\frac{CK}{CA}\right) \quad \text{V}$$

$$\frac{OF}{FD}\cdot\frac{FA}{CA}+\frac{OI}{IG}\cdot\frac{IB}{AB}+\frac{OM}{MK}\cdot\frac{AM}{AB}=1-\left(\frac{FA}{CA}+\frac{IB}{AB}+\frac{AM}{AB}\right)$$

$$\frac{OF}{FE}\cdot\frac{CF}{CA}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{OL}{LM}\cdot\frac{BL}{BC}=1-\left(\frac{CF}{CA}+\frac{GC}{BC}+\frac{BL}{BC}\right)$$

$$\frac{OE}{EF}\cdot\frac{EC}{BC}+\frac{OH}{HI}\cdot\frac{HA}{CA}+\frac{CK}{CA}\cdot\frac{OK}{KL}=1-\left(\frac{EC}{BC}+\frac{HA}{CA}+\frac{CK}{CA}\right)$$

u. s. f.

Ihre Anzahl ist 48.

„Die algebraische Summe der drei Producte aus den Verhältnissen der Punktsegmente, von welchen nicht je zwei Seiten desselben Nebendreieckos sind, zu denjenigen Seitensegmenten der drei Transversalen, welche nicht durchaus zwischen demselben Seitenpaare liegen, und den Verhältnissen der Abschnitte, welche mit den Seitensegmenten als Seiten desselben Nebendreieckes erscheinen und den Punktsegmenten anliegen, zu ihren Seiten ist gleich 1 weniger der algebraischen Summe der letzten Verhältnisse aus den Seiten und ihren Abschnitten".

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Halbirungspunkte von AB, BC, CA (Fig. 4), so liefert die zweite Gleichung

$$\frac{OD}{DE}+\frac{OG}{GH}+\frac{OK}{KM}=-1$$

die dritte

$$\frac{OD}{DF}+\frac{OG}{GI}+\frac{OK}{KL}=-1$$

2. Gehen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so ergibt sich aus der ersten und vierten Gleichung

$$\frac{OC}{CD}+\frac{OA}{AG}+\frac{OB}{BK}=-2$$

3. Sind die Transversalen zu den drei Seiten parallel (Fig. 6), so reducirt sich die zweite Gleichung auf die bereits gefundene

$$0 = 1 - \left(\frac{DB}{AB} + \frac{GC}{BC} + \frac{KA}{CA}\right)$$

B. Der den Transversalen gemeinsame Punkt liegt im Unendlichen.

Sind die drei Transversalen zu einander parallel (Fig. 7), so sind die Verhältnisse $\frac{EO}{OD}, \frac{HO}{OG}, \frac{MO}{OK}$ u. s. f., sämtlich gleich -1, $\frac{EO}{DO} = \frac{HO}{GO} = \frac{MO}{KO}$ u. s. f. gleich $+1$.

Die Gleichungen der Gruppe I gehen über in

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA} = \frac{DF}{DE}\cdot\frac{GI}{GH}\cdot\frac{KL}{KM}$$

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CH}{HA} = \frac{DF}{DE}\cdot\frac{LM}{LK}\cdot\frac{HG}{HI}$$

$$\frac{AI}{IB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CF}{FA} = \frac{IH}{IG}\cdot\frac{LM}{LK}\cdot\frac{FE}{FD}$$

$$\frac{AI}{IB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CK}{KA} = \frac{IH}{IG}\cdot\frac{ED}{EF}\cdot\frac{KL}{KM} \qquad \text{VI}$$

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CF}{FA} = \frac{MK}{ML}\cdot\frac{GI}{GH}\cdot\frac{FE}{FD}$$

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CH}{HA} = \frac{MK}{ML}\cdot\frac{ED}{EF}\cdot\frac{HG}{HI}$$

„Das Product aus den Teilverhältnissen der Schnittpunkte je einer Transversale in Bezug auf je eine Seite ist gleich dem Producte aus den Verhältnissen der vom Schnittpunkte aus genommenen Seitensegmente der Transversalen, welche mit den entsprechenden Abschnitten im ersten Producte als Seiten desselben Nebendreieckes erscheinen".

Specieller Fall.

Ist $\frac{FD}{DE} = \frac{IG}{GH} = \frac{LK}{KM} = \frac{m}{n}$ (Fig. 8)

so ist nach der ersten Gleichung

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{KA} = \left(-\frac{m}{n}\right)^3$$ [1])

Für $m = n$ besteht

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{LA} = -1$$

Aus den Gleichungen der Gruppe II geht hervor

$$\frac{BE}{DB} \cdot \frac{CH}{GC} \cdot \frac{AM}{KA} = -1$$

$$\frac{BE}{DB} \cdot \frac{AI}{HA} \cdot \frac{CK}{LC} = -1$$

$$\frac{FA}{AD} \cdot \frac{IB}{BG} \cdot \frac{LC}{CK} = -1 \qquad \text{VII}$$

$$\frac{FA}{AD} \cdot \frac{GC}{CH} \cdot \frac{MB}{BL} = -1$$

$$\frac{CF}{EC} \cdot \frac{BG}{IB} \cdot \frac{AM}{KA} = -1$$

$$\frac{CF}{EC} \cdot \frac{AI}{HA} \cdot \frac{BL}{MB} = -1$$

„Das Product aus den Verhältnissen der Abschnitte je einer Seite, durchaus genommen von dem als ersten bezeichneten Eckpunkte bis zum Schnittpunkte je einer Transversale oder von diesem bis zum zweiten Eckpunkte, und der Abschnitte, welche mit ihnen Seiten desselben Nebendreieckes sind, ist gleich -1".

In Bezug auf die Prüfung der Uebereinstimmung im Zeichen gilt das, was bei Gruppe II bemerkt ist.

Werden die Gleichungen der Gruppe IV und V durch ein Punktsegment der Transversale dividirt, so erhalten sie Formen, welche beim unbegrenzten Fortrücken des gemeinsamen Punktes O sich umwandeln in

1) Grunerts Archiv 13. Tl. XXXVII. 3.

$$\frac{1}{DE}\cdot\frac{BE}{BC}+\frac{1}{GH}\cdot\frac{CH}{CA}+\frac{1}{KM}\cdot\frac{AM}{AB}=0$$

$$\frac{1}{ED}\cdot\frac{DB}{AB}+\frac{1}{HG}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{1}{MK}\cdot\frac{KA}{CA}=0$$

$$\frac{1}{FD}\cdot\frac{AD}{AB}+\frac{1}{IG}\cdot\frac{BG}{BC}+\frac{1}{LK}\cdot\frac{CK}{CA}=0$$

$$\frac{1}{DF}\cdot\frac{FA}{CA}+\frac{1}{GI}\cdot\frac{IB}{AB}+\frac{1}{KM}\cdot\frac{AM}{AB}=0 \qquad \text{VIII}$$

$$\frac{1}{EF}\cdot\frac{CF}{CA}+\frac{1}{HG}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{1}{ML}\cdot\frac{BL}{BC}=0$$

$$\frac{1}{FE}\cdot\frac{EC}{BC}+\frac{1}{IH}\cdot\frac{HA}{CA}+\frac{1}{LK}\cdot\frac{CK}{CA}=0$$

u. s. f.

Ihre Anzahl ist 48.

„Die algebraische Summe der Producte aus den reciproken Seitensegmenten der drei Transversalen, von welchen je zwei Anfangspunkte nicht auf derselben Seite liegen, und den Verhältnissen der Abschnitte, welche mit den Segmenten der Transversalen Seiten desselben Nebendreieckes sind und den Endpunkt von diesen zu einem ihrer Endpunkte haben, zu ihren Seiten ist gleich 0".

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Halbirungspunkte von AB, BC, CA, so ist nach der zweiten Gleichung

$$\frac{1}{ED}+\frac{1}{HG}+\frac{1}{MK}=0$$

nach der dritten

$$\frac{1}{FD}+\frac{1}{IG}+\frac{1}{LK}=0$$

2. Gehen die Transversalen beziehungsweise durch D, G K und die Ecken C, A, B, so folgt aus der ersten und dritten Gleichung

$$\frac{1}{DC}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{KB}=0$$

XXVI.

Zur Zahlentheorie.

(Zweiter Artikel.)

Von

G. Speckmann.

Im Anschluss an den auf Seite 439—441 des Teiles XI. dieses Archivs veröffentlichten Aufsatz „Zur Zahlentheorie" mögen hier noch einige weitere zahlentheoretische Bemerkungen Platz finden.

I.

In dem genannten Aufsatz ist gezeigt, dass sich die natürliche Zahlenreihe in 2, 3, 4, . . . n arithmetische Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz n besteht, dadurch zerlegen lässt, dass man zunächst eine Verticalreihe mit den Zahlen 1 bis n bildet und dann eine zweite, dritte u. s. w. Verticalreihe mit den Zahlen $n+1$ bis $2n$, $2n+1$ bis $3n$ u. s. w. daneben stellt.

Für die durch diese Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe entstehenden arithmetischen Reihen gilt die allgemeine Formel

$$a + xn$$

oder, zur $m$ten Potenz erhoben

$$(1+xn)^m \begin{pmatrix} a = 1, 2, 3, \ldots x \\ x \text{ beliebig} \\ n = 0, 1, 2, \ 3 \text{ u. s. w.} \end{pmatrix}$$

Andere Formeln gewinnt man, wenn man die Zahlen der natürlichen

Zahlenreihe auf Grund der gezeigten Zerlegung in folgender Weise in Classen einteilt.

$x = 2.$

I. Classe. Zahlform $2n - 1$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 1. 3, 5. u. s. w.

II. Classe. Zahlform $2n$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 2, 4, 6, u. s. w.

$x = 3.$

I. Classe. Zahlform $3n+1$ ($n = 0, 1, 2,$ u. s. w.), Reihe 1, 4, 7, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $3n-1$) ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 2, 5, 8, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $3n$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 3, 6, 9, u. s. w.

Für diese Formen gelten, wie leicht erkennbar, die folgenden Formeln:

1) Ist die Reihenanzahl und die Differenz x der Reihenglieder eine gerade Zahl, so gelten die Formeln

$$xn+k\begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \text{ u. s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-2}{2} \end{pmatrix}$$

$$xn-k\begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \text{ u. s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\frac{x}{2}n\,(n = 1, 2, 3, \text{ u. s. w.})$$

2) Ist die Reihenanzahl und die Differenz der Reihenglieder eine ungerade Zahl, so erhält man für die Zahlformen die allgemeinen Formeln

$$xn+k\begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \text{ u. s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$xn-k \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \text{ u s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{x-1}{2} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$xn (n = 1, 2, 3, \text{ u. s. w.})$$

Erhebt man diese Formeln zur $m$ten Potenz, so kann man daraus die folgenden Binomialreihen herleiten:

1) $(xn+k)^m = (xn)^m + \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k + \ldots$

$$+ \ldots \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \text{ u. s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{x-2}{2} \end{pmatrix}$$

$$(xn-k)^m = (xn)^m - \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k$$

$$+ \ldots - \cdot \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \text{ u. s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{x-2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^m n^m \; (n = 1, 2, 3, \text{ u. s w.})$$

2) $(xn+k)^m = (xn)^m + \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k$

$$+ \ldots \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \text{ u. s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{x-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(xn-k)^m = (xn)^m - \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k$$

$$+ \ldots - \cdot \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \text{ u. s. w.} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \frac{x-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x^m n^m \; (n = 1, 2, 3, \text{ u s. w.})$$

II.

Zur Ermittelung der in der natürlichen Zahlenreihe enthaltenen Primzahlen scheint die Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe in 6 arithmetische Reihen und die daraus entnommene Darstellung der Doppelreihe $6n \pm 1$ oder für die übersichtliche Darstellung praktischer $6n \mp 1$ am geeignetsten zu sein. — Man kann indes in unendlich verschiedener Weise eine Anzahl Reihen aufstellen, in denen alle Primzahlen ausser den im Modul n enthaltenen Primfactoren

enthalten sein müssen. Ist n eine gerade Zahl, so kann man auch von vornherein die geraden Zahlen weglassen und aus den ungeraden Zahlen die Verticalreihen bilden.

Beispiele:

$n = 4.$ 1, 5, 9,
3, 7, 11, u. s. w.

In diesen beiden Reihen sind alle Primzahlen > 2 mit enthalten.

$n = 6.$ 1. 7, 13,
3, 9, 15, u. s. w.
5, 11, 17

Die Zahlen der 2. Reihe sind alle durch 3 teilbar. Die Primzahlen > 3 sind in der 1. und 3. Reihe mit enthalten.

$n = 10.$ 1, 11, 21,
3, 13, 23,
5, 15, 25, u. s. w.
7, 17, 27,
9, 19, 29

Hier sind alle Primzahlen ausser 2 und 5 in der 1., 2., 4. und 5. Reihe mit enthalten. Die 3. Reihe liefert nur Zahlen, die durch 5 teilbar sind.

$n = 12.$ 1, 13, 25
3, 15, 27
5, 17, 29, u. s. w.
7, 19, 31
9, 21, 33
11, 23, 35

Alle Primzahlen > 3 sind hier in der 1., 3., 4. und 6. Reihe mit enthalten. Die 2. und die 5. Reihe geben nur Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

Oldenburg i. G.

XXVII.

Ueber die Factoren der Zahlen.

Von

G. Speckmann.

Will man alle Primfactoren einer beliebigen Zahl Z ermitteln, so versucht man zweckmässig zunächst, ob Z durch 2^n, 3^n, 5^n teilbar ist. Dies ist bekanntlich eine leichte Sache. Eine Zahl nun welche durch 2, 3, 5 und deren Potenzen nicht teilbar ist, hat stets die Form $6n \mp 1$. In Betreff der Factoren der Zahlen von der Form $6n \mp 1$ bestehen die folgenden Gesetze:

$$(6x-1)(6y-1) = 6z+1$$
$$(6x+1)(6y+1) = 6z+1$$
$$(6x+1)(6y-1) = 6z-1$$

Schliesst man, wie oben schon angedeutet, von den Zahlen $6n \mp 1$ diejenigen aus, welche mit 5 endigen, so ist die Endziffer einer jeden dieser Zahlen = 1, 3, 7 oder 9. Wird eine teilbare Zahl, die mit 1, 3, 7 oder 9 endigt, zunächst in 2 Factoren zerlegt, so müssen diese Factoren die folgenden Endziffern haben:

Endziffer von Z:	Endziffer der Factoren:
1	1, 1 oder 3, 7 oder 9, 9
3	1, 3 „ 7, 9
7	1, 7 „ 3, 9
9	1, 9 „ 3, 3

Ist nun eine Zahl Z von der bezeichneten Form gegeben, und nennen wir die möglichen Endziffern der Factoren derselben a, b

und c, d, so lassen sich aus den Zahlen 0 bis 9 diejenigen Zahlenverbindungen herstellen, welche den Gleichungen

$$ax+by = \ldots r \quad \text{und} \quad cx+dy = \ldots r$$

genügen [1]). (r ist hier diejenige zweitletzte Ziffer von Z, welche zurückbleibt, wenn man ab resp. cd von Z subtrahirt). — Unter diesen Zahlenverbindungen muss, wenn die Factoren von Z zweistellig sind, unbedingt eine vorkommen, welche die Factoren von Z darstellt. Sind die Factoren zon Z aber mehr als zweistellig, so muss unter den Zahlenverbindungen unbedingt eine vorkommen, welche die zwei letzten Ziffern der Factoren von Z darstellt.

Es sei $Z = 2047$. Diese Zahl hat die Form $6n+1$. Die Endziffer ist eine 7. Zerlegt man Z also in 2 Factoren, so müssen diese die Endziffern 1, 7 oder 3, 9 haben. Subtrahirt man $7 \cdot 1 = 7$ von 2047, so bleibt als vorletzte Ziffer 4. Subtrahirt man $3 \cdot 9 = 27$ von 2047, so bleibt als vorletzte Ziffer 2. Im ersten Falle ist r also $= 4$ und im zweiten $= 2$. Diejenigen Zahlenverbindungen, welche den Gleichungen

$$1x+7y = \ldots 4 \quad \text{resp.} \quad 3x+9y = \ldots 2$$

genügen, sind die folgenden

I.	01	11	21	31	41	51	61	71	81	91
	47	77	07	37	67	97	27	57	87	17
II.	03	13	23	33	43	53	63	73	83	93
	49	19	89	59	29	99	69	39	09	79

Diese Zahlenverbindungen werden dadurch leicht erzeugt, dass man für jede Abteilung als erste obere Ziffer der Zahlenverbindungen fortlaufend die Zahlen 0 bis 9 nimmt und auch die Endziffer der Zahlen niederschreibt Nachdem man dann für die untere erste Ziffer der beiden ersten Zahlenverbindungen einer Abteilung passende Zahlen gefunden, welche wir mit m und n bezeichnen wollen, bestimmt man bei den übrigen Verbindungen die erste untere Ziffer dadurch, dass man zu der ersten unteren Ziffer einer vorhergehenden Zahlenverbindung die stetige Differenz $n-m$ hinzu zählt. Bei den oben angegebenen Zahlenverbindungen ist z. B. in der ersten Abteilung die stetige Differenz zwischen den unteren ersten Ziffern $= 3$ und bei den Zahlenverbindungen der zweiten Abteilung $= 7$. $\sqrt{2047}$ ist > 45

1) Bei den mit 1 endigenden Zahlen kommt noch die dritte Gleichung

$$ex+fy = \ldots = r$$

hinzu.

Es muss also ein Primfactor von $Z < 45$ sein, und es ist zu vermuten, dass auch die anderen Primfactoren von Z unter 100 liegen. Von den aufgestellten Zahlenverbindungen können wir nun diejenigen streichen, bei welchen die eine Zahl durch 3 teilbar ist, und bei welchen nicht beide Zahlen entweder von der Form $6n-1$ oder von der Form $6n+1$ sind. Nachdem dies geschehen, bleiben die Zahlenverbindungen $\begin{matrix}31\\37\\1147\end{matrix}$, $\begin{matrix}13\\19\\247\end{matrix}$, $\begin{matrix}23\\89\\2047\end{matrix}$ zurück. Von diesen Verbindungen liefert die dritte das Product 2047. Die Zahl 2047 hat also die Factoren 23 und 89.

Liegt nur der eine Factor von Z unter 100 und der andere über 100 hinaus, so setze man unter alle aufgestellten Zahlenverbindungen das Product und subtrahire jedes dieser Producte von Z. Die entstehenden Reste lassen dann erkennen, aus welchen Factoren Z zusammengesetzt ist. Es sei Z z. B. = 6847. Subtrahirt man jedes der Producte der oben schon angegebenen Zahlenverbindungen von Z, so findet sich, dass

$$6847 - 41 \,.\, 67 = 4100$$

ist. Die beiden ersten Ziffern dieses Restes sind der einen Zahl der Zahlenverbindung gleich und es ist daraus zu schliessen, dass 41 ein Factor von Z ist, und dass der anderen Zahl der Zahlenverbindung eine 1 vorgesetzt werden muss, und somit der andere Factor von $Z = 167$ ist.

In ähnlicher Weise, wie es hier bei Zahlen, deren niedrigster Factor zweistellig, geschehen, kann man auch bei Zahlen, deren niedrigster Factor eine dreistellige Zahl ist, durch Aufstellung der entsprechenden Zahlenverbindungen die beiden letzten Ziffern der Factoren und die Factoren selbst zu bestimmen suchen, wie hier kurz gezeigt werden soll. Nachdem man die Zahlenverbindungen der beiden Endziffern aufgestellt hat, setze man jeder Zahl dieser Verbindungen die erste Ziffer von $\sqrt{Z}$ vor und erniedrige diese Ziffer bei entstehenden durch 3 teilbaren Zahlen um 1. Sodann setze man unter jede Verbindung das Product und subtrahire dasselbe von Z. Unter den Resten wird dann einer bestimmte Beziehungen zu den Zahlen einer Zahlenverbindung haben. Es sei Z z. B. = 15207.

$$Z-1 \,.\, 7 = \ldots 0, \quad Z-3 \,.\, 9 = \ldots 8$$

Die in Betracht kommenden Zahlenverbindungen sind unter Voraussetzung der ersten Ziffer von $\sqrt{Z}$ die folgenden:

I.	101	111	121	131	141	151	161	171	181	191
	107	137	167	197	127	157	187	117	147	177
II.	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193
	169	139	109	179	149	119	189	159	129	199

Hier ist

$$Z - 111 \cdot 137 = 0$$

Die Factoren von Z sind also = 111 und 137. Es sei ferner

$$Z = 28907, \quad Z - 111 \cdot 137 = 13700$$

Der eine Factor von Z ist also 137 und der andere Factor ist

$$111 + 100 = 211$$

Ferner sei

$$Z = 37407, \quad Z - 111 \cdot 137 = 222000, \quad 222 \text{ ist } = 2 \cdot 111$$

Der eine Factor von Z ist = 111 und der andere Factor ist = $137 + 200 = 337$. Es sei ferner

$$Z = 59007, \quad Z - 121 \cdot 167 = 38800$$
$$121 + 167 = 288, \; 388 - 288 = 100.$$

Die Factoren von Z sind

$$121 + 100 = 221 \quad \text{und} \quad 167 + 100 = 267$$

Für das letzte Beispiel hätte besser die richtige erste Ziffer von $\sqrt{Z}$, eine 2 den Zahlenverbindungen vorangesetzt werden können.

Auch bei Zahlen, deren niedrigster Factor eine vierstellige Zahl ist, lässt sich das oben beschriebene Verfahren oft mit Erfolg anwenden. Hier sind den betreffenden Zahlenverbindungen die beiden ersten Ziffern von $\sqrt{Z}$ voranzusetzen. Hat eine Zahl mehr als 2 Primfactoren, so ist das Verfahren nach Absonderung je eines Primfactors zu wiederholen.

Oldenburg i. G.

XXVIII.

Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält.

Von

G. Speckmann.

In einer arithmetischen Reihe, in welcher das Anfangslied a und die Differenz x den gleichen Teiler k haben, kann, ausser dem Anfangsgliede, welches eine Primzahl sein kann, keine einzige Primzahl vorkommen und alle Zahlen einer solchen Reihe sind durch k teilbar. In jeder arithmetischen Reihe, in welcher Primzahlen vorhanden sind, muss also das Anfangsglied zur Differenz relativ prim sein.

Es soll nun bewiesen werden, dass in jeder unendlichen arithmetischen Reihe, in welcher das Anfangsglied zu der Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthalten sind.

Vergleicht man eine arithmetische Reihe, worin Anfangsglied und Differenz relativ prim sind, mit der Reihe der Primzahlen, so ist bei der arithmetischen Reihe der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern immer gleich; bei der Reihe der Primzahlen aber ist dieser Abstand ein ungleicher, sprunghafter. Ist nun eine arithmetische Reihe von der bezeichneten Art gegeben, so muss es, da es unendlich viele Primzahlen giebt, unendlich oft vorkommen können, dass der Abstand zwischen dem Anfangsgliede a

der arithmetischen Reihe und einer Primzahl p, also $p - a$ einem Vielfachen der Differenz x der arithmetischen Reihe gleich ist, und so oft dies der Fall ist, ist in der arithmetischen Reihe eine Primzahl enthalten. „Die Ungleichheit der Differenz zwischen den „Primzahlen und die Stetigkeit der Differenz der arithmetischen „Reihe bilden also neben dem Umstande, dass das Anfangsglied der „arithmetischen Reihe zu der Differenz derselben relativ prim ist, „den Grund dafür, dass in einer solchen arithmetischen Reihe un„endlich viele Primzahlen enthalten sein müssen".

Da jede Primzahl > 3 die Form $6n \mp 1$ hat, so kann man statt des Satzes, dass in jeder unendlichen arithmetischen Reihe, in der das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthalten sind, auch den Satz aufstellen, dass in jeder unendlichen Reihe der genannten Art unendlich viele Zahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten sein müssen. — Eine Reihe mit constanter Differenz, in der das Anfangsglied a zu der Differenz relativ prim ist, kann nämlich nie nur teilbare Zahlen oder nur Primzahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten. Jede gerade Zahl hat nun die Form $2n$ oder, auf den Modul 6 bezogen, eine der Formen $3n$, $6n \mp 2$ und jede ungerade Zahl hat die Form $2n - 1$ oder, auf dem Modul 6 bezogen, eine der Formen $6n \mp 1$, $6n + 3$. Wir können unsere Untersuchung also darauf beschränken, dass wir feststellen, ob in jeder der nachfolgenden Reihenarten, die alle Reihen, in denen das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, umfassen müssen, unendlich viele Zahlen von der Form $6n \mp 1$ vorkommen. Die Reihenarten sind diese:

	Anfangsglied:	Differenz:
1)	$6n \mp 1$	$2n$
2)	$6n + 3$	$6n \mp 2$
3)	$6n$	$6n \mp 1$
4)	$6n \mp 2$	$6n \mp 1$
5)	$6n \mp 2$	$6n + 3$
6)	$6n \mp 1$	$6n + 3$
7)	$6n + 3$	$6n \mp 1$

Setzt man in der ersten Reihenart die Differenz $= s(2n)$ und lässt s die Zahlen $0, 1, 2 \ldots \infty$ durchlaufen, so wird in der betr. Reihe mindestens so oft eine Zahl von der Form $6n \mp 1$ enthalten sein, als in der Reihe $0, 1, 2 \ldots \infty$ eine Zahl vorkommt, die ein Vielfaches von 3 ist, denn

$$3r \,.\, 2n = 6rn \quad \text{und} \quad 5rn + 6 \mp 1$$

ist stets eine Zahl von der Form $6n \mp 1$. Ein Vielfaches von 3 kommt in der Reihe 0, 1, 2 . . . ∞ aber unendlich oft vor. Bei der zweiten Reihenart entsteht so oft eine Zahl von der Form $6n \mp 1$, als s in $s(6n \mp 2)$ beim Durchlaufen der Reihe 0, 1, 2 . . . ∞ ein Vielfaches von 2 darstellt, das nicht durch 3 teilbar ist. Bei der dritten Reihenart entsteht so oft eine Zahl von der Form $6n \mp 1$, als s in $s(6n \mp 1)$ eine ungerade Zahl darstellt, die nicht durch 3 teilbar ist. Bei der 4., 5. und 6. Reihenart ist jede ungerade Zahl der Reihe (mit Ausnahme der durch 3 teilbaren ungeraden Zahlen) eine Zahl von der Form $6n \mp 1$. Durchläuft bei der 7. Reihenart s in $s(6n \mp 1)$ die Reihe 0, 1, 2 . . . ∞, so wird in der betr. arithmetischen Reihe immer dann eine Zahl von der Form $6n \mp 1$ entstehen, wenn s eine gerade Zahl darstellt, die nicht durch 6 teilbar ist. — In jeder Reihe der vorstehend behandelten Arten müssen also unendlich viele Zahlen von der Form $6n \mp 1$ vorkommen und folglich müssen auch in jeder unendlichen arithmetischen Reihe mit bestimmter Differenz, in der das Anfangsglied a zu der Differenz x relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthalten sein.

Oldenburg i. G.

XXIX.

Miscellen.

1.

Projective Lösung einer geometrischen Aufgabe.

Ein Kreisbogen, dessen Mittelpunktswinkel und Pfeilhöhe gegeben ist, kann dadurch gezeichnet werden, dass man zuerst den Halbmesser desselben trigonometrisch berechnet und hierauf den für denselben gefundenen Ausdruck construirt. Besonders einfach gestaltet sich aber die Lösung dieser Aufgabe mittelst projectiver Geometrie.

Durchschneidet man Fig. 1. vom Scheitel a aus die Schenkel des gegebenen Winkels mit einer beliebigen Zirkelöffnung, so erhält man die Punkte x. Die Sehne xx schneidet die Halbirungslinie des Winkels in b, der Bogen dieselbe in b'. Wäre bb' gleich der gegebenen Pfeilhöhe h, so wäre die Aufgabe gelöst. Die Punkte b und b' bilden aber ein homologes Punktepaar zweier ähnlichen Punktreihen, wenn der Halbmesser ax des Bogens variirt. Die Sehnen xx bilden nämlich dann ein Parallelstrahlenbüschel, weshalb die Punktreihen x und b perspectivisch liegen. Die Punktreihe b' ist aber jener x congruent, daher mit b projectivisch. Wird der Halbmesser ax unendlich gross, so fallen b und b' in's Unendliche, daher sind die conlocalen Punktreihen b und b' ähnlich, und man erkennt, dass a ein Doppelpunkt derselben ist.

Trägt man von b' aus auf der Halbirungslinie immer gegen den Scheitel die Pfeilhöhe auf, so erhält man eine neue Punktreihe β, welche mit jener b' congruent ist. Diese Punktreihe gehört nach früherem auch α an, wenn $a\alpha$ gleich der Pfeilhöhe gemacht wird.

Die Punktreihe β ist nun jener b projectiv. und wenn β mit b zuzusammenfällt, so ist die Aufgabe 'gelöst. Man hat daher nur den im Endlichen befindlichen Doppelpunkt der conlocalen ähnlichen Punktreihen β und b zu ermitteln. Dieser kann nun mit den Winkelbrettchen allein gezeichnet werden.

Man ziehe irgendwo eine Parallele P zur Halbirungslinie des Winkels und schneide dieselbe durch irgend zwei Parallele, die man durch α und β gezogen hat, in α' und β'. Dann ist die Punktreihe $\alpha'\beta'$ . . . project. ab . . ., und beide liegen perspectivisch, da sich im Unendlichen homologe Punkte decken. Der Schnittpunkt 0 der Verbindungslinien $\alpha' a$ und $\beta' b$ ist demnach das Centrum der Perspectivität und die durch dasselbe gezogene Parallele zu $\alpha\alpha'$ muss die Halbirungslinie in dem verlangten Doppelpunkte d schneiden. Errichtet man in diesem eine Senkrechte auf die Halbirungslinie, so trifft diese die Schenkel des Winkels in den Endpunkten des verlangten Bogens.

Ebenso einfach ergibt sich jetzt die Lösung der Aufgabe:

„Man zeichne eine Kugelzone, von der gegeben sind die Höhe und die ihren Kreisen entsprechenden Mittelpunktswinkel".

Auflösung. Man zeichne zunächst die zwei gegebenen Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel a so, dass die Winkelflächen aufeinander liegen, und die Halbirungslinien sich decken. Hierauf schneide man die vier Schenkel derselben mit dem nämlichen Kreisbogen von a aus, wodurch man auf den Schenkeln des grösseren Winkels die Punkte x, auf jenen des kleineren die Punkte y erhält. Die Punktreihen x and y sind congruent, wenn der Halbmesser des Bogens variirt. Zieht man die dem Bogen in beiden Mittelpunktswinkeln entsprechenden Sehnen xx und yy, so erhält man auf der gemeinschaftlichen Halbirungslinie die Punkte b und B, welche homologe Punkte zweier ähnlichen Punktreihen sind, wenn der Bogen variirt. Trägt man auf der Halbirungslinie des Winkels von B aus gegen den Scheitel die Höhe der Zone h auf, so erhält man den Punkt β. Fällt β mit b zusammen, so ist die Aufgabe gelöst. Die Punktreihe β ist aber mit jener B congruent, daher mit b projectiv, man hat demnach nur den im Endlichen gelegenen Doppelpunkt d der conlocalen ähnlichen Punktreihen zu bestimmen. Diese Ermittlung erfolgt genau so wie in Fig. 1., weshalb von einer besonderen Figur abgesehen wurde. Die in d auf die Halbirungslinie errichtete Senkrechte schneidet den Schenkel des grösseren Winkels in dem

Endpunkte des Halbmessers der der Zone zugehörigen Kugel. Die Kugelzone erscheint hierauf in der Zeichnung auf eine durch ihre Achse gehende Ebene orthogonal projicirt.

Wien, im Januar 1893.

Wilhelm Rulf.

2.

Beliebig weit angenäherte π-Construction.

Im zweiten Anhang von Dr. E Glinzer's reichhaltiger Planimetrie (in 4. Auflage 1891 bei Gerhardt Kühtmann in Dresden erschienen) findet sich seit der 3. Auflage von 1887 eine schöne Construction zur beliebigen Annäherung an die Länge des Kreisumfanges, die von Prof. Dr. Herm. Schubert in Hamburg herrührt. Sie benutzt die Tangenten an eine Folge spiralig geordneter Halbkreise und gründet sich auf die beiden bekannten cyklometrischen Sätze des Archimedes vom harmonischen und geometrischen Mittel:

$$u' = \frac{2ue}{u+e}$$

$$e' = \sqrt{u'e}$$

wo e und u die Halbumfänge des ein- und umgeschriebenen regelmässigen $n$ecks, e' und u' dasselbe für's $2n$-eck bedeuten.

Nun pflegt man jedoch bei der elementaren π-Berechnung neuerdings (z. B. Mehler in seinen Hauptsätzen der Elem.-Math.) jenen Satz vom harmonischen Mittel zu vermeiden und benutzt vielmehr die bequeme Relation

$$\frac{e'}{e} \quad \text{oder} \quad \frac{u'}{u} = \frac{r}{\varrho'}$$

wo r den Radius des ursprünglichen Kreises, ϱ' den sogenannten kleinen Radius des $2n$ ecks, d. h. den Abstand seiner Seite vom Centrum bezeichnet.

Drum lag der Gedanke nahe, ob nicht auch bei der constructiven Rectification des Kreises die entsprechende Vereinfachung sich anbringen liesse.

Dies gelingt in der Tat auf folgende Weise:

$ABCD$ sei der Halbumfang eines regelmässigen Sechseckes, eingeschrieben in den Halbkreis AD, und in A die Tangente AT gezogen. Auf der verlängerten Seite AB mache man

$$AE = e_6 = 3 \text{ Radiuslängen}$$

Hierauf werde Wkl. EAT halbirt (oder, was dasselbe wäre, die Zwölfecksseite verlängert), in E das Lot auf AE errichtet und bis zum Schnitte F mit der Halbirenden gezogen. Dann ist

$$AF = e_{12}$$

In gleicher Weise durch fortgesetztes Winkelhalbiren und Lotenrichten bekommt man e_{24}, e_{48} . . . . Gar bald sind für die benutzten Zeichengeräte die Längen der Strecken e_4 und e_{24} nicht mehr unterscheidbar; von da ab hat man lauter Kreisradien aus A. Und wird nun auf AT die Strecke AZ solang wie diese letzten Strecken gemacht, so ist

AZ die gesuchte Halbkreislänge.

Zum Beweise hierfür genügt es, den vorhin erwähnten Quotienten $\frac{r}{\varrho}$ trigonometrisch auszudrücken. Es ist nämlich

$$\frac{e_{24}}{e_4} = \frac{r}{\varrho_{24}} = 1 : \cos\frac{180^0}{24}$$

Erste Anmerkung. Wenn man das Lot EF und ebenso die folgenden Lote verlängert bis zum Schnitte mit AT, so bekommt man auf dieser Tangente die Halbumfänge der umgeschriebenen Vielecke. Werden nun ausserdem die Längen AE, AF . . . sämtlich auf AT übertragen, so zeigt sich anschaulich, wie das gesuchte AZ in engere und immer engere Grenzen eingeschlossen wird.

Zweite. Selbstverständlich kann man, wie vom Sechseck, so auch von jedem andern regelmässigen Vieleck ausgehen.

Leipzig, December 1891.

Dr. J. E. Böttcher. *)

3.

Zur Zahlentheorie. (Artikel III.)

In meinem, in diesem Archiv, Reihe 2, Band XII. Pag. 431 abgedruckten Aufsatze „Zur Zahlentheorie“ habe ich gezeigt, dass

*) Die Schrift d. Hrn. Wasserbaudirectors Chr. Nehls „über graphische Rectification von Kreisbögen“ Hamburg 1882 geht von fast denselben Grundgedanken aus.

sich die natürliche Zahlenreihe in 2, 3, . . . n arithmetische Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz n besteht, dadurch zerlegen lässt, dass man zunächst eine Verticalreihe mit den Zahlen 1 bis n bildet und dann eine zweite, dritte u. s. w. Verticalreihe mit den Zahlen $n+1$ bis $2n$, $2n+1$ bis $3n$ u. s. w. daneben stellt

Aus dieser Zerlegungsart der natürlichen Zahlenreihe geht hervor, dass man die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe in unendlich verschiedener Weise in Classen einteilen kann.

Für die Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe in $n = 2, 3, 4, 5, 6$ arithmetische Reihen mag beispielsweise die Einteilung in Classen hier folgen.

$n = 2$

I. Classe. Zahlform $2n-1$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w), Reihe 1, 3, 5, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $2n$ ($n = 1, 2. 3$, u. s. w.), Reihe 2, 4, 6 u. s. w.

$n = 3.$

I. Classe. Zahlform $3n-1$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w), Reihe 2, 5, 8, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $3n+1$ ($n = 0, 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 1, 4, 7, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $3n$ ($n = 1, 2. 3$, u. s. w), Reihe 3, 6, 9, u. s. w.

$n = 4.$

I. Classe. Zahlform $2n$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 2, 4, 6, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $4n-1$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 3, 7, 11, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $4n+1$ ($n = 0, 1, 2, 3$, u. s. w., Reihe 1, 5, 9, u. s. w.

$n = 5.$

I. Classe. Zahlform $5n-1$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 4, 9, 14, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $5n+1$ ($n = 0, 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 1, 6, 11, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $5n-2$ ($n = 1, 2, 3$, u s. w), Reihe 3, 8, 13, u. s w.

IV. Classe. Zahlform $5n+2$ ($n = 0, 1, 2, 3.$, u. s. w.), Reihe 2, 7, 12, u. s. w.

V. Classe. Zahlform $5n$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 5, 10, 15, u. s. w.

$n = 6.$

I. Classe. Zahlform $6n-1$ ($n = 1, 2, 3,$ u s. w), Reihe 5, 11, 17. u. s. w.

II. Classe. Zahlform $6n+1$ ($n = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 1, 7, 13, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $6n-2$ ($n = 1, 2, 3,$ u s. w), Reihe 4, 10, 16, u s. w.

IV. Classe. Zahlform $6n+2$ ($n = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 2, 8, 14, u. s. w.

V. Classe. Zahlform $3n$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 3. 6, 9, u. s. w

In jeder dieser 5 Abtheilungen sind also alle Zahlen der natürlichen Zahlenreihe enthalten.

Oldenburg i. G.

G. Speckmann.

4.

Das Dreieck bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen.

Es ist in der Ebene ein rechtwinkliges Axensystem der xy gegeben. Man soll in allgemeinstem Ausdruck das Dreieck darstellen, dessen Hauptträgheitsaxen jene Axen sind.

Seien x_1y_1. x_2y_2, x_3y_3 die Coordinaten, a_1, a_2, a_3 die Gegenseiten der Ecken A_1, A_2, A_3. Geht man von einer Ecke A_1 aus längs a_3 um eine variable kleinere Strecke a_3u bis N und von N längs der Geraden $NA_3 = n$ um eine variable kleinere Strecke nv bis P, so ist P ein variabler Punkt, der das ganze Dreieck Δ erzeugt, wenn u und v von 0 bis 1 variiren.

Die Coordinaten von P sind

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\,u(1-v) + (x_3 - x_1)\,v \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\,u(1-v) + (y_3 - y_1)\,v \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

woraus als Functionsdeterminante hervorgeht:

$$D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (1-v) = D'(1-v)$$

Hiernach ist der Dreiecksinhalt

$$\Delta = \int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \,.\, D = \tfrac{1}{2} D'; \text{ mithin } D = 2\Delta(1-v)$$

Nach Einsetzung der Werte (1) gibt eine leichte Integration die statischen Momente

$$\int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \,.\, Dx = \tfrac{1}{2}\Delta(x_1+x_2+x_3)$$

$$\int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \,.\, Dy = \tfrac{1}{2}\Delta(y_1+y_2+y_3) \text{ sowie das Integral}$$

$$\int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \,.\, Dxy = \frac{\Delta}{12}\{(2x_1+x_2+x_3)y_1+(x_1+2x_2+x_3)y_2 + (x_1+x_2+2x_3)y_3) \qquad (2)$$

Diese 3 Grössen müssen für Hauptträgheitsaxen null sein. Die vollständigen Bedingungen unserer Aufgabe sind also:

$$x_1+x_2+x_3=0; \quad y_1+y_2+y_3=0; \quad x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$$

Nach Elimination von x_3 und y_3 lässt sich das Resultat schreiben:

$$(x_2+\tfrac{1}{2}x_1)(y_2+\tfrac{1}{2}y_1)+\tfrac{3}{4}x_1y_1=0 \qquad (3)$$

Geometrisch gedeutet ergibt es folgendes.

Eine Ecke A_1 ist willkürlich. Die zweite A_2 liegt beliebig auf der gleichseitigen Hyperbel (3), deren Asymptoten den Hauptträgheitsaxen parallel sind. Ihren Mittelpunkt K findet man, indem man den Radiusvector A_1O über den Anfangspunkt O hinaus um die halbe Länge OK verlängert. Ihre reelle Axe halbirt die 2 Scheitelwinkel der Asymptoten, innerhalb deren A_1 nicht liegt. Ihre Scheitel ergeben sich aus der Potenz $\frac{3}{4}x_1y_1$. Die dritte Ecke ist der Endpunkt der Verlängerung von A_2K um ihre Länge.

Die Hauptträgheitsmomente erhält man aus dem Integral (2), indem man y für x und x für y schreibt. Sie sind also:

$$X = \frac{\Delta}{12}(y_1^2+y_2^2+y_3^3); \quad Y = \frac{\Delta}{12}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

d. h. für das Dreieck dieselben wie für das System gleichbelasteter Ecken.

R. Hoppe.

Litterarischer Bericht

XLV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von Moritz Cantor. Zweiter Band, von 1200—1668. Erster Theil. Leipzig 1892. B. G. Teubner. 499 S.

Der hier behandelte Zeitraum ist leer an wissenschaftlich mathematischer Forschung, aber nicht leer an instructiven Punkten und Momenten historischen Interesses. Betrieben wird in der Tat nur das kaufmännische Rechnen und die Feldmesskunst, der Unterricht pflanzt fast nur die mathematischen Kenntnisse der Griechen und Araber fort; dennoch erwachsen aus jenen praktischen Bestrebungen mancherlei ideelle Früchte, wenn gleich ohne regelmässige Entwickelung, öfters unterbrochen durch Rückschritt und Unklarheiten, hervor, in denen man die Anfänge der Begriffe und Formen der heutigen Mathematik nachweisen kann, namentlich bildet sich die Algebra und Trigonometrie durch Inangriffnahme elementarer Probleme allmählich aus. Das vorliegende Werk zeichnet sich durch Vielseitigkeit der ans Licht gezogenen Gegenstände, durch eingehende historische Kritik, sowie durch populären Styl vorteilhaft aus. Die Geschichte wird an das Leben der mehr oder weniger hervorragenden Autoren angeknüpft, auf deren Tätigkeit alle Fragen der Entwickelung der Doctrin zurückführen; abgesehen von den einzelnen Personen wird aber auch über die Gründung der Universitäten und deren Verhalten zur Mathematik Nachricht gegeben. Wenn gleich im Verhältniss zu den geringen wissenschaftlichen Leistungen jener

Zeit das Buch einen grossen Umfang gewonnen hat, so wird man bei Durchlesung schwerlich etwas überflüssig zu ihrer Charakterisirung finden. In der Tat hat der Verfasser einen ziemlich hohen Grad der Unbedeutendheit zur Grenze der Erörterung genommen; doch dient das Beigebrachte noch immer als Beispiel der herrschenden eigentümlichen Ideen und Meinungen. Folgenden Männern wird der Reihe nach ein Platz in der Geschichte der Mathematik erteilt: Leonardo von Pisa, Jordanus Nemorarius, Johannes de Sacrobosco, Johannes Campanus, Richard von Wallingford, Johannes Maudith, Bradwardinus, Raimundus Lullus, Johannes de Muris, Petrus von Dacien, Jahannes de Lineriis, Dominicus Parisiensis, Nicole Oresme, Albertus de Saxonia, Henricus Hassianus, Conrad von Jungingen, Paolo Dagomari, Biagio da Parma, Johann von Gemunden, Peurbach, Nicolaus Cusanus, Prosdocimo de *Beldomandi*, Jakob von Cremona, Johannes Widmann, Regiomentanus, Ratdolt, Alberti, Lionardo da Vinci, Treviso, Luca Pacinola, Chuquet, Lefèvre, Georg Valla, Orontius Finacus, Alfons X von Spanien, Petro Sanchez, Ciruelo, Silicius, Gaspar Lax, Juan de Ortego, Petro Nuñez, Stifel, Johannes Werner, Peter Apianus, Albrecht Dürer, Koppernikus, Memmius, Cardanus, Luigi Ferrari, Tartaglia u. a.

H.

Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie von Professor Dr. H. Weissenborn. Berlin 1892. Mayer u. Müller. 123 S.

Am Titel ist das Wort „Einführung“ auffällig, welches weder durch die Schrift selbst noch durch irgend etwas bekanntes gerechtfertigt erscheint. Soviel auch Gerbert für die Annahme der indischen Ziffern durch eigenen Vorgang gewirkt hat, so zeigt doch die Geschichte der nachfolgenden 5 Jahrhunderte keine Spur eines dauernden Einflusses: die römischen Zahlzeichen bleiben nach wie vor bei allen Rechnungen, sogar den astronomischen in Gebrauch; auch in Betreff der Zeitgenossen Gerberts kommt der Verfasser gar nicht auf die Frage, ob jemand seine Zahlenschrift adoptirt hat. Eingeführt hat also, wie wir sagen ohne ein Wort des Textes zu bestreiten, Gerbert die indischen Ziffern nicht; er ist ein Vorläufer des im 16. Jahrhundert beginnenden Umschwungs in der systematischen Gestaltung der Arithmetik, der gerade wegen der langen Zwischenzeit um so mehr historisches Interesse bietet. Das vorliegende Buch schliesst sich an ein 5 Jahre früher erschienenes: „Beiträge zur Kenntniss der Mathematik des Mittelalters“ — an. In jenem mag manches angegeben sein, was man im gegenwärtigen

vermissen kann (z. B. Heimat und Lebenszeit von Gerbert). Was aber nicht wol möglich war in jenem so befriedigend zum Abschluss zu bringen, dass es hätte jetzt übergangen werden dürfen, ist doch die Frage nach dem Standpunkt von Gerbert's Rechenlehre, namentlich da der Verfasser selbst erklärt, dass die spärlichen Nachrichten nicht erlauben irgend welche sichere Schlüsse zu ziehen. Hierüber findet sich Folgendes angegeben. Gerbert kannte und gebrauchte die 9 Ziffern der Araber mit arabischen Namen. Letztere waren auf die Rechenmarken geschrieben, während Andere lauter gleiche Marken anwandten. Von schriftlichem Rechnen ist nicht die Rede. Die Einrichtung seines Abacus ist unbekannt. Die Null war zu seiner Zeit bekannt, galt aber als etwas verschiedenes von den Ziffern. Er wandte sie nie an (natürlich, wenn er wirklich nur mit Abacus rechnen lehrte). Aus alledem ist keine Spur von scientivem Fortschritt zu erkennen. Der Verfasser erwähnt, dass schon die Griechen das Rechnen mit Abacus nicht als Teil der Arithmetik betrachteten. In der Tat ist es nur eine momentane Arbeit ohne Gewinn für den Verstand. Auch der praktische Vorteil der 9 Ziffern ist unwesentlich. Hätte sich also wirklich Gerbert's Lehre nur in der angegebenen Weise unterschieden, so wäre kaum ein Motiv zur Wahl der arabischen Ziffern, als etwa Vorliebe für das Fremde, ersichtlich. Aus den vorliegenden Angaben lässt sich zweierlei entnehmen. Erstens, die Einrichtung des Abacus ist keine traditionell feststehende, daher auch wol schwerlich eine aus dem Altertum stammende, wie Viele vorauszusetzen scheinen, sondern hängt vom Ermessen der einzelnen Lehrer ab. Zweitens, die Null (zero) ist ein Element in der derzeitigen Rechenlehre, das aber ohne Verständniss (von den Arabern) aufgenommen zu sein scheint. Dafür tritt hier als ein neues Zeugniss die Bemerkung ein, dass die Null begrifflich nicht als Ziffer aufgefasst werde. Noch mehr zu der Annahme gedrängt sind wir durch die von Boncompagni im 15. Bande des Bulletino ans Licht gezogene ganz rätselhafte Aufstellung zweier Schriftsteller, die übereinstimmend erklären, zero bedeute eine der 9 Ziffern, aber nicht die Null. Zur Hauptfrage jedoch macht der Verfasser diese: Von wem hat Gerbert das Rechnen gelernt? — und zwar handelt es sich von Anfang bis Ende darum, ob ein gewisser Josephus sapiens, auch Hispanus genannt, sein Lehrer gewesen, was über denselben näheres zu ermitteln sei, und mit welchen Männern des Namens Joseph er wol identisch sein könne. Offenbar ist das Interesse an jener Frage in Bezug auf Gerbert ganz durch die sachliche Bestimmung bedingt, was dieser von Joseph gelernt haben soll; die blosse Tradition der alten Rechenkunst kann über die Gestaltung von Gerbert's Lehre und deren Quelle keinen Aufschluss geben. Eine solche Unterweisung hat der Verfasser nicht gemeint;

um also überhaupt den Gegenstand seiner Untersuchung verständlich auszusprechen, war eine Berührung des specifischen Lehrinhalts, d. h. keine blosse Aussage (wie auf Seite 14) dass ein solcher vorhanden gewesen, nicht zu umgehen, und darauf kommt er nie zu sprechen. Das Buch bietet sehr viel litterarischen Stoff. Die Citate stehen meist in Zwischensätzen des Textes und sind ausführlicher behandelt in einer grossen Anzahl angehängter Noten. Da sie zufälligen Anlass haben, so ist es wenig wahrscheinlich, dass sie beanspruchen etwas erschöpfendes oder eine Auswahl des Instructivsten zu geben. H.

Bilder aus der Geschichte der Physik. Für Freunde der Naturwissenschaften und für Studirende an höheren Schulen. Von Dr. Eugen Netoliczka, kaiserl. Rath, Professor der Physik i. R. in Graz, Ritter des k. k. österreichischen Franz-Josef-Ordens, Besitzer der gold. Medaille für Kunst und Wissenschaft und des Verdienstkreuzes des grossherz. Mecklenburgischen Ordens der wendischen Krone. Nach des Verfassers Tode fortgesetzt und durchgesehen von Dr. A. Wachlowski, k. k. Gymnasial-Professor. Wien und Leipzig 1891. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 258 S.

Das Buch gibt in der Kürze das Wichtigste, was dem Zwecke historischer Ausbildung entspricht, und zeugt in allen Stücken von einer richtigen Auffassung seiner Aufgabe. Dem, was die Vorrede zur Begründung der Notwendigkeit historischen Betreibens der Wissenschaft ausspricht, müssen wir sogleich zu näherer Bestimmung hinzufügen, dass es sich um das Werden der heutigen Wissenschaft handelt. Wir haben nicht die alten Forscher in ihrem dunkeln Suchen zu begleiten, sondern deren Wege mit dem gewonnenen Lichte zu erhellen und irrige Gedanken von richtigen zu unterscheiden. Erst nachdem man mehr zu dieser Praxis übergegangen ist, und die Aeusserungen der Alten im Sinne der jetzigen Ideen zu deuten versucht, hat sich gezeigt, dass die alte Zeit der Physik weniger fremd ist, als es früher schien. Man muss es darum auch als möglich zulassen, dass manche reifere Erkenntnisse Einzelner nur darum mit deren Ableben untergegangen sind, weil ihre Zeitgenossen sie nicht zu würdigen verstanden. Das vorliegende Buch zeichnet sich dadurch aus, dass es die moderne Perspective entschieden zum Princip der Darstellung macht; demgemäss bilden auch die Zweige der heutigen Physik die Themata der einzelnen Abschnitte. Dass der Schüler auch die begangenen Irrtümer kennen lernen muss, wird in der Vorrede betont und in der Ausführung danach verfahren. Die Notwendigkeit tritt am deutlichsen in der Erfahrung zutage, dass die „Freunde der Naturwissenschaft", welche

zur Zeit keine Forscher sind, sich die Wege der Entdeckung viel zu kurz denken, begreiflicherweise, weil sie über alles, was ihnen gewöhnlich und im allgemeinen geläufig ist, ohne Beachtung hinweg zur neuen Entdeckung eilen Dieser Umstand zeigt, wie in der Tat die Ungründlichkeit im Betreiben der Wissenschaft im nächsten Zusammenhange steht mit dem Mangel historischer Bildung, d. h. derjenigen, welche die Wissenschaft nicht bloss auf ihrem neuesten Standpunkt kennt Die Geschichte wird hier der Zeit nach nur in die des Altertums, des Mittelalters und der Neuzeit, letztere beginnend in der Mitte des 18. Jahrhunderts, eingeteilt. Von jedem dieser Zeitabschnitte wird zuerst ein allgemeines Bild entworfen, doch ist auch dieses mit allen erreichbaren tatsächlichen Angaben verbunden, so dass an manchen Stellen der Ueberblick durch blosse Zusammenordnung der Tatsachen gegeben wird. Hierauf folgen, in Bezug auf das Altertum, die Mechanik, Optik, Akustik, Magnetismus, Elektricität, kosmische Physik und Chemie. Für alle diese Zweige sind die Stellen zusammengesucht, aus denen wir über die Kenntnisse, technische Verwendung und Erklärungsversuche der Alten irgend etwas entnehmen können. Alles dies zeigt, dass hinreichender Trieb vorhanden war die von Natur gegebenen Erscheinungen so genau als möglich zu beobachten und aus den Resultaten Schlüsse auf die Gesetze und Ursachen derselben zu ziehen, dass sich aber nirgends der Gedanke findet die Entscheidung über Fragen der letztern durch das Experiment zu suchen. Da der Verfasser hierdurch die Physik der Alten charakterisirt, so lag wol nichts näher als die neue Zeit von da an zu rechnen, wo das Experiment als Quelle der Naturerkenntniss principiell erkannt und klar ausgesprochen ist, und das ist nicht im 18., sondern im 17. Jahrhundert durch Bako geschehen. Die Reihe von Entdeckungen, welche aus dem neuen Forschungsprincip in schneller Folge hervorwuchsen, und die den schroffsten Gegensatz gegen den Charakter des Mittelalters zeigen, bringt trotzdem der Verfasser mit zum Mittelalter — man findet schwerlich ein anderes Motiv als demselben einen Anteil an historischer Bedeutung, die ihm sonst zu sehr mangelt, zuzuwenden. Die Geschichte der Neuzeit, wie sie im Buche heisst, stellt sich nun als reine Fortsetzung der im zweiten Abschnitt behandelten dar. Je mehr sie sich der Gegenwart nähert, desto mehr musste natürlich der Umstand auf die Abfassung Einfluss üben, dass die Lösung und Entscheidung immer neuer Fragen der Zukunft vorbehalten bleibt, dass also der Bearbeiter nicht mehr in der Lage ist von reiferem Standpunkt über die auftretenden Ansichten zu urteilen. Dem entsprechend hat hier der Verfasser die sonst beobachtete Kürze und Uebersichtlichkeit aufgegeben und ausführlicher über die für wichtig erachteten Arbeiten der an den neuern Entdeckungen beteiligten Forscher berichtet. H.

Geschichte der Physik. Von Dr. E. Gerland, Dozent für Physik und Elektrotechnik an der Königlichen Bergakademie zu Clausthal i. H. Mit 72 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1892. J. J. Weber. 356 S.

Das Buch gehört als Nr. 4. zu Weber's „Naturwissenschaftlicher Bibliothek." Die Geschichte der gesamten Physik ist hier ohne Scheidung der Zweige in einen fortlaufenden Faden chronologischer Folge mit grossem Geschick verarbeitet, in lebensvoller und dabei stets exacter Sprache, der es auch nicht an den erforderlichen positiven Angaben mangelt. Man lernt alles einzeln im Durchlesen; dahingegen bleibt die Aufgabe sich über den jeweiligen Standpunkt der physikalischen Erkenntniss zu unterrichten ganz dem Leser überlassen. Die Quellen sind im Texte nie angegeben; zum Ersatze folgt am Schlusse ein Litteraturverzeichniss; Verweisung auf dasselbe findet nicht statt. H.

Ueber den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. Vortrag gehalten im Rathhaus zu Zürich am 5. Februar 1891. Von Dr. F. Rudio, Professor in Zurich. Hamburg 1892. Verlagsanstalt und Druckerei A. G. 33 S.

Der Vortrag ist in erster Linie eine begeisterte Lobpreisung der Mathematik für Zuhörer, welche derselben vermutlich fern stehen, und zwar durch Musterung ihrer Geschichte, aus welcher viele Züge geeignet Hochschätzung zu erwecken vorgeführt werden. Namentlich wird darauf hingewiesen, dass die Blütezeit der Culturvölker immer mit neuen mathematischen Erkenntnissen, erhöhten Leistungen der Mathematik und eifrigerer Hinneigung zu ihr verbunden auftritt. Obgleich es nirgends ausgesprochen noch nachgewiesen wird, so scheint doch die Rede überall darauf abzuzielen, dass man das Betreiben der Mathematik ohne weiteres als Ursache der gleichzeitigen Cultur auffassen soll, und den Gedanken fernzuhalten, dass bei erwachtem Culturleben neben andern Wissenschaften natürlicherweise auch die Mathematik nicht fehlen wird. Was endlich die Renaissance betrifft, so kommt nur das Wort öfters vor, von ihrem Wesen und der Zeit ihrer Erscheinung ist nie die Rede. H.

Wilhelm Weber. Eine Lebensskizze von Heinrich Weber, Professor an der Herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig. Mit einem Bildnis aus dem Jahre 1884. Breslau 1893. Eduard Trewendt. 111 S.

Indem die Schrift die Lebensgeschichte W. Weber's — Sohnes des Prof. der Theologie Michael W., geb. d. 24. Oct. 1804 in Wittenberg, gest. den 23. Juni 1891 in Göttingen — ohne Abschweife erzählt, werden uns zugleich ein ansehnlicher Kreis von Gelehrten ersten Ranges, mit denen er im Umgang stand, und bekannte Begebenheiten, die auf seine Schicksale und seine Tätigkeit bestimmend wirkten, vorgeführt, letztere noch besonders Interesse erregend durch wörtliche Mitteilung von Urkunden und Correspondenzen. Die ersten 2 Abschnitte umfassen die Studienjahre in Halle und Berlin; von letzterem Universitätsbesuche datiren die meisten freundschaftlichen Beziehungen. Nun folgen die 4 Perioden von Weber's Lehr- und Forschertätigkeit: von 1831 bis 1837 als Professor in Göttingen, dann nach Amtsentsetzung in der Zwischenzeit bis 1843, dann als Professor in Leipzig, dann nach seiner Wiederberufung 1849 in Göttingen. Ueber seine wissenschaftliche Tätigkeit, die wol eine sehr concentrirte, ohne fremde Teilnahme und litterarischen Verkehr gewesen sein mag, verhält sich die Erzählung ziemlich schweigsam: die Gegenstände werden kaum mehr als dem Titel nach genannt; erst in der letzten Periode wird auf manches mehr eingegangen; dafür wird der Leser durch Züge des Charakters entschädigt.

H.

Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnissrede gehalten in der Aula des Königlichen Friedrichs-Wilhelms-Gymnasiums am 29. October 1892 von Felix Müller. Mit einem Bildnis Schellbach's. Berlin 1893. Georg Reimer. 35 S.

Die angegebenen äussern Facta betreffend das Leben des Verewigten sind folgende. Er ist geb. d. 25. Dec. 1804 auf der Reise nach seiner Vaterstadt Eisleben, unterrichtet daselbst auf dem Gymnasium, studirte Mathematik, Physik und Philosophie von 1824 an in Halle, zog 1829 nach Berlin, promovirte 1834 in Jena, lehrte von da an bis 1841 am Friedrich-Werder'schen, dann am Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium, von 1843 an zugleich an der Königl. Kriegsakademie und gehörte seit jener Zeit zur wissenschaftlichen Prüfungscommission, war lange Zeit Lehrer des Kronprinzen Friedrich Wilhelm, nachherigen Kaisers Friedrich, gründete 1855 das mathematisch-pädagogische Seminar, war beteiligt an der Herausgabe des Crelle'schen Journals, trat 1889 in den Ruhestand und starb d. 29. Mai 1892. Die Rede beleuchtet sehr eingehend seine vielseitige Tätigkeit innerhalb und ausserhalb der Schule, entwickelt diejenigen seiner pädagogischen Grundsätze, welche der Redner selbst adoptirt

und als von ihm in seinem Unterrichte empfangen darstellt, und führt in ihrem Verlaufe viele seiner Schriften und Reden auf. Der gedruckten Ausgabe der Rede ist die vollständige Zusammenstellung dieser Schriften am Schlusse beigefügt. H.

Sammlungen.

Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie analytique à deux dimensiones (et géometrie supérieure) à l'usage des classes de mathématiques Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Paris 1893. Gauthier Villars et fils. 311 S.

Diese Aufgaben sind aus den bedeutendsten französischen mathematischen Zeitschriften seit 1842 vom Verfasser ausgezogen, geordnet und mit Verweisungen versehen. Einige darunter verlangen den Beweis aufgestellter Sätze. Sie sind nicht ausschliesslich für Schulen, sondern zum Teil für die reine Wissenschaft bestimmt, auch kommen Aufgaben berühmter Autoren vor. Von vielen Aufgaben sind Lösungen bereits veröffentlicht; die Autoren der Fragen sind, *soweit* der Verfasser sie hat ermitteln können, stets angegeben, und die Lösungen citirt. Die Hauptabschnitte sind: Gebilde aus Geraden und Kreisen, Kegelschnitte, algebraische Curven, transcendente oder allgemeine Curven, geometrische Oerter, Enveloppen, bewegte Gebilde. H.

100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Mit 104 Abbildungen. Von Dr. Karl Schwering, Oberlehrer und Professor. Freiburg i. Br. 1891. Herder. 152 S.

Der 1. Teil enthält 60 planimetrische, der 2te 40 stereometrische mannichfaltige, hinsichtlich der Schwierigkeit absichtlich gemischte, für Erweckung des Interesses ausgewählte Aufgaben. Nicht nur die Lösungen und Beweise, sondern auch alles, was zur Analysis und Determination gehört, sowie die anzuwendenden Sätze stehen ausführlich dabei. Sie sind darauf berechnet mit einem beliebigen Lehrbuche verbunden gebraucht zu werden. H.

Planimetrische Aufgaben für den Gebrauch im Schul-, Privat- und Selbstunterricht bearbeitet von Prof. Dr. F. Reidt, Oberlehrer

am Gymnasium zu Hamm. Erster Teil. Aufgaben geordnet nach den Lehrsätzen des Systems. Zweite Auflage. Breslau 1890. Eduard Trewendt. 96 S.

Im 26. litt. Bericht S. 15 ist der 2. Teil in 1. Auflage besprochen. Was daselbst zur Charakterisirung des Ganzen gesagt ist, trifft auch in Betreff des jetzt erschienenen Teils vollkommen zu. Etwas hinzuzufügen ist kein Anlass. H.

Die wichtigeren Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Für den Schulgebrauch und zum Selbststudium zusammengestellt und aufgelöst von Waldemar Madel. Berlin 1892. Max Rüger. 63 S.

Es sind 305 Combinationen zu 3 aus den Seiten, deren Summen, Differenzen und Quadratsummen, Höhen, deren Summen und Differenzen, Inhalt, Um- und Inkreisradius und Winkeln als gegebene Bestimmungsstücke des Dreiecks zuerst in Zeichen tabellarisch aufgestellt. Dann wird für jede dieser Combinationen der Weg der successiven Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel durch Angabe der auf logarithmische Rechnung eingerichteten Formeln angezeigt. H.

Goerling's Rechenbuch, Hand- und Hilfsbuch für höhere und Subalternbeamte, Militäranwärter und Praktikanten, welche zum Zwecke ihrer Anstellung oder Beförderung in höhere Amtsstellungen eine Prüfung im Rechnen abzulegen haben. Zwölfte Auflage. Leipzig 1892. Ad. Gestewitz Nachf. 104 S.

Das Buch gibt in sehr geschickter Abfassung ohne Voraussetzung besonderer Schulbildung ausreichende Anweisung zum Rechnen, und zwar umfasst es die 4 Species in Ganzen, gemeinen und Decimalbrüchen, Proportionen, Quadrat- und Kubikwurzelausziehung, Procent-, Disconto-, Wechselrechnung, Zins- und Zinseszinsrechnung, Mischungsrechnung, Kettenrechnung, Buchstabenrechnung, Flächen- und Körperberechnung, Aufgaben aus der Mechanik, vorher Auskunft über die Erfordernisse der Prüfungen. H.

5000 Aufgaben nebst Resultaten aus der Bruchrechnung — — und:

Arithmetisches Quellsalz für Freunde des Rechnens. Von

Ferd. Roese. Wismar 1890. Hinstorff. 46 S. $13\frac{1}{2} \times 10\frac{1}{2}$ cm. und 176 S. $5\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{2}$ cm.

Ein grosser Vorrat an numerischen Exempeln auf kleinem Raume. H.

Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. Von Dr v. Zech, Prof. a. D. Zweite Auflage unter Mithilfe von Dr. C. Cranz, Docent der technischen Hochschule Stuttgart. Stuttgart 1891. J. B. Metzler. 225 S.

Die Aufgaben gehören zu folgenden 10 Teilen der Mechanik: Zusammensetzung der Kräfte, Gleichgewicht in der Ebene, im Raume, virtuelle Verschiebungen, Gleichgewicht mit Reibung, Graphostatik, Dynamik des Punktes, Stoss, Festigkeit, Hydrostatik, Drehung um feste Axe, Dynamik der Körper. Sie sind ohne jede willkürliche Specialisirung, lassen sich sogar bald mehr, bald weniger als Anhang zur Theorie selbst rechnen. Die 2. Auflage ist vermehrt durch Aufnahme mancher Aufgaben von C. W. Baur. H.

Aufgaben aus der Physik nebst einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend. Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht. Von Prof. Dr. C. Fliedner, Gymnasialprorector a. D., Inhaber des Roten Adlerordens IV. Classe. Siebente, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Prof. Dr. G. Krebs in Frankfurt a. M. Mit 74 in den Text eingedruckten Holzstichen — — und:

Auflösungen zu den Aufgaben aus der Physik etc. s. o. Mit 122 in den Text eingedruckten Holzstichen. — Braunschweig 1891. Friedrich Vieweg und Sohn. 134 + 23 + 197 S.

Die Aufgabensammlung ist sehr reichhaltig und vielseitig. Die Auswahl schliesst sich sichtlich der technischen Verwendung an. Aufgaben, welche bloss nach Quantitäten fragen, also Berechnung fordern, bieten sich natürlich am leichtesten dar und sind auch hier in grösster Anzahl vorhanden. Die Data sind, nach Vorausschickung einiger Aufgaben, welche das allgemeine Verfahren in Erinnerung bringen, in bestimmten Zahlen aufgestellt. Bei manchen Aufgaben werden auch Constructionen verlangt. Nun erstrecken sich die Aufgaben aber auch in ziemlichem Umfange auf Experimente. Bei diesen scheint Beschreibung derselben als genügende Lösung betrachtet werden zu sollen; wieviele die Schüler ausführen können, bleibt natürlich vorbehalten. H.

Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine grosse Anzahl von Fragen und Aufgaben. Anhang für höhere realistische Lehranstalten (Realgymnasien, Oberrealschulen u. s. w.) bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. — — Und:

Resultate zu dem Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Anhang. Herausgegeben von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock 1892. Wilh. Werther. 70 + 30 S.

Dies Buch gehört als Anhang zu dem gleichbetitelten, welches im 33. litt. Bericht S. 32 besprochen ist. Es behandelt gleicherweise die Gleichungen 3. und 4. Grades, die Auflösung numerischer Gleichungen durch Näherung, den Moivre'schen Lehrsatz, Potenziren und Radiciren complexer Zahlen, Auflösung binomischer Gleichungen $n$ten Grades, unendliche Reihen und Maxima und Minima der Functionen. H.

Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von K. Jüdt, K. Professor und Rektor der Realschule in Ansbach. Vierte, vermehrte Auflage. Ansbach 1891. Fr. Seybold. 61 S.

Die Anordnung entspricht den Cursen der bairischen Gymnasien und Realschulen und ist mittelst h. Ministerial-Entschliessung denselben zum Gebrauche empfohlen. Demgemäss enthält der 1. Teil Aufgaben zur Stereometrie, grösstenteils Körperberechnung, der 2te zur ebenen Trigonometrie. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik. 2. Bd. Von 1200—1668. 2. Thl. Leipzig, Teubner. 10 Mk.; 2. Thl. kplt. 24 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1886. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 42. Jahrg. 2. Abth. Berlin, Georg Reimer. 17 Mk.

Joannis Geometrae carmen de S. Pantaleemone, integrum ed. L. Sternbach, Krakau, Buchh. d. poln. Verlags-Ges. 3 Mk.

Lindemann, üb. die uns erhaltenen Bücher aus der *Bibliothek* d. Copernikus. — Ueber die Hypothesen der Geometrie. Königsberg, Koch. 15 Pf.

Mahler, E., der Kalender der Babylonier. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Riemann's, B., gesammelte mathematische Werke u. wissenschaftlicher Nachlass. Hrsg. v. H. Weber. 2. Aufl., bearb. v. H. Weber. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Methode und Principien.

Bieler, A., schulgemässe Behandlung der Geometrie in Bürger- und Mittelschulen. Für Lehrer u. Seminaristen bearb. (In 2 Tln.) 1. Tl.: Die Grundlehren der Geometrie. Hannover, Meyer. 1 Mk.

Hoffmann, G., die Anderssohn'sche Drucktheorie u. ihre Bedeutung f. die einheitliche Erklärung der physischen Erscheinungen. Halle, Schwetschke'scher Verl. 1 Mk.

Kublin, S., die Bewegungen der Elemente. Eine kosmisch-tellur. Studie. Fünfkirchen, Engel. 60 Pf.

Mewes, R., Kraft u. Masse, Bilder d. Kosmos. (Identität der Naturkräfte.) 1. Tl. Berlin, Exp. d. „Immaterialgüter." 2 Mk.

Sachse, F. J., der praktische, geistbildende u. erziehliche Unterricht im Rechnen u. in der Raumlehre. 1. Tl. Allgemeine Lehrkunde d. Rechenunterrichts. 2. Aufl. Osnabrück, Wehberg. 2 Mk. 25 Pf.

Weinhold, K., Glücksrad u. Lebensrad. Berlin, Georg Reimer. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Wenzel, L., logische Operationen in der Mathematik u. beim mathematischen Unterrichte. (Fortsetzung.) Progr. Klagenfurt, v. Kleinmayr. 1 Mk.

Lehrbücher.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik, f. den Schulunterricht bearb. 4. Tl. Stereometrie. Nebst Uebungsaufgaben. 22. Aufl. Breslau, Hirt, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Wimmenauer, Th., die Elemente der Mathematik f. Gymnasien, nach den neuen Lehrplänen bearb. 1. Tl.: Arithmetik. 2. Afl. Ebd. 2 Mk.

Sammlungen.

Braun, W., Rechenbuch f. die unteren Klassen v. Mittelschulen. 1. Tl. Das Rechnen m. ganzen Zahlen. 3. Aufl. Bamberg, Uhlenhuth's Buchh. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1128.—1147. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Knies, K., u. O. Bachmann, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. unbestimmten Zahlen. 1. Tl. 4. Aufl. München, Kellerer. 1 Mk. 20 Pf.

Madel, W., die wichtigsten Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Für den Schulgebrauch u. zum Selbstudium zusammengestellt u. aufgelöst. Berlin, Rüger, Verl. 1 Mk. 80 Pf.

Roeder, H., Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Breslau, Hirt, Verl. 1 Mk. 35 Pf.

Sachs, S., Auflösungen der im M. Hirsch, Sammlung v. Beispielen u. s. w. enth. Gleichungen u. Aufgaben. 13. Aufl. v. G. Valentin. Altenburg, H. A. Pierer. 5 Mk.

Sammlung v. Formeln aus dem Gebiete der Algebra, Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie, Mechanik u. Astronomie, zusammengestellt f. den Schulgebrauch. 3. Aufl. Würzburg, Stahel, Verl. 50 Pf.

Schubert, H., Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra f. Real- u. Bürgerschulen. Ein Auszug aus der Sammlung v. arithmet. u algebr. Fragen u. Aufgaben. Potsdam, Stein. 1 Mk.

Stubba, A., Sammlung algebraischer Aufgaben, nebst Anleitg. zur Auflösg. derselben durch Verstandesschlüsse. 12. Aufl., bearb. v. K. Backhaus. Altenburg, H. A. Pierer. 2 Mk.

Wrobel, E., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra, enth. die Formeln, Lehrsätze u. Auflösungsmethoden in systemat. Anordng. u. e. grosse Anzahl v. Fragen u. Aufgaben. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen u. andern höheren Lehranstalten bearb. 1. Tl. Die 7 arithmet. Operationen, Proportionen, Gleichungen 1. Grades m. 1 u. mehreren Unbekannten. Anh.: Quadratische Gleichgn. m. 1 Unbekannten. 2. Aufl. Rostock, Werther's Verl. 2 Mk. 60 Pf.; geb. 3 Mk.

Tabellen.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 37. Aufl. Halle, Strien. Geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

Kahle, P., Sonnen- u. Sterntafel f. Deutschland, Oesterreich u. die Alpen. Zur Bestimmg. der Himmelsrichtg. u. Zeit nach dem Stand der Sonne u. Sterne im geograph. Unterricht, bei *topograph.* Aufnahmen u. auf Reisen. Nebst erläut. Text u. e. Uebersichtskarte v. Mitteleuropa zur Bestimmg. d. Unterschiedes zwischen Ortszeit u. der mitteleurop. Einheitszeit (M. E. Z.). Aachen, C. Mayer's Verl. 1 Mk. 35 Pf.

Nell, A. M., fünfstellige Logarithmen der Zahlen u. der trigonometrischen Funktionen, nebst den Logarithmen f. Summe u. Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind, sowie einigen anderen Tafeln, m. e. neuen, die Rechnung erleichternden Anordng. der Proportionaltheile. 7. Aufl. Darmstadt, Bergsträsser, Verl. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Scherer, Hülfstafel zur Berechnung rechtwinkeliger Coordinaten (Kreis 360°) m. Scherer's logarithmisch-graphischer Rechentafel. Cassel, Klaunig. 1 Mk.

Schlömilch, O., fünfstellige logarithmische u. trigonometr. Tafeln. Wohlfeile Schulausgabe. 11. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk.

Seiffert, O., logarithmische Hilfstafel zur Berechnung der Fehlervergleichungs-Koeffizienten beim Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate. Halle, Strien, Verl. 2 Mk.

Westrick, F. A., fünfstellige Logarithmen f. den Schulgebrauch. Münster, Aschendorff'sche Buchh. Geb. 1 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bachmann, P., Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Bork, H., u. F. Poske, Hauptsätze der Arithmetik, f. die Unter- u. Mittelklasse höherer Lehranstalten zusammengestellt. 3. Aufl. Berlin, Georg Reimer. Kart. 60 Pf.

Gegenbauer, L., üb. einige arithmetische Determinanten höheren Ranges. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 10 Pf.

Gmeiner, J. A., das allgemeine bicubische Reciprocitätsgesetz. Ebd. 50 Pf.

Hirsch, A., zur Theorie der linearen Differentialgleichung m. eindeutigem Integral. Königsberg, Koch. 20 Pf.

Krazer, A., u. F. Prym, neue Grundlagen e. Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Kurz zusammengestellt u. hrsg. v. A. Krazer. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

Krug, A., zur linearen Differentialgleichung 3. Ordnung. Prag, Dominicus. 2 Mk.

Mertens, F., der Fundamentalsatz der Algebra. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Geometrie.

Bensemann, H., Lehrbuch der ebenen Geometrie f. höhere Schulen. Dessau, Baumann's Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Eberle, J, F., üb. rationale Curven 5. Ordnung, insbesondere diejenigen 4. u. 5. Classe. München, Lindauer'sche Buchh. 1 Mk.

Hegele, A., die Fundamentalaufgaben der darstellenden Geometrie. Progr. Straubing, Hirmer. 2 Mk.

Köstler, H., Vorschule der Geometrie. 7. Aufl. Halle, Nebert's Verl. Kart. 50 Pf.

Opderbecke, A., die darstellende Geometrie, bearb. f. den Unterricht an techn. Fachschulen u f. den Selbstunterricht. Höxter, Buchholtz'sche Buchh. In Mappe 4 Mk.

Puchta, A., üb. die allgemeinsten abwickelbaren Räume, e. Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Reiser, N., die grossen Diagonalen. (Deutsch u. französisch.) München, Callwey, Verl. 7 Mk. 50 Pf.

Salberg, J. A., geometrische Wandtafeln. 12 Taf. (11 Taf. 74,5 × 100,5 cm.; 10 Taf. à 4 Bl. 58 × 54 cm.) Bamberg, Buchner, Verl. 7 Mk. 50 Pf.

Seipp, H., Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). 1. Tl.: Die Lage v. geraden Linien u. Ebenen im Raum. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Sendler, R., Raumlehre f. Präparandenanstalten. Breslau, Handel's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Simon, M., Leitfaden der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauche f. höhere Lehranstalten. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Spieker, Th., kurze Anleitung zum Lösen der Uebungsaufgaben d. Lehrbuchs der ebenen Geometrie f. höhere Lehranstalten. Potsdam, Stein. 1 Mk. 20 Pf.

— Lehrbuch der ebenen Geometrie m. Uebungsaufgaben f. höhere Lehranstalten. 20. Aufl. Ebd. 2 Mk. 50 Pf.; geb. 2 Mk. 90 Pf.

— dasselbe. Ausg. B. Für mittlere Klassen. 3. Aufl. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Sucharda, A., üb. die bei e. Gattung centrischer Rückungsflächen der 4. Ordnung auftretende Reciprocität. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Sturm, R., die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Thl. Der lineare Complex od. das Strahlengewinde u. der tetraedale Complex. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Zahler, X., geometrisches Linearzeichnen f. Mittelschulen München, Oldenbourg. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Trigonometrie.

Hribar, E., Elemente der ebenen Trigonometrie. Zum Schulgebrauch u. zum Selbststudium dargestellt. Freiburg, Herder. 1 Mk. 20 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Gauss, F. G., die trigonometrischen u. polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 2. Aufl. (In 9 Heften.) 1.—3. Hft. Halle, Strien. à 3 Mk. 50 Pf.

Gross, H., die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie. Leitfaden f. den Unterricht an techn. Lehranstalten etc. 3. Aufl. Stuttgart, Wittwer's Verl. 2 Mk.

Mechanik.

Klimpert, Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). I. Bd.: Die Bewegungserscheingn. flüss. Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden v. Gefässen, sowie durch Röhren

u. Röhrenleitgn. bei konstanter, sowie veränderl. Druckhöhe fliessen. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Julius Maier. 8 Mk.

Lauenstein, R., Leitfaden der Mechanik. Elementares Lehrbuch f. techn. Mittelschulen u. zum Selbstunterricht. Stuttgart, Cotta'sche Buchh. Nachf. 3 Mk.

Technik.

Bibliothek, elektro-technische. 45. Bd. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Bišcan, W., die Dynamomaschine. Zum Selbststudium f. Mechaniker, Installateure, Maschinenschlosser etc., sowie als Anleitg. zur Selbstanfertigg. v. Dynamomaschinen leichtfasslich dargestellt. Leipzig, Leiner. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Canter, O., der technische Telegraphendienst. Lehrbuch f. Telegraphen-, Post- u. Eisenbahnbeamten. 4. Aufl. Breslau, Kern's Verl. Geb. 6 Mk.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: W. Krieg. 5. Jahrg. 1892. 27. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich 3 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1890. 4. Hft. Berlin, Springer. 8 Mk.

— dasselbe. 5. Jahrg. Das Jahr 1891. 1. Hft. Ebd. 6 Mk.

Kral, J., Elemente d. Staats-Telegraphendienstes. 18. Aufl. 1. Hft. Wien, Gerold & Comp. Für 2 Hfte. 4 Mk.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch für Studirende der Elektrotechnik. 4. Aufl. Deutsche Uebersetzg. von C. Grawinkel. (In 12 Hftn.) 1. Hft. Halle, Knapp. 2 Mk.

Vogler, A., Jedermann Elektrotechniker. Anleitung zur Herstellg. der hauptsächlichsten elektr. Apparate u. elektr. Leitgn. u. zur Anstellung elekrischer Versuche. 1. Bdchn. 2. Aufl. Leipzig, Mor. Schäfer. 1 Mk. 50 Pf

Wetter, L., die Fortschritte der Privat-Telephonie. Vortrag. Köln, Neubner. 30 Pf.

— das Bergmann'sche Röhrensystem. Vortrag. Ebd. 30 Pf.

Zacharias, J., die Accumulatoren zur Aufspeicherung d. elektrischen Stromes, deren Anfertigung, Verwendung u. Betrieb. Jena, Costenoble. 9 Mk.; geb. 10 Mk 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Helmholtz, H. v., Handbuch der physiologischen Optik. 2. Aufl. 7. Lfg. Hamburg, Voss. 3 Mk.

Hüfner, Anleitung zum Gebrauche d. Hüfner'schen Spectrophotometers, in seiner neuesten verbesserten Form ausgeführt v. E. Albrecht. Tübingen, Moser'sche Buchh. 60 Pf.

Puschl, C., zur Elasticität der Gase. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Tischner, A., le mouvement de la lumière. Leipzig, Fock, Verl. 40 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Gezeitentafeln f. d. J. 1893. Hydrographisches Amt d. Reichs-Marine-Amts. Mit 14 Blättern in Steindr., enth. Darstellgn. der Gezeitenströmgn. in der Nordsee, im engl. Kanal u. der irischen See. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

Hann, J., weitere Untersuchungen üb. die tägliche Oscillation d. Barometers. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 40 Pf.

Jahrbuch, Deutsches meteorologisches, J. 1889. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1889. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. 3. Hft. Berlin, Asher & Co. 21 Mk. (1889 kplt. 27 Mk.)

Monatsberichte der deutschen Seewarte. Hrsg. v. d. Direktion. Novbr. u. Decbr. 1891. Hamburg, Friederichsen & Co. à 50 Pf.

Publikationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Hrsg. v. H. C. Vogel. Nr. 25. 7. Bd. 1. Tl. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Schneider, H., gegen Falb's kritische Tage. Eine Kritik. Berlin, Dümmler's Buchh. 50 Pf.

Schreiber, P., Untersuchung üb. das Wesen der sogenannten Bessel'schen Formel, sowie deren Anwendung auf die tägliche periodische Veränderung der Lufttemperatur. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Schubert, H., Zeitunterschiede, e. alphabet. Tabelle der mitteleurop. Zeit, Ortszeit u. Einwohnerzahl aller deutschen Orte üb. 10000 Einwohner. Hamburg, Meissner's Verl. 80 Pf.

Sternkarte, drehbare. Der Sternenhimmel zu jeder Stunde d. Jahres. Ausg. f. Mitteleuropa. 10. Aufl. Chromolith. Frankfurt, Deutsche Lehrmittelanstalt. 1 Mk. 25 Pf., transparent 1 Mk. 60 Pf.; m. Beleuchtungsapparat 1 Mk. 85 Pf.; als Lichtschirm zum Anhängen 1 Mk. 75 Pf.; m. Lichtschirmständer 5 Mk.

Veröffentlichungen d. Rechnen-Instituts der königl. Sternwarte zu Berlin. Nr. 1. Berlin, Dümmler's Verl. 4 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 2. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 fein lith. Tafeln nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. jedermann. 2. Aufl. 16.—18. (Schluss-)Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

Nautik.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. 1893. 32. Jahrg. Hrsg.: W. Ludolph. Bremen, Heinsius Nachf. 75 Pf.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1895 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. vom Reichsamt d. Innern unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Segelhandbuch f. den Indischen Ozean. Hrsg. v. der Direktion der deutschen Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. Geb. in Leinw. 30 Mk.

Physik.

Favarger, A., l'électricité et ses applications à la chromométrie. 2. ed. Genf, Stapelmohr. 6 Mk.

Gef, W., die Wärmequelle der Gestirne in mechanischem Maass, e. Beitrag zur mechan. Wärmetheorie. Heidelberg, Siebert, Verl. 1 Mk.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 12. Lfg. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Hovestadt, H., Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Grössen. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Hübner, M., Grundzüge d. Physik. Ein Merk- u. Wiederholungsbuch. 2. Aufl. Breslau, Morgenstern, Verl. Kart. 60 Pf.

Jäger, G., die Zustandsgleichung der Gase in ihrer Beziehung zu den Lösungen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Klemenčič, J., üb. das Verhalten d. Eisens gegen elektrische Schwingungen. Ebd. 20 Pf.

Krebs, G., Leitfaden der Experimentalphysik f. Gymnasien. Mit e. Anh.: Mathematische Geographie u. Grundlehren der Chemie. 3. Aufl. Wiesbaden, Bergmann. 4 Mk. 60 Pf.

Miller, A., e. experimenteller Beitrag zur Kenntniss der Verwandlung der Energieformen. Progr. München, Kellerer. 1 Mk.

Obermayer, A. v., üb. gleitende Funken. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Sanoy, J., physikalisch-ökonomische Studien. Die Bedeutung der Elektrizität f. das soziale Leben. Konstanz, Ackermann, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i./Pr. 32. Jahrg. 1891. Königsberg, Koch. 6 Mk.

Schncke, L., gemeinverständliche Vorträge aus dem Gebiete der Physik. Jena, Fischer. 4 Mk.

Waltenhofen, A. v., die internationalen absoluten Maasse, insbesondere die elektrischen Maasse, für Studirende der Elektrotechnik in Theorie u. Anwendg. Dargestellt u. durch Beispiele erläutert. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk.

Zwerger, M., Leitfaden zum Unterricht in der elementaren Physik. 1. Tl.: Von den Kräften, dem Gleichgewichte, der Wellenbewegg., dem Schalle u. der Wärme. München, Lindauer'sche Buchh. 1 Mk. 50 Pf.

Vermischte Schriften.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Himmel und Erde. Illustrirte naturwissenschaftl. Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. IV. Jahrg. Octbr. 1891 bis Septbr. 1892. 10. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Journal f. die reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Fuchs. 110. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. Für den Band 12 Mk.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. série. Tome XXVIII. Nrs. 9. u. 11. Leipzig, Voss' Sort. 3 Mk. 30 Pf.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 14 u. 15. Berlin, Herm. Paetel. à 60 Pf.

Schriften der Gesellschaft zur Förderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. 12. Bd. 5. Abhandlg. Marburg, Elwert'sche Verlagsbuchh. 1 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 101. Bd. 1.—3. Hft. Leipzig, Freytag. 6 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1892. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. unter der Red. v. O. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 37. Jahrg. 1892. Suppl. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Fig. 1.

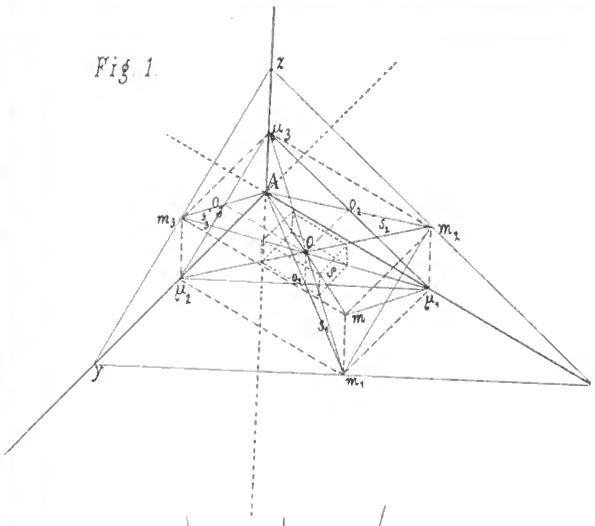
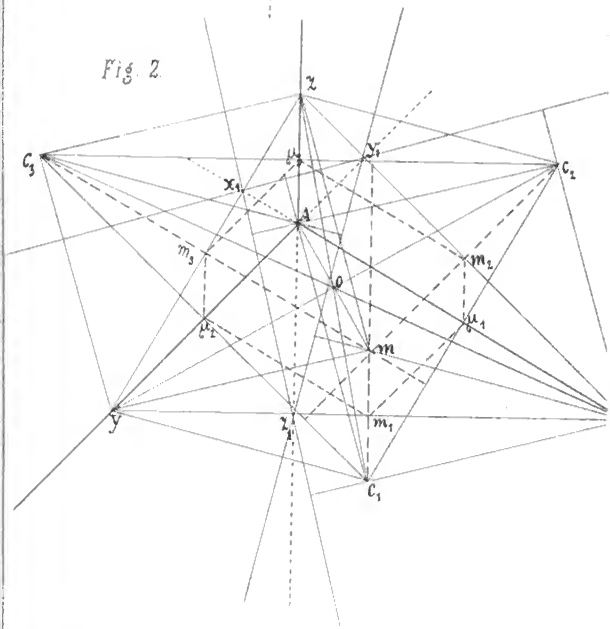


Fig. 2.



VII. Chladek: Räumliche Betrachtung der Dreieckspunkte

af. I.

Litterarischer Bericht

XLVI.

Lehrbücher.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Von Prof. Dr. Karl Wilhelm Neumann, Oberlehrer an dem Gymnasium zu Bremen. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Bremen 1892. M. Heinsius Nachfolger. 215 S.

Das Lehrbuch zeigt mit verhältnissmässig wenigen Ausnahmen grossen Fleiss in der Bearbeitung. Namentlich ist darauf gesehen, dass alles notwendige Wissen nach allen Seiten hin darin steht, gleich von Anfang auf niederer Stufe exact ausgedrückt ist, mithin keiner Correction auf höherer Stufe bedarf, und begründet wird. Besonders hervorzuheben ist, dass die 7 algebraischen Operationen systematisch entwickelt, die 4 inversen als inverse, und die Erweiterungen des Zahlbegriffs erklärt werden. Weniger ist darauf Bedacht genommen, Ueberflüssiges zu meiden, das Wichtige und Grundlegende von weitern Folgerungen zu scheiden und auf einfachstem Wege ohne fremde Einmischung herzuleiten, damit der Schüler über die Menge von Sätzen, die er zu behalten hat, eine Uebersicht gewinnt. In dieser Beziehung würde für künftige Auflagen mancherlei zu bessern bleiben. Sachlich unrichtig ist, was über den Nenner null gesagt wird. Der wichtigste Satz, dass nämlich durch 0 nicht dividirt werden kann, dass also $a:0$ kein Ausdruck für eine Zahl ist, ist gar nicht ausgesprochen. Dieser Satz allein enthält alles, was an jener Stelle zu sagen war. Was dagegen dasteht, $a:0$ sei unendlich gross, ist falsch, $0:0$ sei unbestimmt, ist undeutlich, das Hinzugefügte verwirrend und

Fehlschlüsse geradezu herbeiführend. (Hier steht nämlich, man könne in $\frac{xb}{xa}$, wenn $x = 0$ ist, vorher x herausheben!) Die Lehre von den unendlichen Grössen ist eins der Themata, über welche der Verfasser mit ungenügenden Angaben und Erkärungen hinweggeht, gerade wo sie schwer zu verstehen schienen. Sie in das Lehrbuch aufzunehmen, war an dieser Stelle gar kein Grund, wol aber ein bedeutender beim Begriffe der Irrationalzahlen, und letztern übergeht er mit Stillschweigen sowol bei den Decimalbrüchen als auch bei den Potenzwurzeln und Logarithmen. Hier ist also eine Lücke in den Erweiterungen des Zahlbegriffs. Die imaginären Zahlen werden besprochen, doch ganz ungenügend: von complexen Zahlen und Vieldeutigkeit der Wurzeln ist nicht die Rede; es soll sogar $\sqrt[2n]{-a}$ unter den Begriff von $\sqrt{-a}$ fallen! Ein Abschnitt über unendliche Reihen, der im Buche Aufnahme gefunden hat, ist völlig unbrauchbar: ihm fehlt geradezu alles um einen verständlichen Sinn zu geben. Wenn nun auch das Gerügte, sowie mancherlei logische Schwächen, die noch zu rügen bleiben würden, nur einen geringen Teil des Buches betreffen, so lässt sich dasselbe doch, bevor die erforderliche Correction stattgefunden hat, nur als ungeeignet für Schulunterricht bezeichnen, weil es Irrtümer verbreitet, den Schülern in unverstandenen Lehren ein eingebildetes Wissen beibringt und sie an gedankenloses Rechnen gewöhnt. Hoppe.

B. V. Moreira de Sá professor da Escola Normal do Porto arithmetica para uso dos lyceas e escolas normaes com um juizo critico do ex^mo^. sr. Dr. F. Gomes Teixeira Doutor na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, antigo lente da mesma faculdade, director e lente da Academica Polytechnica do Porto, socio correspondente da Academia Real des Sciencias do Lisboa, da Academia Real das Sciencias de Madrid, da Sociedade Real das Sciencias de Liége, da Sociedade Real das Sciencas de Praga, da Sociedade das Sciencias Physicas e Naturaes de Bordeus, etc. Lisboa 1891. A. Ferreira Machado e Co. 603 S.

Die Capitel des Buchs, das wir wol als das Hauptwerk für den arithmetischen Unterricht in den portugiesischen Schulen betrachten dürfen, sind folgende: Numerirung in Worten und Zeichen; Operationen; Eigenschaften der ganzen Zahlen; Brüche, gemeine, Decimalbrüche; Approximationen; Begriffe der Irrationalzahlen und Grenzwerte; Verhältnisse und Proportionen; Begriffe der negativen Zahlen; Progressionen; Logarithmen; benannte Zahlen; bürgerliche

Rechnungen. Jedes dieser Themata wird in Definitionen, Lehrsätzen, Aufgaben und Ausrechnungsregeln behandelt. Charakteristisch für das Ganze ist, dass jede Definition und jeder Lehrsatz auf alle möglichen Weisen umgestaltet wird; vielleicht sollen diese verschiedenen Wendungen des gleichen Gedankens zur Prüfung des Verständnisses dienen. Gegen diese grosse Sorglichkeit contrastirt nun sehr, dass der Begriff der Null als selbstverständlich ohne Erklärung bleibt, consequenterweise in der erweiterten Zahlenreihe die Lücke zwischen 1 und —1 keine Beachtung findet, und von Operationen mit 0 nirgends die Rede ist. Es scheint hiernach wie im Mittelalter noch null als reine Negation einer Zahl aufgefasst zu werden. Eigentümlich ist ferner, dass die Logarithmirung nicht zu den Operationen gerechnet, die Radicirung als einzige Inverse der Potenzirung aufgeführt wird. Es mag dies darin seinen Grund haben, dass die Berechnung der Logarithmen nicht zu den Lehrobjecten gehört; doch darf man diesem Umstande, der es nur mit dem Erlernen zu tun hat, keinen Einfluss auf das sachliche Urteil gestatten; die Beziehung des Logarithmus zur Zahl bleibt dieselbe, mag man ihn berechnen oder in Tafeln aufsuchen. Bei der blossen Anweisung zur logarithmischen Rechnung lässt es indes auch das Lehrbuch nicht bewenden, sondern gibt auch die Theorie des Logarithmus. Zum Gebrauche empfiehlt der Verfasser die siebenstelligen Logarithmentafeln von Callet, Depuis und Schrön. Die Lehre von den Gleichungen ist im Lehrbuche nicht enthalten, wird also nicht zur Arithmetik gerechnet; doch kommt auch unter den angezeigten sonstigen Schriften von Moreira nichts vor, was auf dieselbe Bezug hätte.

Hoppe.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, K. Gymnasialprofessor und Rektor der Luitpold-Kreisrealschule in München. Fünfte Auflage. München 1891 Theodor Ackermann. 196 S.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von Adolf Sickenberger, K. Gymnasialprofessor und Rektor der Luitpold-Kreisrealschule in München. Erster Teil. Algebra. Zweite Auflage. München 1892 Theodor Ackermann. 75 S.

Beide Werke sind in allen früheren Auflagen besprochen (litt. Ber. 228. S. 33, l. B. 247. S. 24, l. B. 8. S. 45, l. B. 25. S. 3). Das erstere ist in 3. Auflage umgearbeitet. Im letztern ist der gerügte Fehler nicht berichtigt. Dass $a:0$ Unsinn ist, wird erst ausgesprochen; dennoch wird hinterher $a:0$ unendlich gross genannt; wenn das einen Zweck haben soll, so kann es nur der sein den

Schüler confus zu machen. Statt die wichtige Lehre, dass man durch null nicht dividiren kann, mithin jede formelle Division durch null ein Fehler ist, einfach und unumwunden, wie sie sich ergeben hatte, hinzustellen, wird sie durch ein Stückchen von Infinitesimalbetrachtung in höchst unklarer Auffassung verhüllt und bei Seite geschoben, als wäre es höchster Zweck des Unterrichts die Erkenntniss der Wahrheit fern zu halten. Dem Verfasser war durch ausführliche Besprechung des Punktes in der Recension der vorigen Auflage reichlich Anlass geboten dieses Vorgehen zu rechtfertigen; die Vorrede zur neuen Auflage aber schweigt darüber.

Hoppe.

Ebene Geometrie, Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. Von Dr. Georg Rocknagel, Professor der Mathematik und Physik am k. Realgymnasium zu Augsburg. korresp. Mitglied der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. Vierte, verbesserte Auflage. München 1892. Theodor Ackermann. 214 S.

In Hinsicht auf genauen und concinnen Ausdruck und auf strenge Deduction ist das Lehrbuch musterhaft. Der Lehrform liegt die gewöhnliche zugrunde, doch wird sie nicht derart als bindend betrachtet, dass nicht zugunsten des Lehrzweckes im einzelnen davon abgegangen wäre. Weggelassen wird die Ausführung dessen, was im Vorausgehenden bereits hinreichend geübt ist, um vom Schüler sicher vollzogen zu werden. Hierhin gehören auch eine ziemliche Anzahl Beweise, deren Weg nur angedeutet ist. Hinzugefügt sind vielerlei Bemerkungen geeignet und notwendig um den Schüler in die geometrische Praxis einzuführen und mit ihr vertraut zu machen. Sichtlich ist das Bestreben den Lehrstoff systematisch zu ordnen, wenn gleich wegen Verschiedenheit der Gesichtspunkte das Ziel sich schwerlich erreichen lässt. Es folgen auf einander (obwol nicht ebenso betitelt) die Abschnitte: allgemein geometrische Erklärungen; Winkel; Congruenz; Flächengleichheit; Aehnlichkeit. Die Lehre vom Kreise wird in 3 Abschnitten gesondert behandelt, von denen der erste (Gleichheiten) der Congruenz, der zweite (Proportionen) der Aehnlichkeit, der dritte (Kreismessung) dem Ganzen angehängt erscheint. Im einzelnen ist folgendes zu bemerken. Auf die Erklärung des Vierecks § 58. folgen 3 Lehrsätze, deren zwei nur für convexe Vierecke richtig sind; die beschränkte Geltung ist nicht ausgesprochen. Das Wort „Kreis“ wird im Sinne der Kreisfläche eingeführt, wofür keine einzige Erwägung, weder der gemeine Wortgebrauch (ausgenommen nur der Gebrauch für „Bezirk“, der es mit

der Gestalt gar nicht zu tun hat), noch die logische Folge der Begriffsbestimmung, noch die Analogie mit andern Curven, noch ein praktischer Vorzug, sondern allein die Autorität Euklids sich aufbringen lässt. Das gegenwärtige Lehrbuch zeichnet sich dadurch aus, dass es sich die Mühe gibt die einmal aufgestellte Erklärung consequent aufrecht zu erhalten, während andere Lehrbücher dieselbe nach Aufstellung alsbald ausser Acht lassen. Die natürliche Folge ist, dass gewöhnlich die Schüler bald zum vulgären und richtigen Begriffe zurückkehren, dass sie dagegen durch Gegenwärtiges ermächtigt werden den vulgären Begriff, zwar in unverständiger doch schulgerechter Weise zu corrigiren. Auch der in jeder Hinsicht verwerfliche Gebrauch des Wortes „Figur" für begrenztes Flächenstück hat hier Aufnahme gefunden. Figur, ein lateinisches Wort in einem Sinne, den keine romanische Sprache kennt, und das selbst durch seinen vulgären Gebrauch weit entfernt ist den Gedanken an das zu erwecken, den es ausdrücken soll, ist von deutschen Schullehrern irgend einmal gewählt worden, bloss weil ihnen kein passendes zur Hand war, und wird seitdem, trotzdem es ausser der Schule in jener Redeutung gar nicht vorkommt, den Schülern noch immer als schulgerechter Ausdruck dargeboten. Setzt es vielleicht den Lehrer in Verlegenheit, dass dem lateinischen „*area*" kein entsprechendes deutsches Wort vorhanden ist, so liegt die correcte Aushülfe in mehrfacher Weise nahe genug: will man den Begriff in voller Allgemeinheit schon von Anfang an benennen, so wendet man das lateinische Wort, nur nicht wie bisher das falsche „*figura*", sondern das überall gültige etwa in der Form „Areal", an; in der Schulgeometrie ist jedoch so selten Bedürfniss das Umfassende für „Vieleck", „Sector" etc. zu benennen, dass es sich überhaupt nicht lohnt neben „Flächenstück" noch einen besondern wissenschaftlichen Terminus einzuführen. Hoppe.

Katechismus der Ebenen u. Räumlichen Geometrie. Von Prof. Dr. Karl Eduard Zetzsche. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 223 Figuren und 2 Tabellen zur Massverwandlung. Leipzig 1892. J. J. Weber. 321 S.

Katechismus wird eine gruppirte Zusammenstellung des gesamten Lehrstoffs genannt. Das Band einer Gruppe bildet das gemeinsame Thema, von dem sie handelt. Das Thema ist in Frageform übergeschrieben, dann folgen römisch numerirt die dasselbe betreffenden Bemerkungen, welche dem Schüler bekannt sein oder werden müssen. Die Wahl der Themata bindet sich an kein Princip; bald sind es die Raumgebilde selbst, bald Gegenstände der Doctrin. Im Anfang

waltet das Wissen, weiterhin gesteigert das Können vor; unter den Aufgaben sind sowol Rechnung als auch Construction berücksichtigt, Trigonometrie aber ist ausgeschlossen. H.

Systematischer Grundriss der Elementarmathematik. Zweite Abteilung: Die Geometrie (Raumlehre.) Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bearbeitet von Professor Dr. Eduard Fischer, Oberlehrer am Friedrichs-Gymnasium zu Berlin. Berlin 1891. Carl Duncker. 226 S.

In der Vorrede wird mehr als einmal auf logische Strenge Gewicht gelegt. Wäre dies auch nicht ausdrücklich gesagt, so würde man aus der originellen fundamentalen Art der Bearbeitung es erkennen, dass der Verfasser seinem Werke wissenschaftliche Gründlichkeit als unterscheidendes Merkmal vindiciren will. Doch schon bald tritt es an den Tag, dass der Anspruch auf leeren Schein gebaut ist: durch sehr bekannten Trugschluss bringt der Verfasser einen Beweis für den Parallelensatz zustande. Merkwürdigerweise ist hier der Fehler sehr nachlässig verhüllt; denn in § 2. steht, die Richtung sei eine Gerade, dann in § 3., der Winkel sei die Differenz zweier Richtungen (also doch nach § 2. die Differenz zweier Geraden? !) — und eben der Misbrauch des mangelhaft erklärten Begriffs der Richtungen ist das Versteck des Fehlers. Neben diesem einen noch andre logische Zauberkunststücke im Buche aufzuweisen ist nicht nötig; der eine verrät den Geist, in welchem es abgefasst ist; auch der Zauberkünstler sorgt dafür, dass das meiste genau richtig ist. Solche Künste erfüllen nicht den Zweck des Schulunterrichts; daher ist das vorliegende Buch für denselben untauglich. Hoppe.

Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie. Von Heinrich Seeger, Direktor des Realgymnasiums zu Güstrow. Fünfte Auflage. Mit einer Figurentafel. Wismar 1891. Hinstorff. 24 S.

Der vorliegende Leitfaden umfasst diejenigen Teile der ersten Elemente der Planimetrie, welche auf Ausbildung der Anschauung gerichtet sind, jedoch ohne die Entwickelung des logischen Vermögens je aus dem Auge zu verlieren. Es gibt Definitionen, Lehrsätze und Aufgaben. Die Lehrsätze sind ohne Beweise aufgestellt, doch ist die Möglichkeit der Beweisführung überall vorgesehen. Auch in der Lehre von der Congruenz und Symmetrie, welche

allerdings auf Gebiete von unbegrenzter Ausdehnung übergreift und daher leicht zu vager Betrachtungsweise verleitet, ist durch die sich anschliessende Anwendung auf Dreiecke der Weg zur logischen Controle offen gehalten. Fragen und Uebungsaufgaben folgen auf jeden Abschnitt. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Schulen. Von H. Bensemann, Gymnasiallehrer in Cöthen. Dessau 1892. Paul Baumann. 118 S.

Der Verfasser rechtfertigt in der Vorrede die Ausgabe dieses neuen Lehrbuchs durch die selbständig gewählten didaktischen Grundsätze der Bearbeitung Ist nun gleich die ernstliche Erwägung der Methode und der Versuch ihrer Besserung an sich als verdienstvolles Unternehmen anzuerkennen, so kann man doch schwerlich der getroffenen Auskunft beistimmen. Welche Erfahrungen etwa der Verfasser zugunsten seiner Wahl aufweisen kann, müssen wir ihm überlassen; nach natürlichem Urteil erscheint das Abgehen vom Gewöhnlichen als keine Besserung. Dies betrifft namentlich 2 Eigentümlichkeiten. Erstens werden die Lehrsätze nicht vor dem Beweise aufgestellt, sondern folgen als Resultate auf vorausgehende Untersuchung. Hiermit steht zweitens in naher Verbindung die Meidung der indirecten Beweise. Die erstere Abweichung vom gewöhnlichen Verfahren erschwert offenbar das Verständniss; denn sie mutet dem Schüler zu, einer Untersuchung zu folgen, deren Zweck er nicht kennt. Allerdings entspricht die Anordnung dem natürlichen Gange wissenschaftlicher Forschung, aber nicht der Aneignung notwendiger Kenntnisse und Fähigkeiten. Da ein erst nachfolgender Satz nicht wol durch indirecten Schluss vorher begründet werden kann, so ist die Verwerfung der indirecten Beweise nur Consequenz der beliebten Begründungsform. Motivirt wird sie mit keinem Worte. Auch ist kein Grund zu ersehen, warum der indirecte Beweis weniger instructiv sein sollte als der directe. Im Gegenteil hat er einen wichtigen Vorzug: er zeigt auf die leichteste Weise die Bedeutung des Beweises als eines exact logischen Actes, während der directe Beweis stets Schlüsse vom Lehrer dictirt vorbringt, die der Schüler acceptiren muss, sofern er im Augenblicke nichts einzuwenden weiss, so dass das Beweisen sich nicht wesentlich unterscheidet vom Ueberreden und Annehmlich-machen. Könnten wir diese zwei Punkte, die der Verfasser gar nicht in den Vordergrund stellt, von seinem Hauptgesichtspunkt trennen, so würde das Ganze als ein gutdurchdachtes einheitliches System den besten Eindruck machen. Es ist ihm darum zu tun, dass der Schüler mit keinen räumlichen Gegen-

ständen beschäftigt werde, ohne sie vor sich zu sehen, ohne sie zeichnen zu können; diesen Gedanken sucht er nun zu verwirklichen ohne die Euklidischen Errungenschaften preiszugeben. Der darauf verwandte Fleiss und das bewiesene Geschick sind achtunggebietend.

H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Erster Teil: Planimetrie. Mit 207 Figuren und einer Sammlung von 300 Aufgaben. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. Dresden 1891. Gerhard Kühtmann. 123 S.

Die erste Auflage ist im 258. litt. Bericht, S. 19 besprochen. In den folgenden Auflagen ist der Lehrstoff nach manchen Seiten hin vermehrt worden; dagegen ist nichts dafür getan, den niedern Standpunkt des Unterrichts zu heben: in der Proportionslehre wird noch immer der Fall der Incommensurabilität stillschweigend übergangen; das Stillschweigen lässt vermuten, dass der Verfasser nicht auf Bewilligung rechnen zu können glaubt, wenn er eine so unwissenschaftliche Behandlung verteidigen wollte. Hoppe.

Leitfaden der Elementar-Mathematik. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin, und F. von Lühmann, Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Erster Teil: Planimetrie. Mit 7 Figurentafeln. Achte Auflage. — Dritter Teil: Ebene Trigonometrie, Stereometrie, Sphärische Trigonometrie, Propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. Mit 3 Figurentafeln. Sechste Auflage. — Berlin 1892. Leonhard Simion. 124 + 102 S.

Das Lehrbuch gehört zu denjenigen, welche den Lehrstoff der Elementarmathematik nicht auf die notwendigen Grundlagen beschränken, alle weitern Folgerungen als Uebungsstoff behandeln wollen, sondern gleich von Anfang in ergibigster Weise zu entfalten, und dadurch den Schüler mit der mathematischen Praxis vertraut zu machen streben. Hierbei geht es in Systematik, Deduction und exactem, concinnem Ausdruck selbständig vor und stellt inveterirte Misbräuche ab. Nur in Betreff des Parallelensatzes hat der Verfasser sich noch nicht entschlossen die wissenschaftliche Wahrheit zu bekennen; er zeigt vielmehr seine Ueberlegenheit in der logischen Zauberkunst, welche das Axiom in strenge Folgerung verwandelt, dadurch, dass er alte Künste verschmäht und aufdeckt, während er seine Fehler um so weniger durchschauen lässt. Der Begriff der

Richtung, den die gemeinen Zauberer im dunkeln lassen, wird correct erklärt; doch dessen Relativität bei der Anwendung nur einseitig beachtet. Das (von einem andern Autor wirklich proclamirte) Motiv zur Uebung solcher Täuschungskunst charakterisirt sich durch einen Rückblick auf 1820, wo noch die Meinung existirte, dass zur Erweckung des Interesses an der Naturgeschichte in den Lehrbüchern die fabelhaften Tiere nicht fehlen dürften; der analogen Meinung in Betreff der Beweise des Parallelensatzes in Lehrbüchern der Elementargeometrie begegnet man noch gegen Ende des 19. Jahrhunderts. — In den ersten Teil sind die Lehren von der harmonischen Teilung, der Potentialität und den Kegelschnitten aufgenommen, und zwar der Coordinatenbegriff erst in der neuen Auflage.

Der 3. Teil unterscheidet sich dadurch vom ersten, dass keine Ausdehnung über die Hauptlehren hinaus mehr vorkommt; umsomehr ist durch Uebersichtlichkeit dafür gesorgt, dass der Schüler das Erlernte leicht beherrschen kann. Was über das exacte Zuwerkegehen gesagt ist, gilt auch hier. In der neuen Auflage musste namentlich bei der Körperberechung gemäss neuen Vorschriften manches geändert und hinzugefügt werden. Was in dieser Hinsicht geschehen ist, hat durchaus nur Billigung zu erwarten.

Hoppe.

Elemente der ebenen Trigonometrie. Zum Schulgebrauch und zum Selbststudium dargestellt von Emil Hribar, Professor in Teschen. Mit 44 Abbildungen. Freiburg i. Br. 1892. Herder. 99 S.

Um bald zur Anwendung der Winkelfunctionen zu gelangen, ist das Buch in 2 Teile geteilt. Der erste betrachtet nur spitze Winkel ohne Addition, rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke, dabei regelmässige Vielecke, der zweite dehnt die Theorie auf grössere Winkel und beliebige Dreiecke aus und ergänzt sie im übrigen. Die Aufgaben sind teils ausführlich gelöst, teils mit Resultaten aufgestellt. Es wird besonders auf die Fälle sehr kleiner Winkel Rücksicht genommen. H.

Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch für Unterrichtszwecke an mittleren, technischen Lehranstalten. Von Jentzen, Direktor der Baugewerk-Tischler-Maschinen- und Mühlenbau-Schule. Mit 36 Figuren. Dresden 1891. Gerhard Kühtmann. 52 S.

Ein neues Lehrbuch der Trigonometrie hielt der Verfasser, wie das Vorwort sagt, für notwendig, weil die vorhandenen Lehrbücher die praktischen Bedürfnisse des Technikers nicht genügend berücksichtigten. Worin diese bestehen, wird nicht erklärt, die Erklärung kommt über das Wort „praktisch" nicht hinaus. Die Ausführung lässt für gründliche theoretische Ausrüstung nichts vermissen und enthält auch nichts, was für Gymnasialunterricht weniger brauchbar wäre. Unterscheidend für das Gegenwärtige ist vielmehr, dass es sich streng an die Natur des Gegenstandes, an seine Bedeutung und Stellung unter den Zweigen der Mathematik hält, wozu es durch die Bestimmung für Techniker mehr genötigt gewesen sein mag, als der Gymnasialunterricht es erfordert. Die Trigonometrie ist für die niedere Mathematik ein praktisches Fach, für die höhere eine Specialität. Demgemäss wird sie hier mit geringstem Wortaufwand, jedoch ohne irgend eine Lehre, seien es specielle Angaben oder allgemeine Relationen, zu übergehen, nahezu tabellarisch behandelt. Auf diese Weise erscheint das Gebiet der Lehre nicht grösser als es in Wirklichkeit ist, und kann leicht vollkommen beherrscht werden. Aufgaben begleiten stets den Vortrag. Am Schlusse steht eine Tafel (3 stellig) der trigonometrischen Zahlen; die logarithmische Rechnung wird gleichfalls in Anwendung gebracht. H.

Lehrbuch der Stereometrie zum Gebrauche bei dem Unterrichte in Gymnasien und Realschulen. Von Oberstudienrath Dr. von Nagel, Ritter 1. Cl. des kgl. württemb. Kronenordens und des kgl. Württemb. Friedrichsordens. Mit vielen dem Text beigedruckten Holzschnitten. Fünfte, vermehrte Auflage, herausgegeben von Th. Schröder, Professor der Mathematik und Physik am kgl. alten Gymnasium zu Nürnberg. Nürnberg 1892. Friedr. Korn. 132 S.

Die 4. Auflage, vom Verfasser selbst herausgegeben, ist im 236. litt. Bericht, S. 41 besprochen. Aenderungen und Hinzufügungen sind in der Vorrede des Herausgebers der neuen Auflage nicht angezeigt, mithin von ihm nicht als erheblich erachtet. H.

Raumlehre für höhere Schulen. Von Prof. H. C. E. Martus, Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. 2. Teil. Dreiecksrechnung und Körperlehre. Bielefeld und Leipzig 1892. Velhagen u. Klasing. 259 S.

Die Art des Vortrags ist vergleichbar einer Excursion einer Schulclasse. Freilich ist hier der Lehrer nicht gebunden an die Gegenstände, welche ihr auf der Wanderung und am besuchten Orte

Natur und Technik zur Betrachtung darbieten, sondern er führt solche nach freiem Ermessen vor, wie sie sich eignen die ganze Doctrin in bester Ordnung daran zu entwickeln; die receptive Lage der Schüler, in Verbindung mit den daran sich knüpfenden Aufgaben und Fragen, ist in beiden Fällen dieselbe. Ueber die Anordnung der Stereometrie', welcher die ebene Trigonometrie vorausgeht, ist zu bemerken, dass die Hauptabschnitte bilden 1) die Lage der Geraden und Ebenen, 2) die Körper, 3) ihre Oberflächen. Der erste wird geteilt nach der Anzahl der Ebenen. Der dritte enthält die sphärische Geometrie, einschliessend die Trigonometrie, und die Kegelschnitte als konische Geometrie. Zur Verdeutschung der Terminologie, für welche der 2. Teil der Raumlehre neue Beiträge liefert, möchte zu bemerken sein, dass auf Adjectivbildung keine Rücksicht genommen ist. Dem Vorgang der Holländer, dem gemäss er Wörter wie „dreiecksrechnerisch" = „trigonometrisch" hätte einführen dürfen, hat der Verfasser nicht folgen wollen; entbehren kann man die directe Ableitung, aber man gibt nicht gern eine Handhabe weg, die man früher besessen hat. Hoppe.

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Uebungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Von Dr. J. Lange; Oberlehrer an der Fr. Werd. Ober-Realschule in Berlin. Mit 55 Figuren im Text. Berlin 1893. H. W. Müller. 68 S.

Voraus geht die Lehre von der harmonischen Teilung. dann folgen Ellipse, Hyperbel, Parabel erst einzeln definirt durch ihre Focaleigenschaft, dann hergeleitet als Schnitte des geraden Kegels, ihre Secanten, Tangenten, Leitlinien, ihre stetige Variation und Grenzformen; dann die Polaritätsbeziehungen, conjugirten Durchmesser, Inhaltsbestimmungen, projectiven und involutorischen Beziehungen. Dann folgen Aufgaben. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Berlet, B., Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher u. seine Art zu rechnen. Die Coss v. Adam Riese. Mit dem Brustbild u. der Handschrift v. Adam Riese. Frankfurt a./M., Kesselring'sche Hofbuchh., Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1886. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 42. J. 3. Abth., enth.: Physik der Erde. Red. v. B. Schwalbe. Berlin, Georg Reimer. 24 Mk.

Graf, J. H., Das Leben u. Wirken d. Physikers u. Astronomen Johann Jakob Huber aus Basel. (1733—1798.) Mit dem Bildnisse Hubers u. 1 Taf., seine v. ihm erfundene freie Uhrhemmung darstellend. Bern, Wyss, Verl. 1 Mk.

Heinze, R., Xenocrates. Darstellg. der Lehre u. Sammlg. der Fragmente. Leipzig, Teubner. 5 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch der Erfindungen u. Fortschritte auf den Gebieten der Physik u. Chemie, der Technologie u. Mechanik, der Astronomie u. Meteorologie. Hrsg v. H. Gretschel, G. Bornemann, A. Berberich u. O. Müller. 28. Jahrg. Leipzig, Quandt & H. 6 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 21. Bd. Jahrg. 1889. 3. Hft. Georg Reimer. 13 Mk.

Müller, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik u. Astronomie bis zum J. 1500, mit Hinweis auf die Quellenlitteratur. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. 2 Mk. 40 Pf.

Neteler, B., Stellung der alttestamentlichen Zeitrechnung in der alt-historischen Geschichte. 1. Untersuchung der assyrisch-alttestamentlichen Gleichzeitigkeiten. Münster, Theissing. 50 Pf.

Rudio, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen üb. die Kreismessg. Deutsch hrsg. u. m. e. Uebersicht üb. die Geschichte d. Problems v. der Quadratur d. Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, versehen. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Methode und Principien.

Arndt, R., Bemerkungen üb. Kraft u. auslösende Kraft im Besonderen. Greifswald, Abel. 1 Mk. 30 Pf.

Flor, O., Lösung d. Problems: die Quadratur d. Kreises. Berichtigung der Zahl π. Riga, Stieda's Verl. 3 Mk.

Lehrbücher.

Féaux, B., Rechenbuch u. geometr. Anschauungslehre zunächst f. die drei unteren Gymnasialklassen. 9. Aufl., besorgt durch F. Busch. Paderborn, Schöningh. 1 Mk. 20 Pf.

Haller v. Hallerstein, F. Baron, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 10. Aufl. Hrsg. u. erweitert v. B. Hülsen. 1. Tl. Arithmetik. Berlin, Nauck & Co. 4 Mk. 20 Pf.; geb. 4 Mk. 80 Pf.

Hülsen, B., u. Coler, niedere Mathematik m. Anwendungen a. Beispielen. Zum Gebrauch auf den königl. Kriegsschulen bearb. Auf Veranlassg. der General-Inspection d. Militär-Erziehungs- u. Bildungswesens. Berlin, Mittler & S. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.

Sonne, J., u. Th. Sänger, mathematische Repetitionshefte im Anschluss an die neuen Lehrpläne höherer Unterrichtsanstalten. I. u. II. Hft. (Doppelhft.) Marburg, Ehrhardt's Univ.-Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Sammlungen.

Donadt, A., Rechenbuch f. höhere Schulen. 1. Hft. Leipzig, Reisland. 1 Mk.

Fenkner, H., arithmetische Aufgaben. Mit besond. Berücksicht. v. Anwendgn. aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik u. Chemie. Zum Schulgebrauch, sowie zum Selbstunterricht bearb. Ausg. A.: Für Gymnasien, Realgymnasien u. Oberrealschulen. Pensum der Prima. Braunschweig, Salle. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 40 Pf.

Geerling's Rechenbuch, Hand- u Hilfsbuch f. höhere u. Subalternbeamte, Militäranwärter u. Praktikanten, welche zum Zwecke ihrer Anstellung od. Beförderg. in höheren Amtsstellgn. e. Prüfung im Rechnen abzulegen haben. 12. Aufl. Leipzig, F. A. Berger. Geb. 2 Mk.

Heller, J. F., methodisch geordnete Sammlung v. Aufgaben u. Beispielen aus der darstellenden Geometrie f. Realschulen. II. Thl. Für die 6. Classe. Wien, Hölder. 1 Mk. 52 Pf.

Henner's, J. F., Aufgaben zum Kopf- u. Zifferrechnen m. den Ergebnissen. Ausg. f. Lehrer. Hft. C. Für die Oberklassen. 9. Aufl. Ansbach, Seybold's Buchh. 80 Pf.

— Dasselbe. Ausg. f. Schüler. Hft. A—C. Ebd. à 20 Pf.

— Rechen-Aufgaben. Mit gleichmäss. Berücksicht. d. Kopf- u. Zifferrechnens. Ausg. f. Schüler. 7. Hfte. Ebd. à 20 Pf.

Immel, K., Aufgaben f. das gemeinschaftliche Schnellrechnen. 5. Aufl.. München, Oldenbourg. Kart. 60 Pf.

Jung, W., Rechenbuch f. Fortbildungsschulen. Schüler-Ausg. 2 Tle. Reutlingen, Kocher's Buchh. 1 Mk. 10 Pf.

Kleyer, A.. vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1148.—1177. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lettau, O., algebraische Aufgaben. 7. Aufl. Langensalza, Schulbuchhdlg. v. Gressler. 2 Mk. 70 Pf.

Matek, B., Resultate zur Aufgabensammlung in Močnik's Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra f. die oberen Classen der Mittelschulen. 2. Aufl. Wien, C. Gerold's Sohn. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Mayer, J., Sammlung v. arithmetischen Aufgaben m. den notwendigsten Definitionen u. Gesetzen. 3. Aufl. (2. Aufl. der P. Luther'schen Aufgabensammlung.) Regensburg, Pustet. 2 Mk., Einbd. 30 Pf.; Resultate dazu 1 Mk.

Roeder, H., Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Auflösungen. Breslau, Ferd. Hirt, Verl.-Buchh. 1 Mk. 25 Pf.

Schellen, H., Aufgaben f. das theoretische u. praktische Rechnen. I. Tl. Zum Gebrauche beim Rechenunterrichte f. die Schüler der Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen, Realschulen, Seminarien u. andern höhern Lehranstalten ähnl. Richtg. 23. Aufl., bearb. v. H. Lemkes. Münster, Coppenrath'sche Buchh. 2 Mk.; Einbd. 25 Pf.

Schürmann, F., u. F. Windmoeller, Rechenbuch f. gewerbl. u. kaufmännische Fortbildungsschulen. 1. Tl. 2. Aufl. Essen, Bädeker, Verl. Geb. 1 Mk.; Auflösgn. 30 Pf.

Stegmann, M., Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Differential-Rechnung. 6. Aufl. Hrsg. v. L. Kiepert. Hannover, Helwing. 50 Pf.

Steuer, W., eine Sammlung angewandter Aufgaben f. das Kopfrechnen, nebst ausführl. Lehrgang f. Kopf- u. schriftl. Rechnen. 2. Hft. 4. Aufl. Breslau. Woywod, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Stockmayer, H., u. M. Fetscher, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen, der Real-

schulen u. verwandter Lehranstalten. 3 Bdchn. f. 12—13 jähr. Schüler (V. Klasse). 6. Aufl. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 70 Pf.

Tunica's, G. F., Rechenaufgaben f. Schulen. 2. Bd. 6. Aufl., bearb. v. H. Töpke u. E. Oppermann. Braunschweig, Grüneberg's Buchh. 1 Mk. 30 Pf.

Tabellen.

Schnellinger, J., fünfstellige Logarithmen f. die Zehner, Logarithmen der natürlichen u. trigonometrischen Zahlen. Wien, Manz, Verl. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Tafel zur Umwandlung v. Graden Réaumur (R) in Grade der hunderttheiligen Thermometerskala (C) u. umgekehrt. Hrsg. auf Veranlassg. der physikalisch-techn. Reichsanstalt. Berlin, Stankiewicz. 10 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bachmann, P., die Elemente der Zahlentheorie. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 40 Pf.

Brathuhn, O., Katechismus der Markscheidekunst. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Gegenbauer, L., üb. den grössten gemeinsamen Theiler. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

— über die aus den 4 Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen. Ebd. 70 Pf.

Haas, A., Lehrbuch der Differentialrechnung. 2. Tl. Die vollständ. Differentiation entwickelter u. nicht entwickelter Funktionen v. e. u. v. mehreren reellen Veränderlichen, Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima u. Minima. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 8 Mk.

Klein, F., Vorlesungen üb. die Theorie der elliptischen Modulfunctionen ausgearb. u. vervollständigt v. R. Fricke. 2. Bd. Fortbildung u. Anwendg. der Theorie. Leipzig, Teubner. 24 Mk.

Kniess, K., Lehrbuch der Arithmetik f. Real- u. Lateinschulen. 1. Tl. 4. Aufl. München, Kellerer. 1 Mk.

Maier, J. G., Lehrbuch der Elementar-Arithmetik zum Gebrauch an Schulen, Lehrerbildungsanstalten u. beim Selbstunterricht. II. Tl. Das Rechnen m. algebr. Zahlengrössen. 2. Aufl. Stuttgart, Gundert. 4 Mk. 80 Pf.

Metzger, C., Lehrbuch der Gleichungen 3. u. 4. Grades, nebst der trigonometr. Auflösg. der Gleichgn. 2. Grades. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Močnik, F. Ritter v., Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra, nebst e. Aufgaben-Sammlg. f. d. oberen Classen der Mittelschulen.

24. Aufl. Wien, C. Gerold's Sohn, Verl. Geb. in Leinw. 3 Mk. 70 Pf.

Molien, Th., üb. Systeme höherer complexer Zahlen. Diss. Dorpat, Karow, Verl. 2 Mk.

Obenrauch, F. J., zur Transformation u. Reduction v. Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. Progr. Neutitschein, Hölzel's Nachf. 2 Mk.

Prym, F., üb. orthogonale, involutorische u. orthogonal-involutorische Substitutionen. Göttingen, Dieterich'sche Verl.-Buchh. 2 Mk. 60 Pf.

Rogel, F., zur Theorie der höheren Integrale. Prag, Rivnáč, Verl. 40 Pf.

Rost, G., Untersuchungen üb. die allgem. lineare Substitution, deren Potenzen e. endl. Gruppe bilden. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Saalschütz, L., Vorlesungen üb. die Bernoulli'schen Zahlen, ihren Zusammenhang m. den Secanten-Coefficienten u. ihre wichtigeren Anwendungen. Berlin, Springer. 5 Mk.

Scheffler, H., die quadratische Zerfällung der Primzahlen. Leipzig, Fr. Foerster. 3 Mk.

Staudacher, H., Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellg. der Lehre v. den kombinator. Operationen (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Nach System Kleyer bearb. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Stegemann, M., Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung. I. Thl.: Differential-Rechnung. 6 Aufl., hrsg. v. L. Kiepert. Hannover, Helwing. 12 Mk.; Einbd. 1 Mk.

Weichold, G., Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. 1. Tl. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 10 Mk.

Geometrie.

Ebneter, K., Leitfaden f. den Unterricht in der Geometrie an Sekundarschulen. 1. Hft. St. Gallen, Huber & Co. Kart. 1 Mk. 20 Pf.; Schlüssel dazu. 40 Pf.

Erler, W., Einltung in die analytische Geometrie u. in die Lehre v. den Kegelschnitten. 2. Aufl. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk.

Gandtner, J. O., Elemente der analytischen Geometrie, f. den Schulunterr. bearb. 8. Aufl. Hrsg. v. E. Grahl. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Genau, A., Leitfaden der elementaren Geometrie f. Lehrer-Seminarien. 7. Aufl. Büren, Hagen. Geb. 2 Mk. 60 Pf.

Jackwitz, E., Hauptsätze der Stereometrie, f. den Schulgebrauch zusammengestellt. Schrimm, Schreiber. 60 Pf.

Küpper, C., geometrische Betrachtungen auf Grundlage d. Functionentheorie. Prag, Rivnáč, Verl. 40 Pf.

Močnik, F. Ritter v., Lehrbuch der Geometrie f. Lehrerbildungsanstalten. 3. Aufl. Wien, Gerold's Sohn, Verl. Geb. in Leinw. 2 Mk.

Reye, Th., Geometrie der Lage. Vorträge. 2. u. 3. Abth. 3. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. 15 Mk.; Einbde. in Halbfrz. à 2 Mk.

Rüefli, J., Anfang zu den kleinen Lehrbüchern der Geometrie. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. 40 Pf.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 5. Tl.: Die Flächen der geradlin. Figuren. Mit 96 Fig. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 4 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Tl. Specielle darstell. Geometrie. 2. Aufl. Dresden, Gerh. Kühtmann. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 3 Mk. 80 Pf.

Schmidt, Ph., O. Kerl u. K. Wenzel, Raumlehre m. zahlreichen Rechen- u. Konstruktionsaufgaben f. Handwerker- u. Fortbildungsschulen. 2 Tle. Hannover, Meyer. 85 Pf.

Sobotka, J., üb. Krümmung u. Indicatricen der Helikoide. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Stuhlmann, A., Zirkelzeichnen u. Projektionslehre zum Gebrauche an Gewerbe- u. Bauschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen u. s. w. Allg. Tl. 15. Aufl. Dresden, Gerh. Kühtmann. 1 Mk.

Wehner, H., Leitfaden f. den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Leipzig, Teubner. Kart. 80 Pf.

Trigonometrie.

König, J., ebene Trigonometrie. Zum Gebrauch in Fortbildungs-, Handwerker- u. Abendschulen, sowie zum Selbstunterricht. Braunschweig, Salle. 75 Pf.

Vega's, G. Frhr. v., logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Neue Ausg. Bearb. v. C. Bremiker. 74. Aufl. v. F. Tietjen. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 4 Mk. 20 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Gauss, F. G., die trigonometrischen u. polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 2. Aufl. 4.–7. Hft. Halle, Strien, Verl. à 3 Mk. 50 Pf.

Kalender f. Messkunde auf d. J. 1893. Hrsg. v. M. Clouth. 20. Jahrg. (2 Thle.) 1. Thl. Trier, Lintz'sche Buchh. 1 Mk. 40 Pf.; geb. in Leinw. 2 Mk.; in Ldr. 2 Mk. 60 Pf.

Mechanik.

Finger, J., üb. die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik m. Vortheil anwendbaren Flächen 2. Ordnung, nebst Anwendgn. auf Probleme der Astatik. Leipzig, Freytag. 80 Pf.

Mach, E., Ergänzungen zu den Mittheilungen üb. Projectile. Ebd. 30 Pf.

Margules, M., Luftbewegungen in e. rotirenden Sphäroidschale bei zonaler Druckvertheilung. Ebd. 60 Pf.

Technik.

Epstein, J., Ueberblick üb. die Elektrotechnik. 6 populäre Experimental-Vortr. Frankfurt, Alt. 1 Mk. 50 Pf.

Fischer-Hinnen, J., die Berechnung u. Wirkungsweise elektrischer Gleichstrom-Maschinen. Praktisches Handbuch f. Elektrotechniker u. Maschinentechniker. 2. Aufl. Zürich, Meyer & Z. 4 Mk. 60 Pf.

Grawinkel, C., u. K. Strecker, Hilfsbuch f. die Elektrotechnik. 3. Aufl. Berlin, Springer. Geb. in Leinw. 12 Mk.

Hein, C., die Accumulatoren f. stationäre elektrische Beleuchtungsanlagen. Leipzig, Leiner. 2 Mk.; geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

Kalender f. Elektrotechnik pro 1893. Bearb. v. J. Krämer. 7. Jahrg. Wien, Perles' Verl.; geb. in Leinw. 3 Mk.; geb. in Ldr. 4 Mk. 40 Pf.

Kalender f. Elektrotechniker. Hrsg. v. F. Uppenborn. 10. Jahrg. 1893. München, Oldenbourg. Geb. in Leder. 4 Mk.

Kittler, E., Handbuch der Elektrotechnik. (3 Bde.) 1. Bd. 2. Aufl. Stuttgart, Enke. 40 Mk.

Kral, J., Elemente d. Staats-Telegraphendienstes. 18. Aufl. Wien, Gerold & Comp. 4 Mk.

Krieg, M., Taschenbuch der Elektrizität. Ein Nachschlagebuch u. Ratgeber f. Techniker, Praktiker, Industrielle u. techn. Lehranstalten. Leipzig, Leiner. Geb. in Leinw. 4 Mk.

Pawel, J., die physikalischen u. technischen Doctrinen d. Telegraphen-Dienstes. Ein Hülfsbuch zur Vorbereitg. f. die Verkehrs- u. Amtsleiter-Prüfg. Physikalischer Thl 1. Hft. Brünn, Winkler's Buchh. 2 Mk. 80 Pf.

Reuleaux, F., die sogenannte Thomas'sche Rechenmaschine. Für Mathematiker, Astronomen, Ingenieure, Versicherungs-Gesellschaften u. Zahlenrechner überhaupt. 2. Aufl. Leipzig, Felix. 2 Mk.

Ritter, A., Lehrbuch der technischen Mechanik. 6. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. 18 Mk.; Einbd. in Halbfrz. 2 Mk.

Rundschau, elektrotechnische. Chefred.: G. Krebs. 10 Jahrg. 1892/93. (24 Nrn.) Nr. 1. Frankfurt a/M., Daube & Co. Halbjährlich 4 Mk.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch f. Studirende der Elektrotechnik. 4. Aufl. Deutsche Uebersetzg. v. C Grawinkel. 2.—4. Hft. Halle, Knapp. à 2 Mk.

Vogler, A., Jedermann Elektrotechniker. Anleitung zur Herstellg. der hauptsächlichsten elektr. Apparate u. elektr. Leitgn. 2. Bdchn.: Die Wechselströme. Leipzig, Moritz Schäfer. 1 Mk. 20 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. die Spectren der Elemente. 6. Abschn. Berlin, Georg Reimer. Kart. 2 Mk.

Kriemler, C. J., aus der Festigkeitslehre. Der Spannungszustand in den Punkten e. geraden Stabes bei den 4 einfachen Fällen der Beanspruchg. Dargestellt zur Einführg. in das Studium der Festigkeitslehre. Vevey, Roth's Verl. 4 Mk.

Undeutsch, H., Spannungen aufgehängter prismatischer Körper, hervorgerufen durch statische u. dynamische Beanspruchungen. Freiberg, Craz & G. 2 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Bauschinger, J., Untersuchungen üb. den periodischen Kometen 1889 V. (Brooks). 1. Thl. Definitive Bahnbestimmg. d. Hauptkometen aus der Erscheing. 1889 bis 1891 München, Franzscher Verl. 5 Mk.

Beobachtungsergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 6. Hft. Berlin, Dümmler's Verl.-Buchh. 4 Mk.

— dasselbe. 2. Serie. I Bd. Ebd. 12 Mk.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80^0 u. 2^0 südl. Declination f. das Aequinoctium 1875. 5. Stück. Leipzig, Engelmann. 17 Mk.

Elster, J., u. H. Geitel, Beobachtungen d. atmosphärischen Potentialgefälls u. der ultravioletten Sonnenstrahlung. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 20 Pf.

Falb's Kalender der kritischen Tage 1893 m. Bezug auf

Witterungserscheinungen, Erdbeben u. Schlagwetter in den Bergwerken. Wien, Hartleben. 1 Mk. 50 Pf.

Günther, S., Grundlehren der mathematischen Geographie u. elementaren Astronomie, f. den Unterricht bearb. 3. Aufl. München, Theod. Ackermann, Verl. 2 Mk.

Haerdtl, E. Frhr. v., üb. zwei langperiodische Störungsglieder d. Mondes, verursacht durch die Anziehg. d. Planeten Venus. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 60 Pf.

Himmel u. Erde. Illustr. naturwissenschaftl. Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. V. Jahrg. Octbr. 1892 bis Septbr. 1893. 1. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, Jahrg. 1891. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Mittheilungen der m. dem königl. statist. Landesamt verbundenen meteorolog. Centralstation. Bearb. v. L. Meyer. Stuttgart, Metzler'sche Buchh, Verl. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1892. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. 1. Hft. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1892. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorol. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co, Verl. 3 Mk.

Jahresbericht d. Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogth. Baden, m. den Ergebnissen der meteorolog. Beobachtgn. u. der Wasserstandaufzeichngn am Rhein u. an seinen grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1891. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchh. 6 Mk.

Kalender f. Geometer u. Kulturtechniker, hrsg. v. W. Schlebach. Jahrg. 1893. 2 Thle. Stuttgart, Wittwer's Verl. Geb. in Leinw. u. geh. 3 Mk. 50 Pf.; in Ldr. u. geh. 4 Mk.

Klein, H. J., Führer am Sternenhimmel für Freunde astronomischer Beobachtungen. Leipzig, E. H. Mayer. 8 Mk.; geb. 9 Mk.

Lohrmann, W. G., Mondkarte in 25 Sectionen u. 2 Erläuterungstaf., m. Erläutergn. u. selenograph. Ortsbestimmgn. hrsg. v. J. F. D. Schmidt. Neue wohlf. (Titel-) Ausg. m. e. Vorworte v. H. Ebert. Leipzig, Barth. In Mappe 25 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 131. Bd. No. 1. Hamburg, Mauke Söhne. Für den Band 15 Mk.

Newcomb-Engelmann's populäre Astronomie. 2. Aufl., hrsg. v. H. C. Vogel. Leipzig, Engelmann 13 Mk; Einbd. 2 Mk.

Pfeil, L., Graf v., die Lufthülle der Erde, der Planeten u. der Sonne. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk.

Pick, A. J., die elementaren Grundlagen der astronomischen Geographie. Gemeinverständlich dargestellt. 2. Aufl. Wien, Manz, Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Publikationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Ottakring). Hrsg. v. N. Herz. 2. Bd. Wien, Frick. 2 Mk.

Reis, P., Elemente der Physik, Meteorologie u. mathematischen Geographie. Hilfsbuch f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. 5. Aufl. Quandt & H., Leipzig. 4 Mk. 50 Pf.

Repertorium f. Meteorologie, hrsg. v. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Red. v. H. Wild. 15. Bd. Leipzig, Voss' Sort. 30 Mk. 90 Pf.

Scheiner, J., der grosse Sternhaufen im Hercules, Messier 13, nach Aufnahmen am Potsdamer Refractor. Berlin, Georg Reimer, 3 Mk. 50 Pf.

Stricker, S., üb. strömende Elektricität. Eine Studie. 1. Hälfte. Wien, Deuticke's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 fein lith. Taf. nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. Jedermann. Esslingen, Schreiber. Geb. 12 Mk.

Physik.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1891. 2 Thle. Leipzig, Voss' Sort. 25 Mk. 60 Pf.

Barckhausen, H., einige Betrachtungen üb. Magnetismus u. Elektricität, ihre Wirkungen u. Wechselwirkungen m. e. Anh.: Betrachtgn. zum Ausbruch d. Krakatau. Bremen, v. Halem. 2 Mk.

Barus, C., die physikalische Behandlung u. die Messung hoher Temperaturen. Leipzig, Barth. 3 Mk.

Börner, H., Lehrbuch der Physik f. höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 6 Mk.

Czermak, P., üb. oscillatorische Entladungen. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Echo, elektro-technisches. Chefred.: M. Krieg. 5. Jahrg. 1892. 40. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich. 3 Mk.

Exler, K., üb. elektrische Kraftübertragung m. besond. Berücksicht. d. Wechsel- u. Drehstromes. Wien, Helf's Sort.-Buchh. 50 Pf.

Görtz, A., üb. spectrophotometrische Affinitätsbestimmungen. Diss. Tübingen, Moser'sche Buchh. 1 Mk.

Graetz, L., die Elektricität u. ihre Anwendungen. Ein Lehr- u. Lesebuch. 4. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. 7 Mk.

Heerwagen, F., üb. e. neue Methode zur Messung der Dielectricitätsconstantenv. Flüssigkeiten. Diss Dorpat, Karow, Verl. 11 Mk.

Hermes, O., Elementarphysik, unter Zugrundelegg. d. Grundrisses der Experimentalphysik v. E. Jochmann u. O. Hermes f. den

Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten bearb. Berlin, Winckelmann & Söhne. 2 Mk.; geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

Heussi, J., Leitfaden der Physik. 13. Aufl. Bearb. v. H. Weinert. Braunschweig, Salle. 1 Mk. 50 Pf.

— dass. m. Anh.: die Grundbegriffe der Chemie. Von H. Weinert. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.; Anh. allein 50 Pf.

Heydweiller, A., Hülfsbuch f. die Ausführung elektrischer Messungen. Leipzig, Barth. 6 Mk.; geb. 7 Mk.

Klemenčič, J., u. P. Czermak, Versuche üb. die Interferenz elektrischer Wellen in der Luft. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 10 Pf.

Kolbe, H. J., Einführung in die Elektricitätslehre. Vorträge. I. Statische Elektricität. Berlin, Springer. 2 Mk. 40 Pf.; geb. in Leinw. 3 Mk. 20 Pf.

Noack, K., Leitfaden f. physikalische Schülerübungen. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Recknagel, G., Lehrbuch der Physik zur ersten Einführung in das Studium derselben. 1. Bdchn. Bamberg, Buchner, Verl. Geb. in Leinm. 2 Mk. 40 Pf.

Revue, physikalische. Hrsg. v. L. Graetz. 1. Jahrg. 1892. 10. Hft. Stuttgart, Engelhorn. Vierteljährlich 8 Mk.

Riecke, E., Molekulartheorie der piëzoelektrischen u. pyroelektrischen Erscheinungen. Göttingen, Dieterich'sche Verl.-Buchh. 5 Mk.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausg. v. E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, D. Kreichgauer, S. Lindeck. 1. Thl. Mechanik. 2. Bd. Mechanik der flüss. u. gasförm. Körper. Berlin, Springer. 10 Mk.; geb. 11 Mk. 20 Pf.

Waeber, R., Lehrbuch f. den Unterricht in der Physik m. besond. Berücksicht. der physikal. Technologie u. der Meteorologie. 7. Aufl. Leipzig, Hirt & Sohn. Geb. 3 Mk. 75 Pf.

Weber's, W., Werke. Hrsg. v. der königl. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen. (In 6 Bdn.) 1. u. 2. Bd. Berlin, Springer. 34 Mk.; Einbde. in Halbfrz. à 2 Mk. 50 Pf.

Wilke, A., die Elektricität, ihre Erzeugung u. ihre Anwendung in Industrie u. Gewerbe. Allgemein verständlich dargestellt. Leipzig, Spamer. 8 Mk.; geb. 9 Mk. 50 Pf.

Windisch, K., die Bestimmung d. Molekulargewichts in theoretischer u. praktischer Beziehung. Berlin, Springer. 12 Mk.

Wittwer, H. G., Grundzüge d. Molecular-Physik u. der mathematischen Chemie. 2. Aufl. Stuttgart, Wittwer's Verl. 6 Mk.

Zeitschrift f. den physikalischen u. chemischen Unterricht. Unter der besond. Mitwirkg. v. E. Mach u. R. Schwalbe hrsg. v. F. Poske. 6. Jahrg. 1892/93. 1. Hft. Berlin, Springer Jährlich 10 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayerischen Akademie d. Wissenschaften. 17. Bd. 3. Abth. In der Reihe d. Denkschriften der 63. Bd. München, Franz'scher Verl. 11 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Meyer. 41. Bd. (4 Hefte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Für den Band 20 Mk.

Jahrbuch der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1. Bd. 1890—91. Hrsg. im Auftrage d. Vorstandes v. G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe. Berlin, Georg Reimer. 7 Mk. 60 Pf.

Katalog mathematischer u. mathematisch-physikatischer Modell-Apparate u. Instrumente. Unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen hrsg. im Auftrage d. Vorstandes der deutschen Mathematiker-Vereinigg. v. W. Dyck. München, Theod. Ackermann, Verl. 14 Mk.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg VII. Série. Tome XXXVIII, Nr. 14 et dernier. Sur l'integrale $\int_a^b F(x)\frac{\partial x}{z-x}$. Par N. Sonin. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk. 65 Pf.

Mittheilungen der deutschen Mathematischen Gesellschaft in Prag. Hrsg. m. Unterstützg. der Gesellschaft zur Förderg. deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen. Leipzig, Freytag. 7 Mk.

Ohm, G. S., gesammelte Abhandlungen. Hrsg. u. eingeleitet. v. E. Lommel. Leipzig, Barth. Geb. in Leinw. 20 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 31—33. 6 Mk. 10 Pf. Nr. 36. 1 Mk. 50 Pf. Nr. 40. 1 Mk. 20 Pf. Leipzig, Engelmann.

Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge, hrsg. v. R. Virchow u. W. Wattenbach. Neue Folge 159. Hft. Hamburg, Verlagsanstalt u. Druckerei. 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Abth. IIa Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik. Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik. 101. Bd. 4—7. Leipzig, Freytag. 13 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Register zu den Bdn. 97—100. XIII. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 70 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. unter der Red. v O. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 38. Bd. Jahrg. 1893. (6 Hfe.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Jährlich 18 Mk.

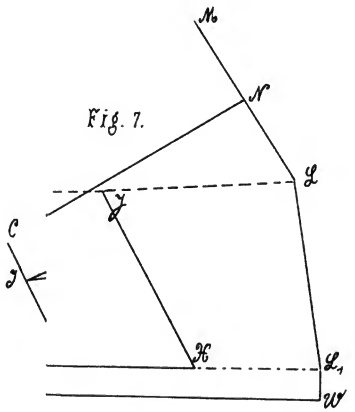


Fig. 7.

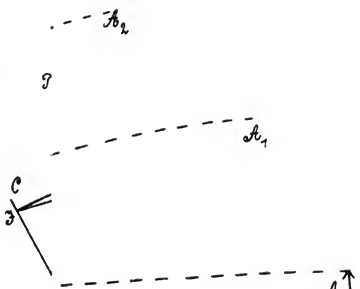
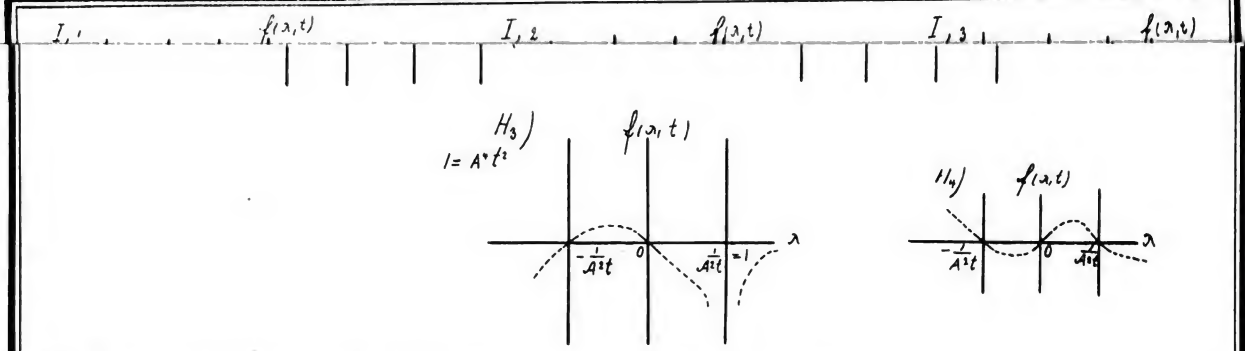


Fig. 6.



XII. Krewer: Problem eine Fläche 2. Grades in gegebenem Kegelschnitt zu schneiden.

Litterarischer Bericht

XLVII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. Von Prof. Ferdinand Jos. Obenrauch. Neutitschein (1893). Im Selbstverlage des Verfassers. 55 S.

Die Schrift ist enthalten im Jahresberichte der Landes-Oberrealschule in Neutitschein für das Schuljahr 1891—2 und besonders herausgegeben. Sie beginnt mit Erklärung der elliptischen Coordinaten, welche einen Punkt als Schnitt dreier confocalen Flächen 2. Grades bestimmen, stellt die Formeln des Uebergangs zwischen jenen und den cartesischen Coordinaten auf, geht auf die Specialitäten der ebenen und Kugelcoordinaten ein und macht die bezüglichen historischen Angaben über die Ausbildung der Theorie durch Lamé, Chasles, Terquem, Liouville, Bertrand, Cauchy, Serret, Michael Roberts, William Roberts, Cayley u. A. Im 2. Abschnitt wird die Complanation des ganzen Ellipsoids behandelt und einige daraus hervorgehende Formeln angegeben, im 3ten eine sehr reichhaltige Zusammenstellung der Anwendungen der Complanationsformeln zur Auswertung und Reduction von Doppelintegralen geliefert. Die ganze Schrift müssen wir als einen wertvollen Beitrag zur Geschichte der analytischen Theorien und Probleme willkommen heissen.

H.

Zur linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Von Dr. Anton Krug. Prag 1892. H. Dominicus. 81 S.

Ueber die in dieser Schrift enthaltenen Entwickelungen hat der Verfasser folgende Uebersicht gegeben. „Zunächst werden aus den Coefficienten p, q, r der Differentialgleichung

$$y''' + 3py'' + 3qy' + ry = 0 \qquad (A)$$

in der x die Unabhängige ist, die zwei Invarianten $G_3\,dx^3$ und $G_2\,dx^2$ gebildet, d. h. die beiden Ausdrücke, die bei beliebigen Substitutionen $y = s\bar{y}$ und $x = \varphi(\bar{x})$ in (A) ungeändert bleiben. Aus diesen beiden Invarianten werden zwei absolute Invarianten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ abgeleitet, d. h. solche die den Factor dx nicht enthalten. Ebenso wie G_3 und G_2 sind auch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ im allgemeinen Functionen von x. Es ist also etwa

$$\mathfrak{G} = \varphi_1(x); \quad \mathfrak{H} = \varphi_2(x)$$

woraus durch Elimination von x eine Gleichung

$$F(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = 0 \qquad (B)$$

entsteht. Durch diese Gleichung ist die Differentialgleichung (A) so wie alle durch jene Substitutionen abgeleiteten charakterisirt. Hat insbesondere einer derselben rationale Coefficienten, so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ rational in x und die Gl. (B) ist vom Geschlechte 0. Und umgekehrt: ist eine Gl. (B) vom Geschlechte 0 gegeben, so lassen sich jederzeit Differentialgleichungen 3. Ordnung mit rationalen Coefficienten aufstellen, welche gerade die absoluten Invarianten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ besitzen. Ist $\mathfrak{G}$ identisch einer Constanten, so ist $\mathfrak{H} = 0$, und Gl. (A) lässt sich in eine solche mit constanten Coefficienten transformiren. Dieser Fall wird vorweg behandelt, um im Spätern $\mathfrak{H} \gtrless 0$ setzen zu können." H.

Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Secanten-Coefficienten und ihre wichtigeren Anwendungen. Von Dr. A. Louis Saalschütz, a. o. Professor der Mathematik a. d. Universität Königsberg. Berlin 1893. Julius Springer. 208 S.

Da die Lehre von den bernoullischen Zahlen ein vielverzweigtes Gebiet von Entdeckungen und Untersuchungen darbietet, welches in mannichfaltiger Beziehung zu andern Gebieten steht, so ist eine zusammenstellende Behandlung ein dankenswertes Unternehmen. Vollständigkeit mag nicht erreichbar sein: wir haben noch zu wenig

Einblick in die vielgestaltige Natur der bernoullischen Zahlen, um die fruchtbaren Elemente im voraus zu erkennen und das Untersuchungsgebiet umgrenzen zu können. Doch muss jedenfalls Vollständigkeit angestrebt sein, und darf vor allem kein bereits als fruchtbar documentirter Zweig fehlen. Wir werden daher dem Wunsche des Verfassers entgegenkommen, wenn wir einige Desiderata aussprechen. Das Buch ist in 4 Hauptabschnitte geteilt: Recursionsformeln, unabhängige Darstellungen, zahlentheoretische Untersuchungen, Mac-Laurin'sche Summenformel. Die Methode schliesst sich vorwaltend dem geschichtlichen Entwickelungsgang an. Der 2. Abschnitt behandelt mannigfaltige Themata. Wir heben hervor: § 12. Independente Darstellungen mittels der Bernoullischen Functionen. Der Paragraph beginnt mit den Worten: „Es wird in der neueren Mathematik mit Recht nicht nur auf die Ergebnisse einer Untersuchung Gewicht gelegt, sondern auch auf die Methode, durch welche sie gewonnen worden sind, und dabei diejenige bevorzugt, welche sich durch Einheitlichkeit der Gesichtspunkte, durch Ableitung aller Resultate aus derselben Quelle auszeichnet. In diesem Sinne ist eine Abhandlung des Herrn Worpitzky (1883) beachtenswert, in welcher alle Ergebnisse aus dem einen Princip der Umformung der Bernoulli'schen Functionen hervorgehen". Und trotz der oben ausgesprochenen Zustimmung hat der Verfasser so wenig Gewicht auf die Einführung der Bernoulli'schen Functionen und ihre gesamten Ergebnisse gelegt, dass er sie wie eine zur Seite liegende Speculation mit Verweisung auf die Originalschriften abtut und mit Ableitung eines Resultats sich begnügt. Motivirt wird dies Verfahren in einer Note mit den Worten: „Wir beabsichtigen nicht eine nähere Discussion über die Bernoulli'schen Functionen zu geben, sondern wir werden, ohne dadurch Lücken entstehen zu lassen oder besonders umständlich zu sein, das Erforderliche darüber an betreffender Stelle aus unsern Formeln ableiten". Daraus ersieht man, dass die Ableitung aus einer Quelle nicht zu dem Erforderlichen gerechnet wird. Nun ist aber Worpitzky gar nicht der Erste, welcher die angegebene Bedeutung der Bernoulli'schen Functionen erkannt hat. Zunächst sind in des Ref. „Lehrbuch der Differentialrechnung und Reihentheorie" (1865) dem gesamten Abschnitt über Bernoulli'sche Theoreme die Bernoulli'schen Functionen, definirt als Coefficienten einer Reihe, zugrunde gelegt. Die Methode bot sich so natürlich als die angemessene dar, dass für ihre Wahl nach einer Autorität kaum gefragt zu werden Grund schien. Bald fand auch der Verfasser, dass Bertrand in seinem grösseren Werke über Differentialrechnung ebenso zuwerke gegangen war, und hält es daher für nicht unwahrscheinlich, dass jene Auffassung der bernoullischen Zahlen als Specialwerte von Functionen überhaupt aus älteren Zeiten stammt.

Beide Schriften fehlen im Litteraturverzeichniss des vorliegenden Buchs. Ferner vermisst man in dem Buche die längst bekannten Ausdrücke der bernoullischen Zahlen durch unendliche Reihen und und damit im Zusammenhange die Summation der nach Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitenden Reihen, deren Coefficienten Potenzen mit negativem ganzem Exponenten vom Index sind. Auch die independenten Ausdrücke in geschlossener endlicher Form, welcher die Differentiation der Tangenten und Secanten und deren Potenzen liefert, sind nicht erwähnt und das betreffende Werk des Ref. im Litteraturverzeichniss nicht angegeben. Die halb convergente bernoullische Reihe ist einmal erwähnt, ohne jedoch etwas darüber mitzuteilen. **Hoppe.**

Die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung. Ein Beitrag zur algebraischen Analysis.

Die goniometrischen Functionen complexer Winkel. Eine Ergänzung zur algebraischen Analysis.

Von Adalbert Breuer, k. k. Professor an der Staatsrealschule im III. Bezirk Wiens. Mit einer Figurentafel. Erfurt 1892. Bodo Baemeister. 6 + 14 S.

Die beiden Schriften sind von einander unabhängig. Die erstere stellt die Logarithmen complexer Winkel, mit Zuhülfenahme der dritten Dimension als laterale, dar, so dass die 2 ersten Dimensionen für reelle Variation vorbehalten bleiben. In der reellen Ebene werden die Polarcoordinaten r, β eines Punktes als von einander abhängige Variable, und zwar die Amplitude β als Function des Radiusvectors r betrachtet. Dann bezeichnet wieder r den Modul des complexen Arguments und wird längs der Meridianebene um den Winkel $\varphi =$ der Amplitude des Arguments nach der lateralen Axe hin gedreht. Ist nun die Function der Logarithmus, so ist der Endpunkt von r in der neuen Lage gleichzeitig die Construction der Function und ihres Arguments. Erstere wird durch die doppelte Drehung des Radiusvectors von der x Axe nach der y Axe hin, dann von der Endlage nach der z Axe hin als Ausdrücke ihrer reellen Elemente dargestellt, und zwar kann letztere Drehung φ um willkürlich Vielfache von 4 Rechten vermehrt werden. Die Darstellung des Arguments aber ist in rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes auf der Meridianebene gegeben. Der Lauf der Function bei variirendem Argumente wird durch die Bahn des darstellenden Punktes im Raume dargestellt, wenn der Endpunkt von r in seiner anfänglichen Lage, d. h. in der reellen Ebene, eine logarithmische Spirale erzeugt.

Der Anlass zur zweiten Schrift wird vom Verfasser in folgenden Worten dargelegt. „Bei meinen Studien über das Imaginäre in der Geometrie bin ich auf Widersprüche zwischen meinen wolgeprüften Resultaten mit jenen der algebraischen Analysis gestossen, deren Beseitigung mir dringend geboten erscheint". Die Schrift ist so voll von dunkeln Stellen, dass wir ein sachliches Urteil darüber nicht geben können. Licenzen sind bei einem solchen Dispüte nicht am Orte, exacte Sprache ist hier unerlässlich. Es genüge einige Punkte zu nennen, in denen gegen diese Vorschrift gefehlt ist. Nicht selten wird imaginären Grössen das Prädicat grösser oder kleiner gegeben oder von ihrem Wachsen gesprochen. Auf Seite 5 steht. „Die ... Sätze gelten bloss innerhalb der Grenzen $-\infty < \varphi < +\infty$, oder cyklometrisch gesprochen, $-\frac{\pi}{4} < \varphi < +\frac{\pi}{4}$, — —". Was heisst das? — Die Gleichungen (1) bis (8) gelten offenbar für beliebig reelle und imaginäre φ, in Gl. (9) (10) hat überdies φ complexen Wert, in Gl. (12) dagegen ausschliesslich reellen; aber nirgends ist dies ausgesprochen. — Auf Seite 4 fängt ein Satz an: Abgesehen von $k2\pi$ zeigt der Winkel $i\varphi$ ein ganz befremdendes Verhalten, ..." — Wie kann man von dem absehen, was wesentlich dazu gehört? Bald nachher folgt: „Daher (d. h. wegen jenes befremdenden Verhaltens) muss dem Winkel $i\varphi$" (nämlich in $\sin i\varphi$, $\cos i\varphi$, etc.) ein anderes Mass zu Grunde liegen". Von da an misst der Verfasser den Winkel $i\varphi$, statt nach Kreisbogen, nach einem gleichseitig hyperbolischen Sector als Einheit und sucht (leider in unverständlicher Sprache) zu zeigen, dass dann die Resultate besser stimmten. Hätte er wirklich ein abweichendes Resultat aus verschiedener Betrachtungsweise nachgewiesen, so würde damit nicht irgend eine solche gerechtfertigt, sondern die Untauglichkeit complexer Argumente goniometrischer Functionen überhaupt gezeigt sein. In der Tat sind es aber nur unerwartete, bedenkliche Folgerungen, auf die er sich beruft, und die er gar nicht zu erklären versucht hat. Hoppe.

Die quadratische Zerfällung der Primzahlen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1892. Friedrich Foerster. 169 S.

Die vorliegende Schrift entwickelt das directe Verfahren der allgemeinen Zerfällung der einer gegebenen linearen Form entsprechenden Primzahlen $q = pn + m$ oder einer bestimmten Potenz davon oder eines bestimmten Vielfachen einer solchen Potenz in die quadratische Form $A^2 \mp pB^2$ unter der Voraussetzung, dass p eine Primzahl sei. Dem allgemeinen Verfahren voraus geht die Behandlung besonderer Fälle. Das allgemeine Problem der Zerfällung kann

nach Aussage des Verfassers für gelöst gelten. Wenn, in $p = 2r + 1$, r unpar ist, so kann die $(r-2)$te Potenz der Primzahl $q = pn + m$ in die Form $A^2 + pB^2$ zerfällt werden. Ist r par, so ist eine niedere Potenz oder deren Vielfaches in $A^2 - pB^2$, unter Umständen auch in $A^2 + pB^2$ zerfällbar. Für pares r ist die Zerfällbarkeit in $A^2 - pB^2$ allgemein. Ferner werden Sätze über quadratische Congruenzen gegeben, schliesslich das praktisch beste Kriterium der Primzahleneigenschaft nebst Auffindung der Primfactoren einer gegebenen Zahl gesucht. Ein von Eisenstein vorbehaltener Specialfall ist ergänzt.

H.

Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen. Von Dr. Emil Haentzschel, Oberlehrer an der III. Realschule zu Berlin. Berlin 1893. Georg Reimer. 180 S.

Der erste der 6 Aufsätze schliesst sich an die Dissertation des Verfassers: „Ueber die Reduction der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung. Berlin; Mayer u. Müller 1893" (s. Ohrtmann, Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. XV. 311.) — an und behandelt die nämliche Reduction und Lösung auf Grundlage der Theorie der elliptischen Functionen von Weierstrass. Der zweite hat zum Gegenstande die Gleichungen für die Meridiancurven der Rotationskörper; der dritte die Lamé'schen Functionen 2. Ordnung und ihre functionen-theoretischen Grenzfälle; der vierte die Lamé'schen Functionen höherer Ordnung; der fünfte die Functionen des elliptischen und des Kreiscylinders; der sechste die Heine'sche Function und die aus ihr abgeleitete hyper-Bessel'sche Transcendente.

H.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Par Jules Tannery, Sous-Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure, et Jules Molk, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome I. Introduction. Calcul différentiel (Ire partie). Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 246 S.

Die Schrift ist eine Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen von Weierstrass. Der allein vorliegende 1. Band davon hat folgenden Inhalt: Einleitung, Cap. I. Unendliche Reihensummen

und Producte bei constanten Termen. Solche bei einfachem Entree. Reihen mit doppeltem Entree. Producte mit doppeltem Entree. Cap. II. Unendliche Reihensummen und Producte, deren Terme von einer Variabeln abhangen. Definitionen und erste Lehrsätze. Reihen von ganzen Functionen (ganze Reihen). Reihen von ganzen Reihen. Functionen (Fortsetzung). Anwendung auf lineare Differentialgleichungen. Cap. III. Ganze transcendente Functionen. Exponentiale und circulare Functionen. Sätze von Weierstrass und Mittag-Leffler. — Differentialrechnung (1. Teil). Cap. I. Allgemeine Betrachtungen über die periodischen Functionen. Cap. II. Die Function $\sigma(u)$ und die davon abgeleiteten Functionen $\zeta(u)$, $\mathfrak{p}(u)$. Das Argument wachsend um $2\omega_\alpha$. Erste Relationen zwischen den Functionen $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\mathfrak{p}(u)$, $\mathfrak{p}'(u)$. Darstellung von $\sigma(u)$ durch ein unendliches Product mit einfachem Entree. Die Cofunctionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$. Lineare Transformation des σ. Substitution äquivalenter Perioden für die primitiven. Transformation beliebiger Ordnung der Functionen σ. Substitution neuer, mit den alten linear verbundener Perioden für die primitiven. — Der 2. Band (unter der Presse) ist die Fortsetzung des ersten. Der 3te wird die Integralrechnung, der 4te Anwendungen enthalten. H.

Traité d'analyse. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome II. Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la theorie des équations différentielles et fonctions algébriques. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 512 S.

Der 1. Band ist besprochen im 43. litt. Bericht S. 31. Der 2. Band enthält zunächst die Lehre von den Functionen einer complexen Variabeln, und zwar nach Erklärung und Grundlegung die Reihenentwickelung, die alternirte Methode, die Lösung des Problems von Dirichlet, directe Untersuchung der Functionen einer complexen Variabeln, Anwendungen der Sätze von Cauchy, gemeinsame Wurzeln zweier simultanen Gleichungen, Integrale von nichteinförmigen Functionen, Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln, die conforme Abbildung, Sätze über die Differentialgleichungen, Anwendungen derselben, etc. Abel'sche Integrale, einförmige Functionen auf einer Riemann'schen Fläche, allgemeine Sätze über die Existenz solcher Functionen, Curven vom Geschlecht null und eins. H.

Geometrie.

Die einfachste Lösung des Apollonischen Problems. Eine Anwendung der neuen Theorie des Imaginären. Von Adalbert Breuer, k. k. Professor an der Staatsrealschule im III. Bezirk Wiens. (Mit zwei Figurentafeln.) Erfurt 1892. Bodo Bacmeister. 16 S.

Das Problem einen Kreis zu construiren, der 3 gegebene Kreise berührt, wird auf folgendem Wege gelöst. Die 6 Aehnlichkeitscentra der gegebenen Kreise liegen zu 3 in gerader Linie. Durch sie bestimmen sich 4 Aehnlichkeitsaxen. Die äussere Aehnlichkeitsaxe ist Chordale der 2 gesuchten Kreise; die 3 übrigen Chordalen treffen sich im Potenzcentrum der gegebenen Kreise, welches zugleich Aehnlichkeitscentrum der gesuchten Kreise ist. Die Mittelpunkte derselben liegen dann auf der Normale vom Aehnlichkeitscentrum auf die äussere Aehnlichkeitsaxe. Der Verfasser verbindet diese Lösung mit seiner „Theorie des Imaginären", welche er in der folgenden Schrift entwickelt. H.

Imaginäre Kegelschnitte. Eine geometrische Studie über das Wesen und die katoptrische Deutung des Imaginären. Von Adalbert Breuer — — dito (Mit einer Figurentafel.)

Ausgehend von einer reellen Ellipse und 2 conjugirten Durchmessern führt eine Construction zu einem imaginären Punkte, dessen Ort eine Ellipse ist. Hierauf gründet der Verfasser seine neue Darstellung des Imaginären. Ueber alles Nähere verweisen wir auf die Schrift selbst. H.

Ueber Conographie. Ein Beitrag zur constructiven Geometrie der Kegelschnitte. Von Adalbert Breuer — — dito (Mit zwei Figurentafeln) 10 S.

Es handelt sich um Erfindung von Instrumenten zur Beschreibung von Kegelschnitten. Zunächst werden alle diejenigen verworfen, welche den Schreibstift längs eines Fadens führen. Unter denjenigen, welche bereits eine sicherere Führung bewirkt haben, werden die von Arbter, Rebicek und Drzewiecki genannt, an den 2 letzten beschränkte Einstellungsfähigkeit, Complicirtheit des Apparates und Kostspieligkeit ausgesetzt. Dann werden die, unter vielseitiger Be-

rücksichtigung der Erfordernisse vom Verfasser erfundenen Instrumente beschrieben, zuerst ein Instrument zur Zeichnung aller Arten von Kegelschnitten, das er jedoch nicht als praktisch zur technischen Anwendung empfiehlt, dann 9 einfachere für gewisse Gruppen von Kegelschnitten. Die Instrumente bestehen aus Linealen, längs deren Mittellinie der in eine Hülse gefasste Schreibstift im Kreuzungspunkt zwischen zwei Schienen gleitet. H.

Sur la détermination géométrique du point le plus probable donné par un système de droites non convergentes. Par M. Maurice d'Ocagne, Ingénieur des ponts et chaussées. Extr. du J. de l'École Polytechn. LXIII, cah. 1893. 4°. 25 S.

Es wird folgende Aufgabe gelöst. Ein Punkt ist als Durchschnitt von n Geraden ideell bestimmt. Die Geraden sind aber wegen Beobachtungs- und Zeichnungsfehler ungenau gegeben. Einer jeden wird ein gewisses Gewicht als Grad der Sicherheit beigelegt. Es soll die wahrscheinlichste Lage des ideellen Punkts gefunden werden. Von einem beliebigen Punkte O werden Lote auf alle Geraden gefällt und um ihre Länge verlängert; der Schwerpunkt der mit den Gewichten der Geraden belasteten Endpunkte (symmetrischer Schwerpunkt von O) sei O', der symmetrische Schwerpunkt von O' sei O''. Dann ist der Schnittpunkt von OO'' und der Tangente an den durch $OO'O''$ beschriebenen Kreis in O' in erster Näherung das Centrum der kleinsten Quadrate der Abstände jenes Punktes O von allen Geraden. H.

Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Von Dr. Hermann Stahl, ord. Prof. der Mathematik in Tübingen und Dr V. Kommerell, Repetent am Seminar in Urach. Mit einer lithographirten Tafel. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 114 S.

Durch die Bearbeitung und Herausgabe der allgemeinen Flächentheorie haben sich die Verfasser ein grosses Verdienst erworben. Da dieser Wissenschaftszweig in der mathematischen Litteratur (ganz besonders der deutschen), namentlich gegenüber der ins unbegrenzte Neues schaffenden mathematischen Tätigkeit in viel geringerem Masse vertreten ist, als es seiner Bedeutung entspricht, in so geringem Masse, dass er von Studirenden leicht ganz übersehen wird, so ist Grund es hervorzuheben, dass das vorliegende Werk die Existenz einer Doctrin ans Licht zieht, welche auf Lösung von Natur

gegebener, nicht erst durch Einführung geschaffener, also unumgänglicher Probleme gerichtet ist und bereits Errungenschaften in grösserem Umfange aufweist. Die Bearbeitung ist für Studirende bestimmt. Die Anforderungen an Vorkenntnisse sind etwas höher als es vielleicht nötig war; doch hat dadurch die Kürze der Herleitung und die Uebersichtlichkeit sehr gewonnen. Das Zuwerkegehen charakterisirt sich durch folgendes. Die Auffassung und Bezeichnung ist durchgängig die nämliche. Die cartesischen Coordinaten sind stets Functionen zweier Parameter u, v; nie wird zur inversen Darstellung übergegangen. Dieselben 6 Fundamentalgrössen e, f, g (nach Gauss E, F, G), d, d', d'' (durch einen Factor von den Gauss'schen abweichend), welche zur Bestimmung der Fläche unabhängig von der Lage hinreichen, werden auch hier als Elemente der Ausdrücke, deren eine grössere Anzahl gleich von Anfang eingeführt sind, angewandt. Die für die Theorie bedeutungsvollen Linien auf der Fläche, die isometrischen (conformen Abbildungslinien), die geodätischen, conjugirten, Krümmungs- und asymtotischen Linien, für sich und als Parameterlinien, schliesslich die Mittelpunktsflächen werden nach den Fundamentalformeln im 1. Abschnitt behandelt. Eigentümlich ist, dass die Theorie der isometrischen Linien hier von den sogen. Minimallinien, d. h. den imaginären Linien $\partial s = 0$ ausgeht. Ueberhaupt ist es willkommen, dass man für die in der Theorie bedeutungsvollen Begriffe hier kurze Namen findet. Möchte doch auch für die Function, deren Doppelintegral nach $\partial u \partial v$ die Fläche gibt, ein kurzer Name in Gebrauch kommen! Der 2. Abschnitt hat zum Gegenstande die Herleitung einer Fläche aus gegebenen Eigenschaften. Als eigentliches Endziel der Untersuchung wird die Darstellung der Fundamentalgrössen betrachtet, der primitive Ausdruck der Fläche in Coordinaten, wo er erreichbar ist, als beiläufiges Resultat behandelt. Meistens sind es nur die Differentialgleichungen, mit denen die allgemeine Untersuchung abschliessen muss. Von besondern Flächen, welche deren Integration gestatten, sind es die Minimalflächen, die ausführlich behandelt werden. Dieser Abschnitt enthält die grösste Anzahl von Theoremen, die der Mitteilung vorzüglich für wert befunden worden sind. Dazu gehören nicht gerade die bekanntesten. Der 3. Abschnitt untersucht die allgemeine Flächencurve. Als Vorbereitung sind einige Teile der allgemeinen Curventheorie entwickelt. Das Ganze ist aus sachlich gegebenen scientiven Stoffe selbständig nach einheitlicher Methode gestaltet. Die Originalarbeiten sind, soweit es möglich war, angegeben. H.

Ueber imaginäre Punkte ebener Curven. Von Prof. Dr. H. Suhle, Director des Herzoglichen Friedrichs-Realgymnasiums und

der Vorschule des Fridericianum. Dessau 1893. (Programmarbeit). 4°. 28 S

Die Abschnitte der Schrift sind überschrieben: Von den imaginären Durchschnittspunkten der Curven 2. — dann: 3. Grades. Ueber imaginäre Maxima und Minima der Curven 3. Grades. Allgemeine Eigenschaften der ganzen rationalen Functionen complexer Variabeln. Von den singularen Punkten der durch die Functionen $U(x, y)$ und $V(x, y)$ dargestellten Flächen. Von den reellen — dann: imaginären Punkten der Flächen $U(x, y)$ und $V(x, y)$ Von den imaginären Durchschnittspunkten der, ganzen rationalen Functionen $n$ten Grades entsprechenden Curven. — Die Abfassung ist von Anfang an dunkel ausgedrückt. Von gegebenen Curven ist überhaupt nirgends die Rede, auch nicht von den gegenseitigen Durchschnitten solcher. Es wird vielmehr der Gleichung $u = f(z)$ in unausgesprochenem Gedanken die Beziehung untergelegt, dass u und z Coordinaten seien. Hier ist u reell, f eine reelle ganze Function, und es handelt sich um geometrische Darstellung der Schnittpunkte einer einzigen so bestimmten Curve mit der Geraden $u = \text{const}$, d. h., wenn man die müssige und durch Concurrenz den Leser vexirende Einkleidung der Frage wegl\u00e4sst, um Darstellung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Hierzu wird die Complexe $z = x + iy$ als Punkt auf einer Grundebene und die reellen Elemente von $f(z)$ als entsprechende Ordinaten zweier Punkte in dritter Dimension, deren Orte zwei Flächen sind, dargestellt. Ueber Ziel und Erfolg muss Ref. auf die Schrift selbst verweisen, da er schon im Vorstehenden Misverständnisse als möglich gern einräumen wird.

Hoppe.

Abriss des geometrischen Calcüls, Nach den Werken des Professors Dr. Hermann Günther Grassmann bearbeitet von Ferdinand Kraft, Privatdocent an der Universität Zürich. Mit in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 255 S.

Das Vorwort macht 8 deutsche Mathematiker namhaft, welche bestrebt gewesen sind Grassmann's Ausdehnungslehre verständlich und nutzbar zu machen. Von sich selbst sagt der Verfasser aus, dass sich ihm durch mehrjährige Studien herausgestellt hat, dass dieselbe von theoretischem und grossem praktischem Nutzen ist. Daraus schliesst er sofort, es handle sich nun darum die erzielten Resultate weitern Kreisen bekannt zu geben. Da nun aber gerade jener Nutzen es ist, den Andre bestreiten oder bezweifeln, so war

es doch zum Zwecke der Verbreitung der Lehre in weitere Kreise vor allem geboten, von dem theoretischen und praktischen Nutzen, den der Verfasser daraus gezogen hat, einmal Rechenschaft zu geben. Neue theoretische Resultate findet man im Buche nicht, der praktische (doch jedenfalls intellectuelle, nicht materielle) Gewinn könnte nur im leichtern Erlernen und Untersuchen bestehen — leichter im Vergleich mit andern Methoden, durch die man dasselbe erreicht; diesen lässt der grosse Umfang der gegenwärtigen, zwar in deutscher, doch sehr fremder Sprache geschriebenen Einführung schwerlich erhoffen. Worin dann trotzdem, dass aller Anschein entgegen ist, ein Preis für die Mühe des schwierigen Studiums noch liegen kann, darüber hätte der Verfasser nicht schweigen sollen. Qui tacit, consentit. Hoppe.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, o. Professor der Mathematik an der Universität Strassburg i. E. Zweite Abteilung. Mit 36 Textfiguren. Dritte, vermehrte Auflage. — Dritte Abteilung der dritten, vermehrten Auflage. Leipzig 1892. Baumgärtner. 330 + 224 S.

Die 1. Abteilung ist im 30. litt. Bericht S. 17 besprochen. Die 2. Abteilung handelt hauptsächlich von der Collineation und der Correlation der Grundgebilde 2. und 3. Stufe, von den Flächen 2. Ordnung, welche durch reciproke, und von den Strahlencongruenzen und kubischen Raumcurven, welche durch collineare Bündel oder Felder erzeugt werden; sie umfasst ausserdem die Polar- und die Nullsysteme wegen ihrer innigen Verbindung mit den Flächen 2. und den Raumcurven 3. Ordnung. Die 3. Abteilung enthält namentlich die Theorie der tetraedralen Strahlencomplexe, welche durch je 2 collineare Räume, und die der kubischen Flächen, welche durch je 3 collineare Bündel erzeugt werden, und im Anschlusse hieran die Theorie der Büschel, Bündel und Gebüsche von Flächen 2. Ordnung. Die Anhänge zur 2. und 3. Abteilung enthalten bzhw. 10 und 8 Aufgaben. H.

Over het ontstaan van oppervlakken van den vierden graad med dubbelrechte door middel van projectieve bundels aan kwadratische oppervlakken. Door J. Cardinaal, Leeraar aan de H. B. S. te Tilburg. Amsterdam 1892. Johannes Müller. 63 S.

In Verslagen en Mededeelingen VIII. 88 hat der Verfasser eine Construction der Flächen 4 Grades mit Doppelkegelschnitt mitge-

teilt. Als Grundlage diente die Construction der Fläche als Durchschnitt der homologen Elemente zweier Bündel quadratischer Flächen. Jede der Basiscurven der beiden Bündel bestand aus 2 Kegelschnitten, während ein Kegelschnitt der einen Basiscurve mit einem Kegelschnitt der andern zusammenfiel. Auf derselben Grundlage werden gegenwärtig die Flächen 4. Grades mit Doppelgeraden construirt und in Gruppen geteilt. In Salmon Fiedler's Geometrie des Raumes II § 335 u. f. findet man einige Eigenschaften dieser Flächen angegeben. Am Schlusse der gegenwärtigen Abhandlung wird gezeigt, welche Verbindung zwischen den hier erhaltenen Resultaten und den Salmon'schen Formen besteht. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XL.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1887. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 43. Jahrg. 1. Abth. Berlin, Georg Reimer. 13 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Im Verein m. anderen Mathematikern u. unter besond. Mitwirkg. v. F. Müller u. C. Wangerin hrsg. v. E. Lampe. 22. Bd. Jahrg. 1890. 1. Hft. Ebd. 13 Mk.

Mach, E., zur Geschichte u. Kritik d. Carnot'schen Wärmegesetzes. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Mahler, E., der Kalender der Babylonier. (II. Mittheilung.) Ebd. 30 Pf.

Müller, Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnissrede. Berlin, Georg Reimer. 50 Pf.

Neteler, B., Stellung der alttestamentlichen Zeitrechnung in der altorientalischen Geschichte. 2. Untersuchung der Zeiträume von Salomo bis Noe. Münster, Theissing'sche Buchh. 50 Pf.

Methode und Principien.

Illigens, E., die unendliche Anzahl u. die Mathematik. Münster, Theissing'sche Buchh. 1 Mk.

Kirchhoff, E., Anleitung zur Erteilung d. Unterrichts in der Raumlehre. Nebst e. Anh., enth. die Resultate zu den Schülerheften. 2. Aufl. Leipzig, Hirt & S. 60 Pf.

Lehrbücher.

Močnik, F. Ritter v., Lehrbuch d. Arithmetik f. Unter-Gymnasien. 1. u. 2. Abth. 32. resp. 24. Aufl. Wien, C. Gerold's S., Verl. Geb. in Leinw. 3 Mk. 90 Pf.

Sammlungen.

Braune, A., Rechenbuch als Grundlage f. das Kopfrechnen in Seminarien. 3 Tle. in 1 Bde. 2. Aufl. Halle, Herm. Schrödel. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 25 Pf.

Frank, F., u. H. Märtens, Rechenbuch f. Gewerbe- u. Bauschulen, sowie f. gewerbliche Fortbildungsschulen. Dresden, Kühtmann. 2 Mk.; kart. 2 Mk. 20 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1078.—1197. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Kniess, K., u. O. Bachmann, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. bestimmten Zahlen, bearb. unter besond. Berücksicht. d. f. Lateinschulen vorgeschriebenen Lehrpensums. 2. Aufl. München, Kellerer's Hofbuchh. 1 Mk. 60 Pf.; Einbd. 25 Pf.

Martus, H. C. E., 50 Aufgaben aus der Körperlehre zur Einübg. u. zum Gebrauche bei der Abschlussprüfung in Untersecunda. Ergänzung d. 2. Thls. der Raumlehre f. höhere Schulen. Bielefeld, Velhagen & Kl. 20 Pf.

Neumann, C. E. O., Formelbuch, enth. die hauptsächlichsten Formeln, Sätze u. Regeln der Elementar-Mathematik, zum Gebrauche an Gymnasien u. Realschulen übersichtlich zusammengestellt. 5. Aufl. Dresden, Axt. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Petzold, W., Fragen u. Aufgaben (m. Lösungen) aus dem Gebiete der astronomischen Geographie. (Zu: P., Leitfaden der astronom. Geographie.) Bielefeld, Velhagen & Kl. 50 Pf.

Schellen, H., methodisch geordnete Materialien f. den Unterricht im theoretischen u. praktischen Rechnen, nebst e. Anh. üb. die Flächen- u. Körper-Berechngn. 1. Tl. Ein Handbuch nach geistbild. Grundsätzen u. m. besond. Berücksicht. d. Kopfrechnens f. Lehrer, zum Gebrauche beim Rechnenunterrichte an Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen, Realschulen, Seminarien u. anderen höheren Lehranstalten ähnl. Richtg. 12. Aufl., bearb. v. H. Lemkes. Münster, Coppenrath'sche Buchh., Verl. 4 Mk.; Einbd. 30 Pf.

Wallentin, F., Auflösungen zu den Maturitätsfragen aus der Mathematik. Zum Gebrauche f. die obersten Classen der Gymnasien und Realschulen zusammengestellt. 2. Aufl. Wien, C. Gerold's S., Verl. Geb. in Leinw. 4 Mk.

Tabellen.

August, E. F., vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 18. Aufl., besorgt v. F. August. Leipzig, Veit & Co. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 38. Aufl. Halle, Strien, Verl. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Belikow, A., u. A. Nathing, Lehrbuch der Algebra, nebst e. Sammlung v. Uebungsaufgaben. Für Gymnasien u. Realschulen bearb. St. Petersburg, Eggers & Co. 6 Mk.

Bohl, P., üb. die Darstellung v. Functionen e. Variabeln durch trigonometrische Reihen m. mehreren e. Variabeln proportionalen Argumenten. Diss. Dorpat, Karow. 1 Mk.

Brenner, A., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik. Methodisches Handbuch zum Gebrauche in den unteren Klassen der Mittelschulen u. beim Privatstudium. II. Thl. In 2. Aufl. neu bearb. Freising, Dr. Datterer. 1 Mk. 60 Pf.

Czuber, E., üb. die Differentialquotienten v. Functionen mehrerer Variablen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Escherich, G. v., üb. die Multiplicatoren e. Systems linearer, homogener Differentialgleichungen. (I. Mittheilg.) Ebd. 50 Pf.

Forsyth, A. R., Theorie der Differentialgleichungen. 1. Thl.: Exacte Gleichgn. u. das Pfaff'sche Problem. Autoris. deutsche Ausg. v. H. Maser. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Geigenmüller, R., Elemente der höheren Mathematik, zugleich als Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus d. analytischen Geometrie, algebraischen Analysis, Differential- u. Integralrechng. Für techn. Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. II. Bd. Die niedere u. die höhere Analysis m. Rücksicht auf Functionen e. reellen Variablen. 2. Aufl. Mittweida, Polytechn. Buchh. 7 Mk.

Haentzschel, E., Studien üb. die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, Georg Reimer. 6 Mk.

Michelsen, P., die bestimmten algebraischen Gleichungen d. 1. bis 4. Grades. Nebst e. Anh.: Unbestimmte Gleichgn. Für höhere Unterrichtsanstalten, sowie f. den Selbstunterricht bearb. Hannover, Meyer. 4 Mk.

Geometrie.

Borgmeyer, J., geometrische Untersuchung üb. den Ort der Fusspunkte der Lote, welche von e. Punkte auf die Strahlen e.

linearen Congruenz gefällt werden. Diss. Hildesheim, Borgmeyer's Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Bouffier, H., Lehre der geometrischen u. perspektivischen Schattenkonstruktion. Wiesbaden, Bossong. 1 Mk. 50 Pf.

Bücking, F., die Winkelgegenpunkte d. Dreiecks. Ein Specialfall der involutor. Verwandtschaft. Diss. Leipzig, Fock. 1 Mk.

Fialkowski, N., die vollständige Trisection d. Winkels Die Lösg. d. 2000jährigen Problems auf elementar-geometr. Wege im Sinne der Alten, d. h. blos m. Lineal u. Zirkel. Wien, Halm & G. 3 Mk.

Handel, elementar-synthetische Kegelschnittslehre. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten bearb. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 1 Mk. 40 Pf.

Kraft, F., Abriss d. geometrischen Kalküls. Nach den Werken H. G. Grassmann's bearb. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Küpper, C., Bestimmung der Minimalgruppen f. C^m, das heisst der Gruppen v. kleinster Punctzahl, welche in Beziehg. zu Curven m^{ter} Ordng. normale Lagen haben. Prag, Rivnáč, Verl. 90 Pf.

Lange, J., synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Uebungsaufgaben, f. die Prima höherer Lehranstalten. Berlin, H. W. Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Leonhardt, G., Grundzüge der Trigonometrie u. Stereometrie f. den 16. Jahreskursus höherer Lehranstalten. Halle, Strien, Verl., 1 Mk. 20 Pf.

Močnik, F., Ritter v., die geometrische Formenlehre in der Volksschule. Eine Anleitg. f. Lehrer zur Ertheilg. d. geometr. Unterrichtes. 4. Aufl. Leipzig, Freytag. Geb. 1 Mk. 10 Pf.

Rüefli, J., Lehrbuch der Stereometrie, nebst e. Sammlg. v. Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Sekundaschulen, Realschulen u. Gymnasial-Anstalten bearb. 2. Aufl. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Stahl, H., u. V. Kommerell, die Grundformen der allgemeinen Flächentheorie. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Sturm, R., die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. II. Thl. Die Strahlencongruenzen. Ebd. 12 Mk.

Wagner, H., Lehrbuch der ebenen Geometrie u. Anfgabensammlung f. Realschulen. 2. Aufl. Hamburg, Gräfe & S. Kart. 2 Mk. 20 Pf.

Weyr, E., üb. abgeleitete $J_n^n - 1$ auf Trägern vom Geschlechte Eins. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

— über Vervollständigung v. Involutionen auf Trägern vom Geschlechte Eins u. üb. Steiner'sche Integrale. Ebd. 50 Pf.

— üb. Vervollständigung v. Involutionen auf Trägern vom Ge-

schlechte Eins u. üb. Steiner'sche Polygone. (II. Mittheilg.) Ebd. 90 Pf.

Zetzsche, K. E., Katechismus der ebenen u. räumlichen Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Zwicky, M., Grundriss der Planimetrie u. Stereometrie nebst Uebungsaufgaben. 1. Tl.: Planimetrie. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Trigonometrie.

Genau, A., die Logarithmen u. die ebene Trigonometrie. Büren, Hagen. Geb. 1 Mk. 10 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Gauss, F. G., die trigonometrischen u. polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 2. Aufl. 8. u. 9. (Schluss-) Hft. Halle, Strien, Verl. à 3 Mk. 50 Pf.

— dasselbe. 2. Aufl. Kplt. Ebd. 36 Mk.; geb. 37 Mk. 50 Pf.

Koll, O., die Theorie der Beobachtungsfehler u. die Methode der kleinsten Quadrate m. ihrer Anwendung auf die Geodäsie u. die Wassermessungen. Berlin, Springer. 10 Mk.; geb. 11 Mk. 20 Pf.

Liznar, J., eine neue magnetische Aufnahme Oesterreichs. (4. vorläuf. Bericht.) Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Hrsg. v. W. Jordan u. C. Steppes. 22. Bd. Jahrg. 1893. (24 Hfte.) 1. Hft. Stuttgart, Wittwer's Verl. Jährlich 9 Mk.

Mechanik.

Finger, J., üb. jenes Massenmoment e. materiellen Punktsystems, welches aus dem Trägheitsmomente u. dem Deviationsmomente in Bezug auf irgend eine Axe resultirt. Leipzig, Freytag, 50 Pf.

Huber, Ph., Katechismus der Mechanik. 5. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Raussenberger, O., Lehrbuch der analytischen Mechanik. In 2 Bdn. 2., wohlf. (Titel-) Ausg. in 1 Bde. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Technik.

Echo, elektrotechnisches. Hrsg. u. Red.: M. Krieg. 6. Jahrg. 1823. (52 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich 3 Mk.

Exner, F., Elektrotechnische Untersuchungen. (III. Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Krämer, J., Construction u. Berechnung f. 12 verschiedene Typen v. Dynamo-Gleichstrom-Maschinen. Für Maschinen-Ingenieure u. Elektrotechniker bearb. Mit 16 Taf., wovon 8 in Farbendr., als Zeichnungs-Vorlagen bei Constructions-Arbeiten, m. erläut. Text u. 18 Fig. Leipzig, Leiner. Kart. 10 Mk.

Kröhncke, G. A. H., Handbuch zum Abstecken v. Curven auf Eisenbahn- u. Wegelinien. Für alle vorkomm. Winkel u. Radien aufs sorgfältigste berechnet u. hrsg. 12. Aufl. Leipzig, Teubner. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Schuhr's, G., elektrotechnisches Adressbuch f. 1893. Eine Sammlg. v. Adressen d. Elektrotechniker u. elektrotechn. Firmen d. In- u. Auslandes, geordnet in 3 Thle. nach Namen, Orten u. e. Bezugsquellen-Verzeichniss. Berlin, Schuhr. Kart. 5 Mk.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch für Studirende der Elektrotechnik. 4. Aufl. Deutsche Uebersetzg. v. C. Grawinkel. 5. u. 6. Hft. Halle, Knapp. à 2 Mk.

Zeitschrift, elektrotechnische. (Centralblatt f. Elektrotechnik.) Red. v. F. Uppenborn. 14. Jahrg. 1893. (52 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Springer. Jährlich 20 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Centralzeitung f. Optik u. Mechanik. Red.: O. Schneider. 14. Jahrg. 1883. (24 Nrn.) Nr. 1. Leipzig, Gressner & Schr. Vierteljährlich 2 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen, deutsche überseeisch-meteorologische. Gesammelt u. hrs. v. der deutschen Seewarte. 5. Hft. Hamburg, Friederichsen & Co. 10 Mk.

Berfried, E., Tafeln zur Veranschaulichung der Ausgestaltung der christlichen Osterrechnung. Mittelwalde, Hoffmann. 8 Mk.

Elster, J., u. H. Geitel, Elmsfeuerbeobachtungen auf dem Sonnblick. Leipzig, Freytag. 2 Mk.

Hartl, H., Bestimmung v. Polhöhe u. Azimut auf der Sternwarte in Athen. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

Himmel u. Erde. Illustr. naturwissenschaftl. Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. V. Jahrg. Octbr. 1892 bis Septbr. 1893. 4. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Hoernes, R., Erdbebenkunde. Die Erscheingn. u. Ursachen der Erdbeben, die Methoden ihrer Beobachtg. Leipzig, Veit & Co. 10 Mk.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1895, m. Angaben f. die Oppositionen d. Planeten (1)—(310) f. 1893. Hrsg. v. dem Rechen-Institute der königl. Sternwarte zu Berlin unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, 1892. Bayern. Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern, hrsg. von der königl. meteorolog. Central-Station durch C. Lang u. F. Erk. 14. Jahrg. 1892. 1. Hft. München, Theod. Ackermann, Verl. Jährlich 18 Mk.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen d. Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. X. Bd. XI. Jahrg. 1891. Magdeburg, Faber'sche Buchdr. Kart. 6 Mk.

Kalender, astronomischer, f. 1893. Nach dem Muster d. K. v. Littrow'schen Kalenders hrsg. v. der k. k. Sternwarte. Neue Folge. 12. Jahrg. Wien, C. Gerold's S., Verl. Kart. 2 Mk.

Kolbenheyer, H., Untersuchungen üb. die Veränderlichkeit der Tagestemperatur. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Mittheilungen der Vereinigung v. Freunden der Astronomie u. kosmischen Physik. Red. v. W. Foerster. 3. Jahrg. 1893. 10 bis 12 Hfte. Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 132. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke Söhne. Für den Band 15 Mk.

Pfeil, L. Graf v., Protuberanzen, Meteoriten, Weltennebel u. Kometen. Berlin, Dümmler's Verl. 60 Pf.

Schück, A., magnetische Beobachtungen auf der Nordsee, angestellt in den J. 1884 bis 1886, 1890 u. 1891. Hamburg, A. Schück's Selbstverl. 6 Mk.

See, Th. J. J., die Entwickelung der Doppelstern-Systeme. Diss. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. Red.: H. J. Klein. 26. Bd. od. Neue Folge 21. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Scholtze. Für den Band 12 Mk.

Stern, P., Ergebnisse zwanzigjähriger meteorologischer Beobachtungen der Station Nordhausen a. Harz. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk.

Sternkarte, drehbare. Der Sternhimmel zu jeder Stunde d.

Jahres. Ausg. f. Mitteleuropa. 11. Aufl. Frankfurt a./M., Deutsche Lehrmittel-Anstalt. 1 Mk. 25 Pf.; transparent 1 Mk. 60 Pf.; m. Beleuchtungsapparat 1 Mk. 80 Pf.; als Lichtschirm zum Aufhängen 1 Mk. 75 Pf.; m. Lichtschirmständer 5 Mk.

Tuma, J., Luftelektricitätsmessungen im Luftballon. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Veröffentlichungen d. Rechen-Instituts der königl. Sternwarte zu Berlin. Nr. 2. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Veröffentlichungen der grossherzl. Sternwarte zu Karlsruhe. Hrsg. v. W. Valentiner. 4. Hft. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchh., Verl. 20 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhès u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Weiss, E., Untersuchung der systematischen Differenzen einiger südlichen Sternkataloge. Leipzig, Freytag. 2 Mk. 40 Pf.

Wetter, das. Meteorologische Monatsschrift f. Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 10. Jahrg. 1893. 1. Hft. Braunschweig, Salle. Jährlich 6 Mk.

Wislicenus, W. F., Tafeln zur Bestimmung der jährlichen Auf- u. Untergänge der Gestirne. Publication der astronom. Gesellschaft. XX. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Zeitschrift, meteorologische. Hrsg. im Auftrage der österreich. Gesellschaft f. Meteorologie u. der deutschen meteorolog. Gesellschaft, red. v. J. Hann u. G. Hellmann. 10. Bd. 1893. 12 Hfte. Wien, Hölzel's Verl. 20 Mk.

Nautik.

Albrecht, M. F. u. C. S. Vierow, Lehrbuch der Navigation u. ihrer mathematischen Hülfswissenschaften. Für die königl. preuss. Navigations-Schulen bearb. 7. Aufl. Berlin, v. Decker's Verl. 12 Mk.; geb. in Leinw. 13 Mk. 50 Pf.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde. 22. Jahrg. 6. Aufl. Ergänzungsheft 1893. Bremen, Heinsius Nachf. 50 Pf.

— dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 22. Jahrg. 6. Aufl. Ergänzungsheft 1893. Ebd. 50 Pf.

Mittheilungen aus dem Gebiete d. Seewesens. Hrsg. vom k. k. hydrograph. Amte, Marine-Bibliothek. 21. Bd. Jahrg. 1893. 12 Hfte. Wien, Gerold's S. 12 Mk.

Nachrichten f. Seefahrer. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt d. Reichs-Marine-Amts. XXIV. Jahrg. 1883. (52 Nrn.) Nr. 1. Berlin, Mittler & S. Vierteljährlich 1 Mk.

Verzeichniss der Leuchtfeuer u. Nebelsignalstationen aller Meere. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt d. Reichs Marine-Amts. 1.—8. Hft. Abgeschlossen Mitte Februar 1893. Berlin, Mittler & S. 6 Mk.; Einbde. à 50 Pf.

Physik.

Adler, G., üb. die an Eisenkörpern im Magnetfelde wirksamen Oberflächenspannungen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Annalen der Physik u. Chemie. Hrsg. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1893. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, J. A. Barth. Jährlich 36 Mk.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 3. Abth. 13. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt, Verl. 3 Mk. 60 Pf.

— dasselbe. 3. Bd. 1. Abth. Ebd. 15 Mk.; geb. in Halbfrz. 17 Mk. 40 Pf.

Herzog, J., u. C. P. Feldmann, die Beobachtung elektrischer Leitungsnetze in Theorie u. Praxis. Berlin, Springer. Geb. 12 Mk.

Hochenegg, C., Anordnung u. Bemessung elektrischer Leitungen. Ebd. Geb. 6 Mk.

Jäger, G., üb. die Temperaturfunction der Zustandsgleichung der Gase. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Müller, J., die Lehre v. der Elektrizität u. den Magnetismus. Ein Lehrbuch zur Einführg. in das Studium der Elektrotechnik m. vielen Uebungsaufgaben. Mittweida, Polytechn. Buchh. 7 Mk. 50 Pf.

Neumann, C., Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik, insbesondere zur Elektrodynamik u. Hydrodynamik. Elektrostatik u. magnetischen Induction. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Seelig, E., Molekularkräfte. Physikalisch-chem. Studie der verschiedenen Körperzustände. 2. Aufl. Durch zahlreiche Tabellen vervollständigt. Berlin, Friedländer & S. 2 Mk. 40 Pf.

Stefan, J., üb. das Gleichgewicht der Elektricität auf e. Scheibe u. e. Ellipsoid. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Vermischte Schriften.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. J. Fröhlich. 10. Bd. (Octbr. 1891 bis Octbr. 1892.) 1. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikal. Classe. 1892. V. u. VI. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Burckhardt, W., mathematische Unterrichts-Briefe. Für das Selbst-Studium Erwachsener. Mit besond. Berücksicht. der ange-

wandten Mathematik bearb. III. Kurs. 2. Aufl. Gera, Griesbach's Verl. 8 Mk. 40 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 59. Bd. Leipzig, Freytag. Kart. 68 Mk.

Journal f. die reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Fuchs. III. Bd. 4 Hfte. (1. Hft.) Berlin, Georg Reimer. Für den Band 12 Mk.

Mittheilungen, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus den Sitzungsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1893. Ebd. 8 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. III. Bd. 3. Hft. Red. v. Repsold, Jaerisch u. Busche. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Monatshefte f. Mathematik u. Physik. Mit Unterstützg. d. hohen k. k. Ministeriums f. Cultur u. Unterricht hrsg. v. C. v. Escherich u. E. Weyr. IV. Jahrg. 1893. 12 Hfte. Wien, Eisenstein & Co. 14 Mk.

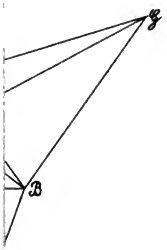
Sitzungsanzeiger d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1893. ca. 30 Nrn. Leipzig, Freytag. 3 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1892. 3. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

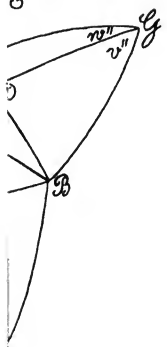
Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1892. Prag, Rivnáč, Verl. 9 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 101. Bd. 8. u. 9. Hft. Leipzig, Freytag. 11 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift f. mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht, hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 24. Jahrg. 1893. 8 Hfte. Leipzig, Teubner. 12 Mk.



g. 2.



atzes von Leman.

Litterarischer Bericht

XLVIII.

Lehrbücher.

Die bestimmten algebraischen Gleichungen des ersten bis vierten Grades nebst einem Anhang: Unbestimmte Gleichungen. Für höhere Unterrichtsanstalten sowie für den Selbstunterricht bearbeitet von P. Michelsen. Hannover 1893. Carl Meyer. 306 S.

Als Zweck des Vorliegenden wird angegeben, dem Lernenden Schwierigkeiten überwinden zu helfen und ihn in der sichern Handhabung der Auflösungsmethoden zu üben. Da durchweg die Lehre von den algebraischen Operationen und Transformationen, soweit sie bei der Lösung von Gleichungen in Anwendung kommen, als bekannt vorausgesetzt wird, so würden beim Uebergange zur Lehre von den Gleichungen wol Schwierigkeiten vor allem in der Verschiedenheit beider Disciplinen zu suchen sein. In jener vollzieht der Schüler nur eine Forderung der Schule ohne Anlass sich um Zweck und Bedeutung zu kümmern, deren Bewusstsein um so leichter schwinden kann, weil die unbenannte und allgemeine Zahl, mit der er operirt, den Gedanken von der Wirklichkeit abzieht. In der letztern soll er lernen die Antwort auf eigene quantitative Fragen selbst zu suchen; hier muss er Zweck und Bedeutung stets im Auge haben. Diese neue Forderung mag Manchen gering erscheinen. Welche Verirrungen und Unklarheiten aber gerade in diesem Punkte noch möglich sind, verraten diejenigen Pädagogen, welche die so-

genannte heuristische Methode der Lösung von Aufgaben empfehlen mit der Behauptung, dass durch sie der Grund des Verfahrens deutlich werde, dahingegen die algebraische Methode zum Resultate führe, man wisse nicht warum, während doch umgekehrt bei ersterer die Kunst so zu fragen, dass sich das Gesuchte ergibt, Geheimniss des Lehrers bleibt, bei letzterer hingegen der ganz einfache Grund nicht nur gelehrt wird, sondern ohne seine Kenntniss gar nicht gerechnet werden kann. Die genannte fundamentale Schwierigkeit ist es indes weniger, die der Verfasser betont; es soll vielmehr, weil die Gleichungen sehr mannigfaltig complicirt gegeben sein können, auch der kürzeste Weg der Lösung und mancher Rechnungsvorteil gezeigt werden. Hiergegen ist zu erinnern, dass man Schwierigkeiten, welche die Ausführung von Operationen bietet, nicht als solche der Gleichungslehre zu betrachten hat. Sind die Aufgaben complicirter als in den vorausgehenden Uebungen der Operationen vorgesehen ist, so wird nur aus diesem Grunde die Arbeit grösser. Rechnungsvorteile kann man eher zu viele als zu wenige mitteilen: die selbst gefundenen sind jedem Rechner nützlicher als die mitgeteilten; jedenfalls sollte man den Schülern einen Rechnungsvorteil erst dann angeben, wenn die Erfahrung vorliegt, dass sie einen zu langen Weg gewählt haben. Zu diesen Rechnungsvorteilen ist aber die wolgeordnete Reihenfolge der Reductionen der Gleichungen, die der Verfasser besonders damit gemeint zu haben scheint, nicht zu zählen, denn diese ist zum Beweise der Erreichbarkeit bestimmter Grundformen notwendig. In beiden Beziehungen findet man in der Ausführung keinen Grund Erhebliches auszusetzen: die für den Anfänger wichtige Bemerkung, dass eine Gleichung (resp. Ungleichung) der natürliche, nicht erst doctrinär umgestaltete, Ausdruck jedes quantitativen Urteils ist, findet sich gleich im Anfang ausgesprochen, und an Rechnungsvorteilen zeigt sich kein Uebermass; auch die hervortretende Ausführlichkeit ist als nützlich anzuerkennen. Allein jene natürlichen Schwierigkeiten können noch sehr vermehrt werden durch diejenigen, welche der Lehrer durch unzweckmässigen Lehrgang, mangelhaften Ausdruck, Ausserachtlassen des zum Verständniss Notwendigen u. s. w. selbst schafft, und dies ist nach gegenwärtiger Abfassung der Fall. Es ist eine bekannte Regel, dass man die Schwierigkeiten einer Aufgabe, wo möglich, isoliren muss. Dies geschieht bei Gleichungen für 1 Unbekannte, indem man sie zuerst auf eine Grundform bringt. Von Grundform ist hier gar nicht die Rede, sondern nur vom Ordnen der Gleichung, bei dem indes noch beliebig viele Terme gleichen Grades stehen bleiben, und nicht danach gefragt wird, ob der Coefficient der höchsten Potenz null ist. In der Tat entspricht also die so geordnete Gleichung der Grundform nicht und entscheidet nicht über ihren Grad. Ohne Rücksicht darauf wird

dennoch der Gleichung ein Grad zugeschrieben, nämlich gleich dem „inhaltlich" höchsten Exponenten der Unbekannten; statt aber das dunkle Wort, welches aushelfen muss, zu erklären, wird nur gesagt, um den wirklichen Grad zu finden, müsse man die Gleichung erst ordnen. Dass man ihn dann findet, wird nicht behauptet. Mit der bald folgenden Aeusserung, der Grad der Gleichung scheine bisweilen höher oder niedriger zu sein, als er wirklich wäre, bekennt der Verfasser im Grunde selbst, dass er den Leser in der Irre herumführt. Im übrigen scheint der Verfasser sehr auf das gefällige Entgegenkommen der Schüler zu rechnen, dass sie stets das denken, was der Lehrer gemeint, aber nicht gesagt hat: das einemal meint er mit einem Buchstaben a eine exclusiv positive Zahl ohne es zu sagen, eine Bedeutung die doch jedenfalls bei der Unbekannten nicht festgehalten wird, ein andresmal meint er mit dem Zeichen $\sqrt{a}$ die Wurzel mit Doppelvorzeichen, sogar wenn in demselben Ausdruck dasselbe Zeichen im Sinne des absoluten Wertes gebraucht ist, beides ohne Erklärung. Von Unachtsamkeiten dieser und mancher Art ist das Buch voll. Das Ganze macht den Eindruck von ungenügender Beherrschung des Lehrstoffs: wäre der Verfasser besser damit vertraut, so würde er z. B. zur Discussion der quadratischen Gleichung gewiss einen kürzeren Weg gewählt haben; er lässt aber sogar ganz unerwähnt, dass Summe und Product der Wurzeln von Anfang bekannt, und aus ihnen deren Vorzeichen unmittelbar ersichtlich sind. Neben allerhand logisch pädagogischen Mängeln zeichnet sich das Buch durch Reichhaltigkeit an Lehren und Uebungen aus.

Hoppe.

Die wichtigsten Rechenregeln nebst Musterbeispielen insbesondere Lösung aller Aufgaben der Regeldetri und der darauf beruhenden Rechnungsarten vermittelst einheitlicher Behandlung des Ansatzes. Zur Wiederholung für die Schüler aller Anstalten bearbeitet von Dr. phil. R. Olbricht, Oberlehrer am Königlichen Realgymnasium zu Döbeln. Leisnig 1893. Herrm. Ulrich. 48 S.

Der erste Teil des Buches ist eine kurzgefasste Zusammenstellung des Inhalts der numerischen Rechenlehre mit unbenannten und benannten Zahlen. Der zweite Teil ist darauf gerichtet, die Regeldetri zu einem gleichmässig geordneten Algorithmus zu gestalten. Er setzt voraus, dass der Schüler nur Aufgaben bekommt, bei denen die 4 Glieder wirklich in geometrischer Proportion stehen, und sagt nichts davon, woran er dies erkennen soll. Es handelt sich also hier nur um Ausführung von Vorschriften ohne Urteil. H.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene für höhere Schulen. Von Dr. Bernhard Hercher, ordentlichem Lehrer am Grossh. Gymnasium zu Jena. Erweiterter Sonder-Abdruck aus dem Lehrbuch der Geometrie von demselben Verfasser. Leipzig 1893. Carl Jacobsen. 37 S.

Das Buch hat nicht im entferntesten etwas mit analytischer Geometrie zu tun: es gibt weder eine Grundlage geometrischer Untersuchung, noch eine Deduction auf allgemeiner Grundlage, sondern teilt nur einige Eigenschaften gewisser Raumgebilde mehr resultatweise als begründet mit, denen dann und wann das Allgemeinere gleichsam als nebensächlich beigefügt wird. Der Hauptgegenstand sind die Kegelschnitte. Voraus geht einiges über ebene Coordinaten in Aufgaben und deren Resultaten mit bloss nominellen Erklärungen, zumteil so ausgesprochen, dass man nicht erkennen kann, was der Verfasser mit den Namen bezeichnen will, z. B.: „Die Axen bilden das Coordinatensystem". — „Die Function . . . heisst die Gleichung der Linie". — Die Parabel, Ellipse, Hyperbel mit denjenigen Focaleigenschaften, welche hernach zugrunde gelegt werden, werden einzeln aus Schnitten des geraden Kegels mit der Ebene stereometrisch hergeleitet, die Construction, Tangente, Polargleichung, Quadratur, Kubatur der Rotationsfigur und die Trisection des Winkels mit Coordinaten behandelt. Bei der Winkeltrisection hat der Verfasser nicht beachtet, dass man mit einem einzigen Kegelschnitt alle Winkel dreiteilen kann; er verlangt vielmehr für jeden gegebenen Winkel eine besondere Curvenconstruction.

Hoppe.

Grundzüge der Trigonometrie und Stereometrie für den sechsten Jahrescursus höherer Lehranstalten bearbeitet von Dr. Georg Leonhardt, Oberlehrer am Herzogl. Friedrichs-Realgymnasium in Dessau. Halle a. S. 1893. Eugen Strien. 71 S.

Das erstere der zwei gesonderten Lehrbücher behandelt die Theorie und Praxis der Dreiecksaufgaben vollständig und fügt noch einige Vermessungsaufgaben hinzu, gibt dagegen von der Goniometrie nur soviel, als für Begriffserklärung und Gebrauch der Tafeln notwendig ist, übergeht also alle algebraischen Relationen der Functionen sowie die Formeln für die Functionen der Summe zweier Winkel. Die Deductionsmethode ist für jedes Einzelne selbständig gewählt, einfach und vernünftig und recht ausführlich entwickelt, leider auch, wozu die Ausführlichkeit leicht verleitet, mit der logisch fehlerhaften Wiederholung schon gelieferter Beweise. War z. B. die Sinusproportion an einem beliebigen Seitenpare bereits be-

wiesen, so durfte sie nicht an einem andern Pare besonders bewiesen werden. Man kann schwer begreifenden Schülern zu Hülfe kommen, darf aber nicht die Unachtsamkeit noch begünstigen. In der Stereometrie hat der Verfasser einer „Vorschrift" gemäss die Körperberechnung zum Anfang gemacht und die Lehre von der relativen Lage der Geraden und Ebenen nachfolgen lassen. Er hat damit handgreiflich ans Licht gestellt, dass die „Vorschrift" ganz unerfüllbar ist. Sätze vorläufig anwenden und nachträglich beweisen kann man doch nur, wenn die darin vorkommenden Worte einen verständlichen Sinn haben. Wie kann man aber einen mathematischen Körper bestimmen ohne von gegenseitiger Lage von Gebilden im Raume zu reden? Die Beschreibung des Prismas fängt im Buche mit den Worten an: „Errichtet man in den Endpunkten eines Rechtecks *ABCD* Lote in den Raum hinein — ". Worauf die Lote senkrecht stehen sollen, konnte der Verfasser nicht sagen; denn von Loten auf eine Ebene durfte nicht die Rede sein. Er war also, um die Vorschrift zu befolgen, gezwungen sinnlos zu schreiben. Das Buch schliesst mit einem Abschnitt über Eigenschaften der Geraden und Ebenen, worin alle principiellen Lehren kurz und gut geordnet zusammengestellt sind, zuerst betreffend die relative Lage, dann den Ausdruck der Neigungen durch Winkel, dann die Abhängigkeit und Bedingungen der Lage. Hoppe.

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien. Nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Dr. Bernhard Hercher, ordentlichem Lehrer am Grossh. Gymnasium zu Jena Erstes Heft. Enthaltend Planimetrie erster Teil einschliesslich der trigonometrischen Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. Anhang: Anfangsgründe der Körperlehre. (Lehraufgabe von Quarta bis Untersecunda). — Zweites Heft. Enthaltend Planimetrie und Ebene Trigonometrie. (Lehraufgabe der Obersecunda und Unterprima.) — Drittes Heft. Enthaltend Stereometrie und Grundlehren von den Kegelschnitten. (Lehraufgabe der Prima.) Leipzig 1893. Carl Jacobsen. 78 + 40 + 64 S.

Das 1. Heft beginnt in Erklärungen und Grundsätzen mit der exacten Gestaltung der gemeinen Raumanschauung, woran sich nur 2 Winkelsätze mit leichtem Beweise anschliessen. Die Abfassung zeichnet sich durch Einfachheit und correcten Ausdruck aus; 2 Aussagen sind unzutreffend: die Geometrie beschäftigt sich nicht bloss mit Raumgrössen, sondern mit Raumgebilden in quantitativer und qualitativer Hinsicht. Auch in letzterer Beziehung gehört sie der Mathematik, d. h. Grössenlehre an, weil es

ihr und keiner andern Wissenschaft obliegt die räumlichen Qualitäten (Gestalt und Lage) durch Grössen exact zu bestimmen. — Die Behauptung, für Kreislinie und Kreisfläche würde auch Kreis gesagt, ist irrig. Kreislinie sagt man in der Doctrin im Gegensatz zur Fläche oder aus Rücksicht gegen Unkundige, sonst heisst sie gewöhnlich und mit gutem Grunde Kreis. Im Sinne von Kreisfläche ist das Wort Kreis weder in vulgärer noch in doctrinärer Sprache in Gebrauch, nicht einmal in denjenigen Lehrbüchern, welche den Kreis als Fläche definiren. Euklid's Definition kann für uns nicht massgebend sein. — Nach dieser grundlegenden Einführung beginnt die in Lehrsätzen und Beweisen fortschreitende Entwickelung mit der Parallelentheorie gestützt auf den Grundsatz: Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu ihr nur eine Parallele ziehen. Dann folgen nach Einschaltung der Lehre von der Symmetrie, die Lehren vom Dreieck, von der Congruenz, vom Viereck, vom Kreise, vom Flächeninhalte, von Proportionalität und Aehnlichkeit. Der Fall der Irrationalität wird erwähnt, aber die Ergänzung der Lehre für Prima vorbehalten. So lange sollen die Schüler das Unbewiesene für bewiesen hinnehmen?! Nun wird durch Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks (einschl. d. pythagoräischen Lehrsatz) auf die Elemente der Trigonometrie und auf die Kreisberechnung hingeleitet. Die Körperberechnung ist in den Anhang des 1. Hefts gebracht worden; es war dies eine leidliche Auskunft, um zugleich der Schulvorschrift und auch Platon's Vorschrift „*Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰς ἰτω*“ nachzukommen, indem der unmathematischen Behandlung ein Platz ausserhalb der eigentlichen Doctrin angewiesen ward. Im 2. Hefte werden einige Lehren der neuern synthetischen Geometrie für den Gymnasialunterricht nutzbar gemacht; dann folgt die ebene Trigonometrie in vollem Umfange. Im 3. Hefte beginnt die Stereometrie correcterweise mit der Lage der Geraden und Ebenen. Dann folgt die Lehre von den Körpern und ihrer Inhaltsberechnung im elementaren Umfange, dann die Coordinatenlehre nebst Anwendung auf die Kegelschnitte und im Anhang Quadratur der Parabel und Ellipse, Kubatur des Rotationsellipsoids. Hoppe.

Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert von Dr. Guido Hauck, Geh. Regierungsrat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Siebente Auflage. (Sechste der Neubearbeitung.) Mit 67 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Tübingen 1893. H. Laupp. 225 S.

Dies Buch ist in 4. Auflage im 251. litterarischen Bericht

Seite 22 besprochen In den folgenden Auflagen haben mancherlei, jedoch nur unerhebliche Aenderungen stattgefunden. H.

Grundriss der Geometrie für höhere Lehranstalten mit zahlreichen Uebungsaufgaben und in den Text gedruckten Figuren. Von Dr. Richard Sellentin, Professor an der Oberrealschule zu Elberfeld Erster Teil. Planimetrie. Köln 1893. M. Du Mont-Schauberg. 163 S.

Das Lehrbuch ist sehr reichhaltig; es beschränkt sich nicht auf das Notwendige zur Vollständigkeit der Principien, doch ist jede Zugabe, sei es dass der Schule die erforderliche Zeit zu Gebote steht oder dass der Privatfleiss sich ihr widmet, ganz geeignet eine rechte Vertrautheit mit der geometrischen Praxis zu erzeugen. Die Themata, sowie ihre Reihenfolge, sind bis auf zwei, aus der neuern synthetischen Geometrie aufgenommene, die gewöhnlichen, jedes für sich recht weit ausgeführt und fortgeführt. Exacte Logik mag in den meisten Deductionen vorhanden sein; in der Entwickelung der Parallelentheorie jedenfalls herrscht die grösste Confusion. An der Grundlage einer correcten Behandlung der Winkelsätze lässt es der Verfasser in keinem Stücke fehlen: der notwendige Grundsatz ist ausgesprochen, die Grössenvergleichung der Winkel ausdrücklich gezeigt, der Begriff der gleichen und ungleichen Richtung definirt; es war daher leicht die Winkelsätze an Parallelen zugleich exact und anschaulich zu beweisen. Aber dies geschieht nicht; als ob der Verfasser nicht verstanden hätte, wozu die selbst gegebene Belehrung dienen soll, lässt er auf die Lehrsätze einen angeblichen Beweis folgen, in welchem der Grundsatz gar nicht in Anwendung kommt, und der in versteckter Form das Zubeweisende zur Voraussetzung macht. Mangel an Orientirung zeigt sich schon dadurch, dass er dem Leser überlässt, die Definition der Richtung aus zwei weit getrennten Stellen des Buches zusammenzusetzen. Die erste lautet: „Parallele Linien sind Linien, welche dieselbe Richtung haben d. h. Linien, welche beliebig verlängert sich nicht schneiden". Das sind offenbar 2 Definitionen, die der gleichen Richtung und der Parallelität, zwei Wörter für denselben Begriff, beide bedeuten, dass die Linien sich nicht schneiden. Die Definition der gleichen Richtung wird nun später ergänzt zur vollen Bestimmung des relativen Begriffs der Richtung überhaupt durch die Angabe: „Der Richtungsunterschied zweier geraden Linien wird durch den Winkel derselben gemessen". Beide Angaben erschöpfen die möglichen Fälle. Zwei ungleich gerichtete Gerade schneiden sich, und der Winkel, den sie dann stets bilden, ist zu verstehen unter dem Richtungsunter-

schiede. An diese Erklärung haben wir uns zu halten, um den angeblichen Beweis für die Gleichheit der Gegenwinkel an Parallelen zu verstehen. Er beginnt: „Da jene Linien parallel sind, so haben sie auch gleiche Richtung (d. h. sie schneiden sich nicht), also haben sie auch gegen die schneidende Gerade dieselbe Neigung oder denselben ‚Richtungsunterschied" ‚(d. h. sie bilden mit ihr gleiche Winkel). Als selbstverständlich vorausgesetzt ist demnach, dass aus dem Sich-nicht-schneiden zweier Geraden, die Gleichheit der Gegenwinkel folgt, und das eben sollte bewiesen werden.

Hoppe.

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten.

Trigonometrie für höhere Lehranstalten.

Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. (Letzteres:) Mit 16 Figuren. Freiburg im Breisgau 1893. Herder. 79 + 52 S.

Der Vortrag besteht in einer ganz ungebundenen Besprechung, welche nach freiem Ermessen in jedem einzelnen Falle mit der allgemein gefassten Lehre oder mit Vorführung von Beispielen beginnt. Den verbindenden Faden in theoretischer wie in pädagogischer Hinsicht kann nur der Kundige durchschauen, der Lernende wird nicht zum Mitwisser gemacht und kann daher nicht das Bewusstsein haben eine höhere Stufe des Wissens erreicht, sondern nur mehr Lehren hinzuerhalten zu haben. Die Reihenfolge der Themata erscheint ziemlich unmotivirt. Die Teile der Gleichungslehre sind zwischen Abschnitte von Operationen eingeschoben, mit denen sie in keiner nahen Beziehung stehen. Das Ganze ist in 3 Lehrgänge geteilt, deren zweiter mit der Einführung der Negativen beginnt, nachdem bereits im ersten die Reduction der algebraischen Gleichungen auf die Normalform, nach Graden geordnet, resultatweise aufgestellt war. Diese würde, um exact zu verfahren, offenbar dahin zu berichtigen sein, dass statt aller + Zeichen ± gesetzt würde. Es ist nämlich wiederholt darauf aufmerksam gemacht worden, dass auf dem Standpunkte des 1. Lehrgangs, wo alle Zahlen absolute sind, gewisse Aufgaben in gewissen Fällen als unlösbar auftreten. Hier bei den Normalformen hingegen geschieht dies nicht: obgleich keine Unmöglichkeit der verlangten Ausrechnungen vorliegt, und doch ein anderes Resultat gefunden wird als das angegebene, ist kein Wort davon gesagt, dass die aufgestellten Formen auf dem Standpunkte des 1. Lehrgangs nicht immer erreichbar sind. Dem Vorstehenden

liegt es fern, Nachlässigkeiten der Bearbeitung zu rügen; aber auch der folgende Gesichtspunkt, welcher dem Vorgehen eine gewisse Rechtfertigung zu verleihen scheinen könnte, soll dem Verfasser nicht zudictirt werden; vielmehr handelt es sich nur darum einen Punkt der Didaktik, dem trotz aller Wirkung im grossen die Beachtung gefehlt hat, hier ohne Abschweif von der Sache zu besprechen. Es kann nämlich in Frage kommen, ob es zu empfehlen sei, dass der Schüler, der nach gewöhnlicher Unterrichtsweise im Genusse der Vorteile der heutigen Arithmetik nie Anlass bekommt den Wert der Fortschritte, die der historische Entwickelungsgang erst in mehr als 1000 Jahren gemacht hat, durch eigene Erfahrung kennen und empfinden lerne, indem er zuerst beim Rechnen mit allgemeinen Zahlen sich in Gefahr befindet unberechtigte Schlüsse zu machen, dann auf Grenzen der Gültigkeit aufmerksam werden muss, endlich von dieser mühevollen Arbeit erlöst wird durch den Begriff der algebraischen Zahl. Einer solchen Führung entspricht in der Tat das Verfahren im vorliegende Buche. Es soll nicht bestritten werden, dass eine derartige Beteiligung am Entdeckungsprocess manchem Schüler nützlich sein kann, dass er vielleicht sogar aus anfänglichem Irren und Fehlen Gewinn ziehen mag. Aber eine viel wichtigere Erwägung von andrer Seite steht doch einer wissentlichen pädagogischen Verwendung des fraglichen Förderungsmittels warnend entgegen. In der Wissenschaft wie im praktischen Leben herrscht bekanntlich bei der Menge die Neigung am Unbewiesenen solange festzuhalten bis das Gegenteil bewiesen ist. Im praktischen Leben ist die Verderblichkeit dieser Regel besonders häufig durch erfolgreiche Speculationen, denen die Menge zuströmte, bis der Krach ein Ende machte, ans Licht gestellt. In Betreff der Wissenschaft ist wol ein recht nahe liegender Beleg dafür, wie stark jene Neigung waltet, folgender. Kant hatte die Existenz der Mathematik als hinreichenden Beweis der Möglichkeit synthetischer Erkenntniss apriori aufgestellt. Gauss und Riemann bewiesen dagegen, dass die Geometrie auf Erfahrungen beruht. Weil nun in Betreff der Arithmetik Kant's unbegründete Meinung noch nicht widerlegt ist, so wird noch heute von Vielen die Arithmetik als reine Wissenschaft apriori der Geometrie entgegengesetzt. Es würde von der Sache abführen, wollten wir hier darauf eingehen, wie jene Verkehrtheit der einzige Grund ist, warum manche principielle Fragen jahrhundertelang nicht gelöst werden konnten. Die Mathematik ist in der glücklichen Lage, jener verderblichen Neigung mit strenger Controle entgegentreten zu können, indem sie stets vom Evidenten zum Evidenten fortschreitet. Daher ist es auch Pflicht des mathematischen Unterrichts diese Errungenscheft Euklid's aufrecht zu halten, und das ist nur möglich, wenn jeder Satz auf derselben Stufe, wo er gelehrt wird,

auch in vollem Umfang apodiktisch eingesehen werden kann. Es heisst die falsche Neigung begünstigen, wenn man Beweise oder Ergänzung von Erklärungen einer höhern Stufe vorbehält. In Anwendung auf das vorliegende Buch folgt daraus, dass es unbedingt notwendig gewesen wäre, nach der Subtraction auch die Erweiterung des Zahlbegriffs zu lehren, ehe von algebraischen Transformationen die Rede war, welche auf den neuen Begriff fussen.

Das Vorwort des Verfassers zur „Trigonometrie" macht sich auffällig durch Schmähungen, die er ohne deutliche Angabe, wem und welcher Sache sie gelten sollen, in allgemeinen Phrasen in die Welt hinein schleudert, mit denen er aber nach allem weder jemandem hat kränken noch irgend eine Leistung hat herabsetzen, sondern nur sein eigenes Werk als etwas ganz neues hat anpreisen wollen. Er sagt, es unterschiede sich in nicht wenigen Punkten von bisherigen Bearbeitungen des gleichen Gegenstandes, nennt aber keinen einzigen, sondern deutet zur Charakterisirung der bisherigen Methode nur auf einen „hoffentlich für immer beseitigten Gedanken" hin, ein wissenschaftliches Lehrgebäude dem Anfänger von vornherein, und zwar in fertigem Aufbau, zu überliefern." Und was verheisst nun der Verfasser an die Stelle des Beseitigten zu setzen? Soll das gedruckte, den Schülern (oder Lehrern) gegebene Lehrbuch kein Lehrgebäude enthalten? soll das Lehrgebäude unwissenschaftlich oder unfertig sein oder nach jedem Semester abgeändert werden? Das läuft doch auf den reinen Nihilismus hinaus? nur Beseitigung ist's, was er verlangt; an ein Besseres das folgen soll, scheint noch jeder Gedanke zu fehlen. Nach fernerer Aeusserung des Verfassers schriebe sich die alte Methode von „blinder Nachahmung" des Werkes von Eukleides her. Bekanntlich hat Eukleides gar kein Werk über Trigonometrie geschrieben; das Wort „blinde Nachahmung" erweist sich als sinnlose Phrase. Weiterhin behauptet er, die Lehrbücher hätten „mit dem Herkommen nicht zu brechen gewagt". Jeder, der einige der nach einander erschienenen Lehrbücher näher angesehen hat, wird gefunden haben, dass sie ohne sich an ein Herkommen zu binden mit mehr oder minder Geschick und Befähigung nur dahin arbeiten das Erlernen leichter und das Beherrschen vollkommener zu machen als ihre Vorgänger; sie mussten also, damit ihre Herausgabe nicht überflüssig schiene, vom Herkommen abweichen um eine Besserung aufzuweisen. Weiterhin spricht der Verfasser von „systematischen Klügeleien", als ob solche zur Charakterisirung der alten Methode gehörten. Die systematische Gestalt ist der Trigonometrie, gemäss der Einheitlichkeit ihrer Aufgabe, offenbar von Natur eigen, wird also nicht von den Bearbeitern künstlich hineingetragen. Der lästernde, aller Wahrheit entbehrende

Ausdruck „Klügeleien" scheint nur gewählt zu sein, um dem zuvorzukommen, dass man ihn gegen den gebraucht, dem diese natürliche Gestalt nicht gefällt.

Von allem dem Abschreckenden des Vorworts findet man indes im Buche keine Spur. Es ist nicht weniger wissenschaftlich, nicht weniger fertig bearbeitet als irgend ein andres Lehrbuch. Eher könnte darin die Eleganz des Abhandlungsstyls vor pädagogischen Gesichtspunkten bevorzugt erscheinen. Vielleicht war das Vorwort für andere Leser als diejenigen, die das Buch gebrauchen wollen, und zwar in diesem Falle für unkundige und urteilsunfähige bestimmt. Unterscheidend für die gewählte Methode ist, dass die Herleitung der Formeln mit der Berechnung des Dreiecksinhalts aus den Seiten beginnt. Wenn Manche behaupten, die Trigonometrie böte den Anfängern Schwierigkeiten — es ist freilich kaum zu begreifen, worin diese liegen sollen, da die Schüler schon vorher mit Linienverhältnissen und etwas rechnender Geometrie bekannt werden — so könnten dieselben an der Methode tadeln, dass sie gerade mit einer vergleichsweise schwierigeren Aufgabe den Anfang macht, und erst nachher zur einfachen Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks übergeht. Die Methode hat offenbar erstens den Vorzug der Eleganz, sofern aus der Lösung eine Reihe notwendiger Formeln sofort hervorgehen; sie wird daher dem Analytiker wol mehr behagen; einen Schritt zur angekündigten Reform des Unterrichts vermag man darin nicht zu erkennen. Zweitens dient sie dazu, die Einführung der formell neuen Elemente etwas weiter hinaus zuschieben. In der Tat werden hernach die Winkelfunctionen jede für sich gesondert behandelt, als wäre es Absicht dem Schüler so wenig als möglich vom specifischen Charakter der Trigonometrie merken zu lassen, das hiesse dann, der Verfasser wollte verhüten, dass der Schüler mit dem, was er lernen soll, bekannt würde!

Im ganzen zeigt das Lehrbuch kein wesentliches Abgehen von der bisherigen Lehrweise, das Wenige, was ihm eigentümlich ist, streitet sicher gegen kein Herkommen; ob es förderlich ist, muss die Erfahrung an den Tag bringen; darauf passt das Wort Uhland's: „Vom Guten hab' ich sichre Spur, vom Bessern leider nicht".

Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Goldbreck, E., Descartes mathemathisches Wissenschaftsideal. Diss. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Gruson, H., im Reiche des Lichtes. Sonnen, Zodiakallichte, Kometen, Dämmerungslicht-Pyramiden nach den ältesten ägypt. Quellen. Mit 28 Fig. u. 9 Taf., z. Thl. in buntfarb. Ausführg. Braunschweig, Westermann. 8 Mk.; Einbd. 1 Mk.

Harder, F., astrognostische Bemerkungen zu den römischen Dichtern. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Herz, N., üb. die Alphonsinischen Tafeln u. die im Besitze der k. k. Hofbibliothek in Wien befindlichen Handschriften derselben. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. E. Lampe. 22. Bd. Jahrg. 1890. 2. Hft. Berlin, Georg Reimer. 8 Mk.

Neteler, B., Stellung der alttestamentlichen Zeitrechnung in der altorientalischen Geschichte. 3. Untersuchg. der Zeiträume der 70 Jahrwochen. Münster, Theissing'sche Buchh. 50 Pf.

Obermayer, A. v., zur Erinnerung an Josef Stephan, k. k. Hofrath u. Professor der Physik an der Universität in Wien. Wien, Wilh. Braumüller. 1 Mk. 40 Pf.

Saalschütz, L., üb. Zahlzeichen der alten Völker. Vortrag. [Aus: „Schriften d. physikal.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg".] Königsberg, Koch. 20 Pf.

Methode und Principien.

Huygens, Chr., Abhandlung üb. die Ursache der Schwere. Deutsch v. R. Mewes. Berlin, Friedländer's Druckerei. 1 Mk. 60 Pf.

Januschke, H., der Aetherdruck als einheitliche Naturkraft. Progr. Teschen, Prochaska, Verl. 1 Mk. 80 Pf.

Kloock, H., kritische Grundlegung der Arithmetik. Bonn, Röhrscheid & Ebbecke. 2 Mk.

Koppe, M., die Behandlung der Logarithmen u. der Sinus im Unterricht. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Oz'egowski, A., die Quadratur des Kreises. Ostrowo, Niesiolowski. 1 Mk. 50 Pf.

Steuer, W., Methodik des Rechenunterrichts. 5. Aufl. Breslau, Woywod. 4 Mk. 50 Pf.; geb. in Leinw. 5 Mk. 25 Pf.

Tischner, A., les astronomes. Leipzig, Fock, Verl. 60 Pf.

Lehrbücher.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik f. den Schulunterricht bearb. (In 4 Tln.) 2. Tl. Planimetrie. 96. u. 97. (Ster.)-Aufl. Mit 9 (eingedr.) Taf., enth. 138 Fig. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. Geb. 1 Mk 65 Pf.

Sorme, J., u. Th. Sänger, mathematische Wiederholungshefte im Anschluss an die neuen Lehrpläne höherer Unterrichtsanstalten. IV. Hft. Abschlussprüfung. Marburg, Ehrhardt's Univ.-Buchh. 50 Pf.

Sammlungen.

Böhme's, R., Rechenbücher, Neubearbeitung. 6. Hft. Rechenbuch f. höhere Lehranstalten u. Lehrer-Seminare. Berlin, G. W. F. Müller. 1 Mk. 30 Pf.

Danzig, E., Uebungsstoff zur Auflösung planimetrischer Konstruktions-Aufgaben mittelst algebraischer Analysis. Progr. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Fölsing, Rechenbuch f. Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen, Realschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare etc. 2 Tle. Bearb. v. O. Hoffmann. 21. Aufl. Altenburg, Pierer. Geb. à 1 Mk. 20 Pf.

Geigenmüller, R., Elemente der höheren Mathematik, zugleich als Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus der analyt. Geometrie, algebr. Analysis, Differential- u. Integralrechng. Für techn.

Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. I. Bd. Die analyt. Geometrie. 3. Aufl. Mittweida, Polytechn. Buchh. 5 Mk.

Günther, F., u. F. Böhm, Rechenbuch f. höhere Lehranstalten. 3. Aufl Berlin, H. W. Müller. 1 Mk. 80 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Heis, E., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. In systemat. Folge bearb. f. Gymnasien, Realschulen, höhere Bürgerschulen u. Gewerbeschulen. 86.—88. Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg'sche Buchh. 3 Mk.

Heller, J. F., methodisch geordnete Sammlung v. Aufgaben u. Beispielen aus der darstellenden Geometrie f. Realschulen. III. Tl. Für die IV. Classe. Wien, Hölder. 80 Pf.

Hoffmann, J., u. J. Klein, Rechenbuch f. Seminaristen u. Lehrer. Neu bearb. v. P. Klauke u. J. Klein. 12. Aufl. Düsseldorf, Schwann. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.; Antworten 60 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1198.—1217. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lösungen zu den mathematischen Absolutarialaufgaben der bayerischen Realschulen. (1869—1892 incl). Von F. R. München, Kellerer. 2 Mk. 20 Pf.

Magnus, K. L. H., u. R. Wenzel, Rechenbuch f. Handwerker- u. gewerbliche Fortbildungsschulen. Mit gleichmäss. Berücksicht. d. Kopf- u. Tafelrechnens. 1. Tl. Ausg. A. 3. Aufl. Hannover, Meyer. 50 Pf.

Matthiessen, L., Uebungsbuch f. den Unterricht in der Arithmetik u. Algebra. Nach der Aufgabensammlg. v. Heis f. höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen, Progymnasien u. Realschulen II. Ordng. bearb. 3. Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg'sche Buchh. 2 Mk.

Ribi, D., Aufgaben üb. die Elemente der Algebra, methodisch geordnet u. in engem Anschluss an den „Leitfaden" von M. Zwicky. III. Hft. 6. Aufl. Hrsg. v. M. Zwicky. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. 50 Pf.

Roesler, J. K., u. F. Wilde, Beispiele u. Aufgaben zum kaufmännischen Rechnen. Für den Unterricht in höhern Schulen. 1. Tl. 5. Aufl. Halle, Gesenius. 2 Mk.

Schmid, K., 100 arithmetische Aufgaben v. bayerischen Lehrer-Anstellungsprüfungen. Ausführlich gelöst. München, Kellerer. 1 Mk.

Schürmann, F., u. F. Windmöller, Rechenbuch f. gewerbliche u. kaufmännische Fortbildungsschulen. 2. Tl. Essen, Bädeker, Verl. 1 Mk.

Stockmayer, H., u. M. Tescher, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen, der Realschulen u. verwandter Lehranstalten. 2 Bdchn. f. 11—12 jähr. Schüler. 6. Aufl. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 60 Pf.

Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch der Logarithmen f. Mittelschulen u. höhere Lehranstalten. 13. Aufl. Ster.-Ausg. Wien, Bermann & Altmann, Verl. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche f. Schule u. Praxis bearb. Ster.-Dr. 39. Aufl. Halle, Strien, Verl. Geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

— dasselbe. Kleine Ausg. Ster.-Dr. 4. Aufl. Ebd. Geb. in Leinw. 1 Mk. 60 Pf.

— polygonometrische Tafeln. Zum Gebrauche in der Landmessg. f. die Teilg. des Quadranten in 90 Grade zu 60 Minuten. Ebd. Geb. in Leinw. 12 Mk.

Hertzer, H., fünfstellige Logarithmentafeln. 3. Aufl. Berlin, Gaertner's Verl. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Kaselitz, Wandtafeln f. den ersten Rechenunterricht in Zahlenbildern. 13 Blatt à 51 × 83, 5 cm. Berlin, Nicolai'sche Verl.-Buchh. (Stricker). 5 Mk.

Ligowski, W., Taschenbuch der Mathematik, Tafeln u. Formeln zum Gebrauche f. den Unterricht an höheren Lehranstalten u. z. Anwendg. bei Berechngn. 3. Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. Kart. 2 Mk. 80 Pf.

Rohrbach, C., vierstellig logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst einigen physikal. u. astronom. Tafeln f. den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. Gotha, Thinemann, Verl. 60 Pf.

Scherer, logarithmisch-technische Rechentafel auf Stahlblech od. Aluminium (33 × 21) cm. Schieber aus Glimmer (18 × 12 cm). Nebst Hülfstafel. Kassel, Klaunig. In Mappe 12 Mk.

Schülke, A., trigonometrische Tafel. (1 Blatt.) Leipzig, Teubner. 10 Pf.

Tafeln, zwölf, m. 14000 Divisionsaufgaben ohne Rest, e. unentbehrl. Hülfsmittel zum Rechnen m. ganzen Zahlen u. Dezimalbrüchen. Essen, Langguth's Verl. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bode, A., Leitfaden f. den arithmetischen Unterricht in Lehrer-Seminaren, bearb. f. die Hand der Seminaristen. Halle, Herm. Schroedel, Verl. 1 Mk. 75 Pf.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 17. Aufl.

(In 16 Lfgn.) 1. u. 2. Lfg. Strassburg, Strassb. Druckerei u. Verlagsanstalt. à 25 Pf.

Gegenbauer, L., arithmetische Untersuchungen. [Aus: „Denkschr. d. k. Akad. d. Wiss.“] Leipzig, Freytag. 2 Mk. 40 Pf.

Güntsche, R, Beitrag zur Integration d. Differentialgleichung $\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Guth, F., das verbundene Kopf- u. Zifferrechnen, f. mehrklass. Volks-, Mittel-, Töchter- u. Fortbildungsschulen bearb. Ausg. f. die Lehrer. I. Tl. Die 4 Grundrechnungsarten in ganzen, vorzugsweise einfach benannten Zahlen. 30. Aufl. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 1 Mk. 65 Pf.

Hellwig, C., Berechnung der Wurzeln kubischer u. biquadratischer Gleichungen, besonders auch der irrationalen Wurzeln der ersteren im irraduciblen Falle. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk.

Kaselitz, Wegweiser f. den Rechenunterricht in deutschen Schulen. Methodisches Handbuch f. Lehrer u. Seminaristen. 3 Tle. 2. Aufl. Berlin, Nicolai'sche Verl.-Buchh. (Stricker). à 3 Mk.

Kohn, G., üb. symmetrische Functionen der Wurzeln e. algebraischen Gleichung. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss.“] Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Legendre, A. M., Zahlentheorie. Nach der 3. Aufl. ins Deutsche übertr. v. H. Maser. 2 Bde. 2. (Titel-)Ausg. Leipzig, Teubner. à 6 Mk.

Mayenberg, J., die wichtigsten Begriffe u. Regeln aus der Arithmetik. 4 Aufl. Hof, Lion. 20 Pf.

Meyer, M., Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit d. linearen homogenen Differentialgleichungen 4. Ordnung m. Hülfe v. Differentialinvarianten. Diss. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Olbricht, R., die wichtigsten Rechenregeln, nebst Musterbeispielen, insbesonde Lösg. aller Aufgaben der Regeldetri u. der darauf beruh. Rechnungsarten vermittelst einheitl. Behandlg. d. Ansatzes zur Wiederholg. f. die Schüler aller Anstalten bearb. Leisnig, H. Ulrich. 1 Mk.

Rogel, F., trigonometrische Entwicklungen. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss.“] Prag, Rivnáč, Verl. 80 Pf.

Schrentzel, W., üb. die Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung der Fuchs'schen Klasse m. 3, im Endlichen gelegenen, singulären Punkten. Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

Schwering, K., Anfangsgründe der Arithmetik u. Algebra f. höhere Lehranstalten. Freiburg, Herder. 1 Mk.; Einbd. 30 Pf.

Stolz, O., die Maxima u. Minima der Functionen v. mehreren Veränderlichen. (II. Nachtrag.) [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss.“] Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Geometrie.

Arndt, E., Hauptsätze der ebenen Geometrie nebst Uebungsaufgaben zum Gebrauche an Volks- und Mittelschulen. 3. Aufl. Berlin, Wiegandt & Schotte. Kart. 50 Pf.

Braune, A., Raumlehre f. Volks-, Bürger- u. Fortbildungsschulen, sowie f. Präparanden-Anstalten. Nach method. Grundsätzen bearb. 3. Aufl. Halle, Herm. Schroedel, Verl. 65 Pf.

Emmerich, A., der Koordinatenbegriff u. einige Grundlehren v. den Kegelschnitten. Für den Schulunterricht bearb. Essen, Baedeker. Geb. 80 Pf.

Fialkowski, N., die zeichnende Geometrie od. Anleitg. zum Zirkelzeichnen f. Ackerbauschulen. 2. Aufl. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn. 1 Mk. 20 Pf.

Hauck, G., Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund v. F. Kommerell's Lehrbuch neu bearb. u. erweitert. 7. Aufl. (6. der Neubearbeitg.) Tübingen, Laupp'sche Buchh. 2 Mk. 40 Pf.

Hercher. B., Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene f. höhere Schulen. [Erweit. Sonderabdr. aus: „Lehrbuch der Geometrie."] Leipzig, Jacobsen, Verl. 75 Pf.

Lackemann, C., die Elemente der Geometrie. Ein Lehr- u. Uebungsbuch f. den geometr. Unterricht an 6klass. höheren Lehranstalten. 1. Tl. Planimetrie. 3. Aufl. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. Kart. 1 Mk. 25 Pf.

Lübsen, H. B., ausführliches Lehrbuch der analytischen od. höhern Geometrie zum Selbstunterricht. 13. Aufl. Leipzig, Fr. Brandstetter. 4 Mk.

Mink, W., Lehrbuch der Geometrie als Leitfaden beim Unterrichte an höhern Lehranstalten. 9. Aufl., bearb. v. E. 1. Tl. Planimetrie. Berlin, Wiegandt & Schotte. 1 Mk. 50 Pf.

Roeder, H., Lehrsätze u. Aufgaben aus der Planimetrie. 2. Aufl. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. Geb. 1 Mk.

Sattler, A., Leitfaden der Geometrie. Für Volks-, Bürger- u. Fortbildungsschulen, höhere Mädchenschulen u. die unteren Klassen anderer höherer Lehranstalten in 3 Stufen bearb. 3. Aufl. Braunschweig, Appelhans & Pfenningstorff. 1 Mk.

Sobotka, J., Beitrag zur Construction v. umgeschriebenen Developpablen: I. an Flächen 2. Grades, II. an Rotationsflächen. [Aus: Sitzungsber. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wiss."] Prag, Rivnáč, Verl. 40 Pf.

Streissler, J., die geometrische Formenlehre (1. Abth.) in Verbindung m. der Anschauungslehre. Für die I. Realclasse. 8. Aufl. Triest, Schimpff. 1 Mk 20 Pf.

Töpfer, H., Lehrbuch der Planimetrie. Sondershausen, Eupel. 2 Mk. 20 Pf.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Vetters, K., Abriss der darstellenden Geometrie. 1. Tl. Orthogonalprojektivische Darstellg. v. Punkten, Geraden, Ebenen u. nebenfläch. Körpern. Chemnitz, Focke'sche Buchh. 3 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Fialkowski, N., Elemente d. Situations-Zeichnens nebst Anleitung zum Coloriren. 2. Aufl. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn, Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd. Feld- u. Land-Messg. 4. Aufl. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. Stuttgart, Metzlersche Buchh., Verl. 11 Mk.

Mechanik.

Margules, M., Luftbewegungen in e. rotirenden Sphäroidschale. (II. Thl.) [Aus: Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss.“] Leipzig, Freytag. 1 Mk. 80 Pf.

Staude, O., üb. das Foucault'sche Pendel. [Aus: „Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Meckl.“] Güstrow, Opitz & Co. 25 Pf.

Technik.

Bericht, offizieller, üb. die internationale elektro-technische Ausstellung in Frankfurt am Main 1891. Hrsg. vom Vorstand der Ausstellung. I. Bd. Allgemeiner Bericht. Frankfurt, Sauerländer's Verl. Geb. in Leinwd. 20 Mk.

Bibliographie, elektrotechnische. Monatliche Rundschau üb. die literar. Erscheinungn. d. In- u. Auslandes einschliesslich der Zeitschriftenliteratur auf dem Gebiete der Elektrotechnik. Unter ständ. Mitwirkg. der Elektrotechn. Gesellschaft zu Leipzig zusammengestellt v. G. Maas. 1. Jahrg. 1893. 9 Hfte. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Bibliothek, elektro-technische. 1. Bd. 6. Aufl. Wien, Hartleben. 3 Mk ; geb. 4 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 5. Jahrg. Das Jahr 1881. 3. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Geist, E. H., Berechnung elektrischer Maschinen. Ein Handbuch f. Fachleute. 2. Aufl. München, Oldenbourg. 2 Mk. 40 Pf.

Grawinkel, C., u. K. Strecker, die Telegraphentechnik. Ein Leitfaden f. Post- u. Telegraphenbeamte. 3. Aufl. Berlin, Springer. 4 Mk.; geb 5 Mk.

Krämer, J., wie wird man Elektrotechniker? Magdeburg, Exped. d. „Prakt. Physik", Franz Müller. 1 Mk.

Steigl, J., u. K. Büchler, der Elektriker in Schule u. Haus, e. Anleitung zur prakt. Handhabg. der Apparate aus dem Gebiete der Reibungs- u. Vertheilungs-Elektricität. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn, Verl. 50 Pf.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch f. Studirende d. Elektrotechnik. 4. Aufl. Deutsche Uebersetzg. v. C. Grawinkel. 1. Thl. Halle, Knapp. 12 Mk.

— dasselbe. 7. u. 8. Hft. Ebd. à 2 Mk.

Wilke, A., der elektrotechnische Beruf. Eine kurzgefasste Darstellg. d. Bildungsganges u. der Aussichten d. Elektrotechnikers u. der elektrotechn. Gewerbtreibenden. Leipzig, Leiner. 1 Mk. 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Czapski, S., Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Breslau, Ed. Trewendt, Verl. Geb. 9 Mk. 60 Pf.

Hahn, H., die Berechnung d. Lichtes in e. Ebene. — Von Horaz — Verdeutschungen. Von K. Staedler. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Jaerisch, P., zur Theorie der elastischen Kugelwellen m. Anwendg. auf die Reflexion u. Brechg. d. Lichtes. Hamburg, Herold'sche Buchh., Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Arbeiten, astronomische, d. k. k. Gradmessungs-Bureau, ausgeführt unter der Leitg. von Th. v. Oppolzer. Nach dessen Tode hrsg. v. V. Weiss u. R. Schram. 4. Bd. Längenbestimmungen. Leipzig, Freytag. 16 Mk.

Bebber, W. J. van, Katechismus der Meteorologie. 3. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Diesterweg's populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb. v. M. W. Meyer unter Mitwirkg. v. B. Schwalbe. 16., 17. u. 18. Aufl. Berlin, E. Goldschmidt. 7 Mk. 50 Pf.; geb. in Schul-Bd. 8 Mk. 50 Pf.; in Orig.-Bd. 9 Mk.

Gravelius, H., die Anwendung der elliptischen Functionen bei Berechnung absoluter Störungen. Berlin, Stankiewicz. 2 Mk.

Hann, J., einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1882. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

Hepperger, J. v., zur Theorie der astronomischen Refraktion. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Ebd. 70 Pf.

Himmel u. Erde. Illustr. naturwissenschaftliche Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. V. Jahrg. Octbr. 1892 bis Septbr. 1893. 7. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährl. 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Unter Mitwirkg. v. Fachmännern hrsg. v. H. J. Klein. 3. Jahrg. 1892. Mit 5 Lichtdruck- u. Chromotaf. Leipzig, E. H. Mayer. 7 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f 1891. Meteorologische Motive 1. Ordng. in Bremen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. Stündliche Aufzeichngn. der Registrirapparate. Dreimal tägliche Beobachtgn. an 4 Regenstationen. Hrsg. v. P. Bergholz. II. Jahrg. Mit 8 Taf. Bremen, Nössler. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1892. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1892. 2. Hft. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co., Verl. 3 Mk.

Jelinek's Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen, nebst e. Sammlg. v. Hilfstafeln. (In 2 Thln.) 4. Aufl. Hrsg. v. der Direction der k. k. Central-Anstalt f. Meteorologie u. Erdmagnetismus. 1. Thl. Anleitung zur Ausführg. meteorolog. Beobachtgn. an Stationen II. u. III. Ordnung. Leipzig Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Kirchner, M., Duisburger Sonnentafel f. d. J. 1894. Auf- u. Untergangszeit der Sonne, sowie die Sonne des wahren Mittags zu Duisburg f. alle Tage des Jahres 1894. Duisburg, Ewich. 50 Pf.

Klein, H. J., Katechismus der Astronomie. Belehrungen üb. den gestirnten Himmel; die Erde u. den Kalender. 8. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Kloock, H., die Unhaltbarkeit der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate u. die Neugestaltung der endgültigen Bahnbestimmungen der Sterne. Bonn, Röhrscheid & Ebbecke. 1 Mk.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla (Ungarn). XIII. u. XIV. Bd. enth. Beobachtgn. der J. 1890 u. 1891. Halle, Schmidt's Verl.-Buchh. 6 Mk. 50 Pf.

Küstner, F., üb. Anwendungen der Lage der Erdaxe. [Aus:

„Abhandlgn. d. naturforsch. Gesellsch. v. Görlitz."] Görlitz, Tzschaschel's Buchh. 80 Pf.

Láska, V., zur Bahnbestimmung. [Aus: „Sitzungsber. d. böhm. Ges. d. Wiss."] Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Linsenbarth, H., astronomische Neuigkeiten. Berlin, Rich. Lesser. 60 Pf.

Lockyer, N., Astronomie. Deutsche Ausg., besorgt v. A. Winnecke. 5. Aufl., durchgesehen v. E. Becker. Strassburg, Trübner, Verl. Kart. 80 Pf.

Mach, E., u. B. Doss, Bemerkungen zu den Theorien der Schallphänomene bei Meteoritenfällen. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Niesel, G. v., Bahnbestimmung des Meteors vom 7. Juli 1892. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Ebd. 70 Pf.

Oppolzer, E. v., üb. die Ursache der Sonnenflecken. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Ebd. 80 Pf.

Publikationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Hrsg. v. H. C. Vogel. 8. Bds. 4. Stück. Leipzig, Engelmann. 9 Mk.

Rebeur-Paschwitz, E. v., das Horizontalpendel u. seine Anwendung zur Beobachtung der absoluten u. relativen Richtungs-Aenderungen der Lothlinien. Ergebnisse einiger m. Unterstützung der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften in d. J. 1888—1892 auf den Observatorien zu Wilhelmshaven u. Potsdam, sowie in Puerto Orotava auf Teneriffa ausgeführten Beobachtungsreihen. Leipzig, Engelmann. 15 Mk.

Seeliger, H., Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen insbesondere d. Saturnringes. München, Franz'scher Verl. 2 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 4. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Nautik.

Ephemeriden, astronomisch-nautische, f. d. J. 1894. Deutsche Ausg. Ueber Veranlassg. der Marine-Section d. k. u. k. Reichs-Kriegsministeriums. Hrsg. vom astronomisch-meteorolog. Observatorium der k. k. Handels- u. naut. Akademie in Triest unter Red. v. F. Anton. 7. Jahrg. Triest, Schimpff. Kart. 3 Mk.

Leitfaden f. den Unterricht in der Navigation. 3 Thle. u. Anh. Berlin, Mittler & Sohn. Geh. ungeb. in Leinw. 10 Mk.; geb. 12 Mk.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 22. Jahrg. 7. Aufl. Bremen, Heinsius Nachf. 3 Mk.

Physik.

Annalen der Physik u. Chemie. Beiblätter. Hrsg. v. G. u. E. Wiedemann. Namenregister zum 1.—15. Bde. (1877—1891), zusammengestellt v. F. Strobel. Leipzig, Barth. 7 Mk.

Börner, H., Leitfaden der Experimental-Physik f. sechsklassige höhere Lehranstalten. Berlin, Weidmann'sche Buchh. Geb. in Leinw. 2 Mk. 20 Pf.

Elbs, K., die Akkumulatoren. Eine gemeinfassl. Darlegg. ihrer Wirkungsweise, Leistg. u. Behandlg. Leipzig, Barth. 1 Mk.

Emsmann's Vorschule der Physik f. höhere Lehranstalten. In 5. Aufl. neubearb. v. A. Tiebe. Leipzig, Otto Wigand. 3 Mk.

Fricke, A., Leitfaden f. den Unterricht in der Physik. In 2 konzentr. Kursen f. gehobene Bürger- u. höheren Mädchenschulen bearb. 1. Kurs. 3. Aufl. Braunschweig, Appelhans & Pfenningstorff. Kart. 75 Pf.

Fuss, K., Lehrbuch der Physik u. Chemie f. Volks-Fortbildungs- u. Töchterschulen. 2. Aufl. Nürnberg, Korn'sche Buchh. 2 Mk 40 Pf.

Grimsehl, die magnetischen Kraftlinien u. ihre schulgemässe Behandlung zur Erklärung der Induktionsströme. Progr. Hamburg, Herold'sche Buchh., Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 14. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt, Verl. 3 Mk. 60 Pf.

Kindel, P., Leitfaden der Physik f. den Anfangsunterricht in Berücksicht. der neuen Lehrpläne. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. 1 Mk. 25 Pf.

Kunz, W., üb. die Abhängigkeit der magnetischen Hysteresis, der Magnetisirbarkeit u. des elektrischen Leitungsvermögens des Eisens u. des Nickels v. der Temperatur. Progr. Darmstadt, Winter'sche Buchdruckerei. 1 Mk.

Mach's Grundriss der Physik, f. die höheren Schulen des deutschen Reiches bearb. v. F. Harbordt u. M. Fischer. 1. Tl.: Vorbereitender Lehrgang. Ausg. f. das Gymnasium. Leipzig, Freytag. Geb. 2 Mk.. Ausg. f. Real-Anstalten. Geb. 2 Mk.

Mayer, R., die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften v. R. M. 3. Aufl., hrsg. v. J. J. Weyrauch. Stuttgart, Cotta'sche Buchh. Nachf. 10 Mk.

Münch, P., Lehrbuch der Physik. Mit e. Anh.: Die Grundlehren der Chemie u. der mathemat. Geographie. 10. Aufl. Freiburg, Herder. 4 Mk.; Einbd. in Halbldr. 45 Pf.

Puening, H., Grundzüge der Physik. Mit e. Anh.: Chemie u. Mineralogie. Zum Gebrauche f. die mittleren Klassen höherer

Lehranstalten bearb. Münster, Aschendorff'sche Buchh. Geb. in Leinw. 2 Mk.

Puluj, J., e. Methode zur Messung der Phasendifferenz v. harmonischen Wechselströmen u. deren Anwendung zur Bestimmung der Selbstinduction. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag 20 Pf.

— über die Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Gesammtkraft u. der Spannungsdifferenz an e. Verzweigungsstelle des Stromkreises bei Anwendung harmonischer Wechselströme. [Aus: „Sitzungsber. d. k Akad. d. Wiss."] Ebd. 50 Pf.

— üb. die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in e. Leiter m. Selbstinduction. (II. Mittheilg.) [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Ebd. 50 Pf.

Reiff, R., Elasticität u. Elektricität. Freiburg, J. C. B. Mohr. 5 Mk.

Trappe's, A., Schul-Physik. 12. Aufl., unter Berücksicht. der neuen Lehrpläne neu bearb. v. P. Kindel. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. Geb. 3 Mk. 50 Pf.

Vogel, H., Physik. Für mehrklass. Volksschulen bearb. 3. Aufl. Leipzig, Peter's Verl. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Warburg, E., Lehrbuch der Experimentalphysik f. Studirende. Freiburg, J. C. B. Mohr. 7 Mk. 60 Pf.; geb. in Leinw. 8 Mk. 60 Pf.

Wassmuth, A., üb. die Lösung d. Magnetisirungsproblems durch Reihen. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Wiedemann, G., die Lehre v. der Elektricität. 2. Aufl. Zugleich als 4. Aufl. der Lehre vom Galvanismus u. Elektromagnetismus. I. Bd. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 26 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften. 31. Bd. [Mathematisch-phys. Classe, 18. Bd.] Leipzig, Hirzel. 24 Mk.

Abhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften. 32. Bd. A. u. d. T.: Abhandlungen der mathematisch-physikal. Classe der königl sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 19. Bd. Ebd. 12 Mk.

Berichte üb. Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1893. I-III. Ebd. à 1 Mk.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 16. 17. u. 19. Berlin, Herm. Paetel. 1 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. **Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 101. Bd. 10. Hft. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 20 Pf.**

– dasselbe. 102. Bd. 1. u. 2. Hft. Ebd. 4 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte d. mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften in München. 1893. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Vor Kurzem erschien und ist durch jede Buchhandlung zu beziehen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge

von

Professor Dr. Th. Reye,

ord. Professor an der Universität Strassburg.

Abth. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Brosch. 9 M., in Halbfranz gebunden 11 M.

Abth. III (neu). Brosch. 6 M., in Halbfranz gebunden 8 M.

Bereits früher erschien:

Abth. I (3. Aufl.). Mit 92 Textfiguren. Brosch. 7 M., in Halbfranz gebunden 9 M.

Aus einer Besprechung von Guido Hauck:

Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor Allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Decennien eine überaus fruchtbare Weiterentwickelung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise betheiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen . . . . Das auch bereits ins Französische und Italienische übersetzte Werk stellt **in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar.**

Taf. V.

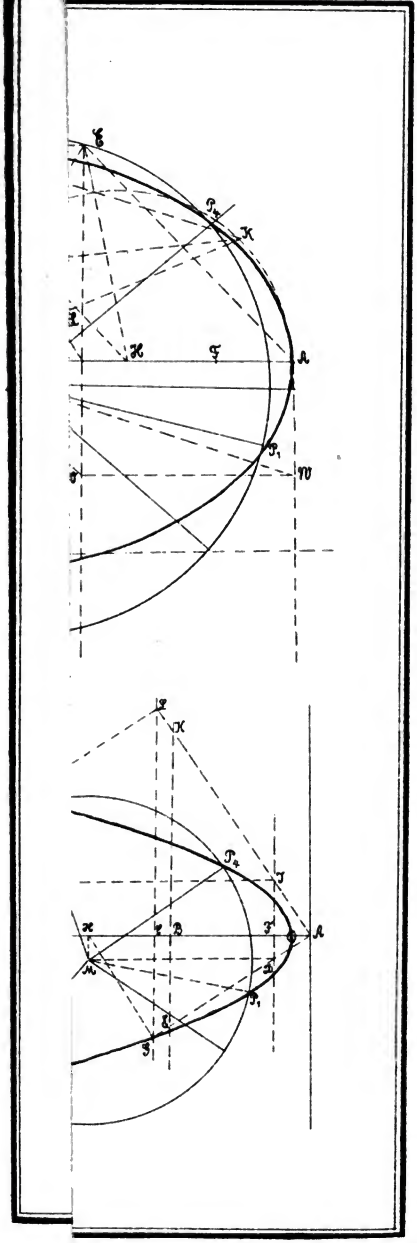


Fig. 1.

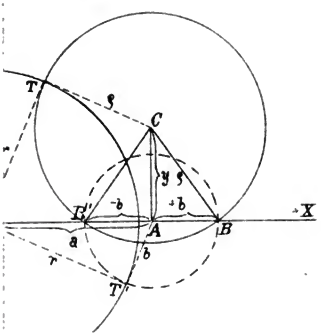
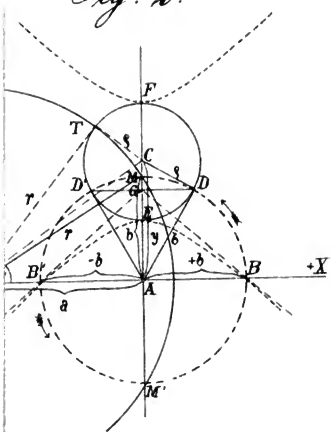
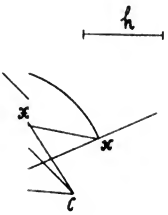
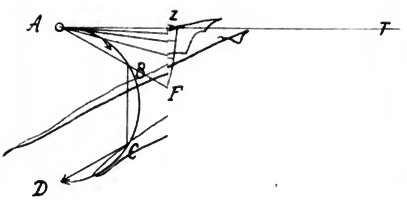


Fig. 2.





XXIX. Rulf: Proj einer Aufgabe.



XXIX. Böttcher ction.

Im Verlage von **Quandt & Händel** in *Leipzig* ist in neuer uflage erschienen:

Lehrbuch der Physik.

nschliesslich der Physik des Himmels, der Luft und der Erde. emäss der neueren Anschauung und mit den neuesten Fortschritten. ir Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten. Von Prof. r. Paul Reis. 8. verbess. und vermehrte Auflage. Mit 442 Texturen u. 850 Aufgaben nebst Lösungen. gr. 8°., VIII, 912 S.

Preis 9 M.

Bereits eingeführt

i der **Thomasschule** in **Leipzig**, an den Gymnasien zu **Bautzen**, **wickau**, **Chemnitz**, **Eisenberg**, **Gotha**, **Rostock**, an den Real- mnasien zu **Zittau**, **Gotha**, **Rostock**, **Augsburg**, Bützow, am minar zu **Löbau**, an der Oberrealschule in **Oldenburg**, an der höh. andelsschule in **Gotha**, an der Vorbereitungsschule zu **Neu Schönee**, an den Landwirtschaftsschulen zu **Dahme** (Mark) u. **Marienrg**, in Gebrauch in Ratibor, Troppau, Wohlau, Leobschütz, denburg etc. zur Einführung beantragt an 15 preussischen Schulen ist das

Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra,

enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in stematischer Anordnung und eine grosse Anzahl von Fragen und ufgaben. Für höhere Lehranstalten bearbeitet von

Dr. E. Wrobel,

I. Lehrer d. Math. am Gymn. zu Rostock.

Den neuen Lehrplänen angepasst!

I. Teil: Pensum der Tertia und Unter - II. 2. Aufl. 1893. 2,60 M. (enthält auch Quadrat. Gleichungen mit 1 Ueb.)

I. Teil: Pensum d. Ober - II. u. Prima d. Gymnasii. 1891. 1,40 M.

I. Teil mit Anhang: Pensum d. Ober - II u. Prima höherer realistischer Lehranstalten. 1892. 2,20 M. **Anhang apart** für Oberprima 0,80 M.

Die **Resultathefte** (zu I. 1 M., II. 1,25 M., zum Anhang 0,60 M.) erden nur an Lehrer direkt abgegeben. Prospekt gratis.

☞ „Ich habe Wrobels Übungsbuch sowohl in Privat- als auch im öffentlichen Unterricht erprobt und in jeder Hinsicht als vorzüglich geeignet befunden. Schwachbegabten Schülern ist diese Aufgabensammlung geradezu unentbehrlich". Prof. Dr. Sch. in Tr.

Rostock. **Wilh. Werther's Verlag.**

Soeben erschien:

Einführung

in die

Grundlagen der Geometrie.

Von Dr. **Wilhelm Killing,**

Prof. der Mathematik an der Academie Münster.

Erster Band.

Mit 40 Figuren im Text. X u. 357 S. gr. 8°. 7 M.

Verlag von Ferdinand Schöningh in Paderborn.

INHALT.

Seite

XIX. Die Gauss'sche Darstellung complexer Zahlen in geometrischer Beleuchtung. Von Adalbert Breuer 337

XX. Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders. Von Ernst Liers 344

XXI. Ueber eine Analogie des Laplace'schen Determinantensatzes. Von Ernst Liers 352

XXII. Ueber eine Schar von Curven auf einer Tangentenfläche. Von R. Hoppe 354

XXIII. Ueber geradlinige Asymptoten algebraischer Curven. Von A. Himstedt 457

XXIV. Ueber die Trisection des Winkels mittelst beliebiger fester Kegelschnitte. Von Dr. Stephan Glaser 367

XXV. Analytische Entwickelung von Gleichungen über drei in demselben Punkte sich schneidende Transversalen eines Dreieckes. Von Josef Kiechl 411

XXVI. Zur Zahlentheorie. (Zweiter Artikel.) Von G. Speckmann 431

XXVII. Ueber die Factoren der Zahlen. Von G. Speckmann . . 435

XXVIII. Bewels des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. Von G. Speckmann . . 439

XXIX. Miscellen.

1. Projective Lösung einer geometrischen Aufgabe. Von Wilhelm Rulf 442
2. Beliebig weit angenäherte π-Construction. Von Dr. J. E. Böttcher 444
3. Zur Zahlentheorie. (Artikel III.) Von G. Speckmann 445
4. Das Dreieck bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen. Von R. Hoppe 447

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

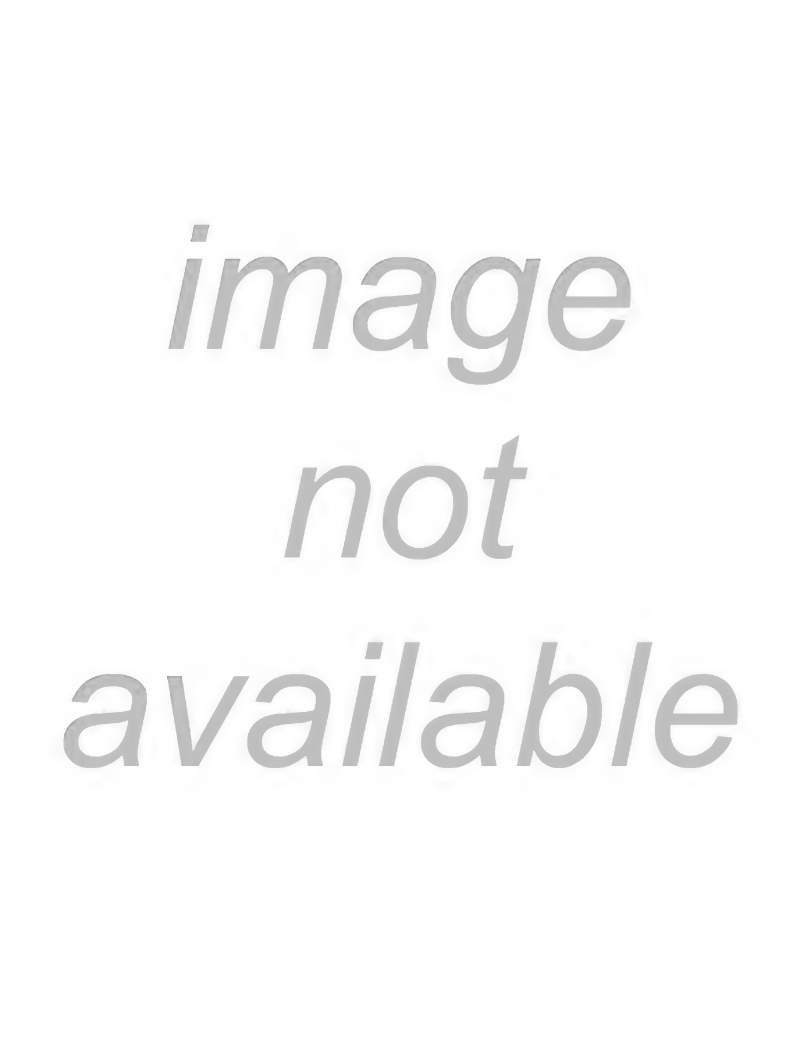


image
not
available

ROOM USE ONLY

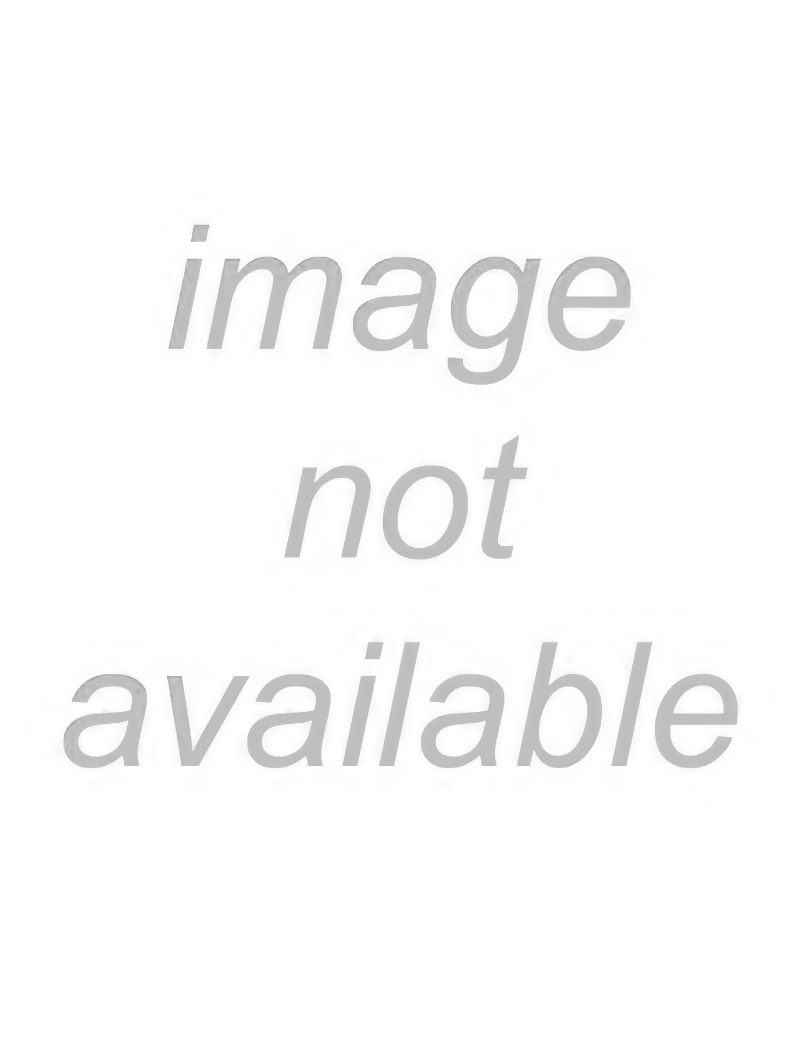


image
not
available